紀伊國屋数学叢書

7

土井公二　三宅敏恒

保型形式と整数論

紀伊國屋書店

序　文

保型函数および保型形式と整数論の深い関連を追求する研究において，1つの道は，“保型形式の Fourier 係数（すなわち，Hecke 作用素の固有値）の整数論的考察”から始まる．本書はこの立場から，現代の整数論に興味をもつ読者に保型形式の理論への入門となるように，1変数の正則保型形式に限って，最も基本的な性質を解説することから始め，modular 形式と Dirichlet 級数の対応に関する Hecke-Weil の結果を説明し（第4章），更に Hecke 作用素の固有値を識るための1つの方法，すなわち Hecke 作用素の trace の公式を Eichler, Selberg および Eichler の結果を（任意 level に）拡張した土方の方法にしたがって解説する（第6章）．なお巻末にいくつかの例をとって，それぞれの Hecke 作用素の固有多項式，Fourier 係数の数値等の表を付して公式の理解と研究者への便宜をも計ったつもりである．

本書は共著であるが，第1章～第6章は三宅が，第7章は土井が，主に執筆した．

本書の執筆中，志村五郎先生にはいろいろと有益な御意見をいただいた．また，先生の著書 “Introduction to the arithmetic theory of automorphic functions” は本文の中でいちいち断わらなかったが多く参考にさせていただいた．合わせて心から感謝の意を表わすものである．

なお，第7章 §7.3, §7.4 における ζ 函数の値を求める計算は肥田晴三，市川尚美両氏の援助によってなされた．巻末に付した Hecke 作用素の固有多項式および固有値の表に関しては和田秀男氏および岩崎敷久氏のそれぞれ独立の計算に負うている．また，これらの表の印刷にあたって data の type は京都大学理学部数学教室図書室の阪口昭子氏とともに戸田　宏教授，河野　明氏にまでもお手を煩わした．さらに，土方弘明，山内正敏，斎藤　裕，肥田晴三，石井秀則の諸氏はそれぞれ原稿の一部を通読してその記述の誤り，不備な点の指摘をされた．

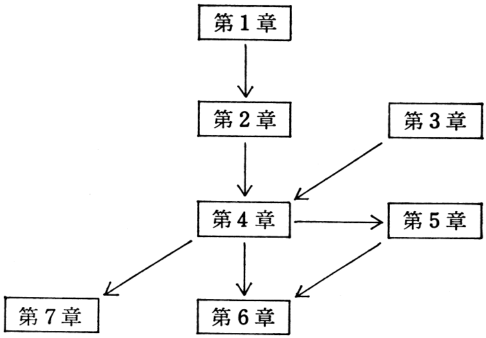
最後に，本書の執筆の機会は永田雅宜教授によって与えられた．また出版に際して紀伊國屋書店の渦岡謙一氏はよく著者の意をくまれた．

以上の方々にここに厚く感謝の意を表する次第である．

1976年5月　　　　　　　　　　　　著　者

読者に

1. 本書の各章の間の関係は次の通りである.



第3章は整数論からの準備であり，整数論の知識を持たない読者の為に必要な知識をまとめたものである．第5章は四元数環の order の単数群を扱うが modular 群にのみ関心のある読者および初めて保型形式を学ばれる方はとばして読まれてさしつかえない.

2. 記号は常用のものを用いた．特に $\boldsymbol{C}$（複素数全体），$\boldsymbol{C}^1$（絶対値が1の複素数全体），$\boldsymbol{R}$（実数全体），$\boldsymbol{Q}$（有理数全体），$\boldsymbol{Z}$（有理整数全体）は断わらずに用いた．また $\coprod$ は集合の直和を，$\sharp\{\quad\}$ は $\{\quad\}$ で定義される集合の元の個数を，A が集合のときに $|A|$ は A の元の個数を表わす．更に R が環のときに $R^\times$ で R の単元（可逆元）全体のなす部分集合を表わす.

3. 定理，補題，系は各節ごとに通し番号をつけた．また，人名を [Weil], [志村 3] のように [ ] でかこんだものは巻末の文献表からの引用を示す.

目　次

第1章　上半平面と Fuchs 群

§1.1　上半平面の自己同型群

$\boldsymbol{P}(=\boldsymbol{C}\cup\{\infty\})$ は Riemann 球面を表わすものとする．$GL_2(\boldsymbol{C})$ の元 $\alpha=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ に対して

$$\alpha z=\frac{az+b}{cz+d} \qquad (z\in\boldsymbol{P}) \tag{1.1.1}$$

と定義する．“$z\longmapsto\alpha z$” は $\boldsymbol{P}$ から自分自身への複素解析的な写像である．今

$$j(\alpha,z)=cz+d \qquad (z\in\boldsymbol{P}) \tag{1.1.2}$$

と定義すると，$z\neq\infty$, $j(\alpha,z)\neq0$ ならば

$$\alpha\begin{bmatrix} z \\ 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} az+b \\ cz+d \end{bmatrix}=j(\alpha,z)\begin{bmatrix} \alpha z \\ 1 \end{bmatrix} \tag{1.1.3}$$

が成り立つが，(1.1.3) は，更に両辺を有理函数を係数とする行列とみなして成立する．これにより，$\alpha,\beta(\in GL_2(\boldsymbol{C}))$ に対して，$\alpha\beta\begin{bmatrix} z \\ 1 \end{bmatrix}$ を 2 通りに計算すると

$$j(\alpha,\beta z)j(\beta,z)\begin{bmatrix} \alpha(\beta z) \\ 1 \end{bmatrix}=j(\alpha\beta,z)\begin{bmatrix} (\alpha\beta)z \\ 1 \end{bmatrix}$$

であるから

$$(\alpha\beta)z=\alpha(\beta z) \qquad (\alpha,\beta\in GL_2(\boldsymbol{C}),\quad z\in\boldsymbol{P}), \tag{1.1.4}$$

$$j(\alpha\beta,z)=j(\alpha,\beta z)j(\beta,z) \qquad (\alpha,\beta\in GL_2(\boldsymbol{C}),\quad z\in\boldsymbol{P}) \tag{1.1.5}$$

を得る．よって “$z\longmapsto\alpha^{-1}z$” は “$z\longmapsto\alpha z$” の逆写像を与えるから，“$z\longmapsto\alpha z$” は Riemann 球面 $\boldsymbol{P}$ の（複素解析的な）自己同型である．$GL_2(\boldsymbol{C})$ の元 α によって引き起こされる $\boldsymbol{P}$ の自己同型 “$z\longmapsto\alpha z$” を

1 次分数変換 (linear fractional transformation) と呼ぶ．また (1.1.5) において特に $\beta=\alpha^{-1}$ ととると $j(\alpha^{-1},z)=j(\alpha,\alpha^{-1}z)^{-1}$ がわかる．

補題 1.1.1　1 次分数変換は円および直線を円または直線に写像する．

証明　$GL_2(\boldsymbol{C})$ の元 $\beta=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ に対して

$$C_\beta=\{z\in \boldsymbol{P} \mid |\beta z|=1\}$$

とおくと，"$z\in C_\beta \Longleftrightarrow |az+b|=|cz+d|$" であるから，$C_\beta$ は直線 ($a=c$ の場合) または円 (Appolonius の円) である．逆に任意の円および直線は適当な $\beta(\in GL_2(\boldsymbol{C}))$ でもって C_β と書き表わせることは容易に確かめられる．さて $\alpha\in GL_2(\boldsymbol{C})$ とし，$\alpha(C_\beta)$ を C_β の α による像とすると $\alpha(C_\beta)=C_{\beta\alpha^{-1}}$ であるから，$\alpha(C_\beta)$ は再び円または直線である．よって補題が示された．

(証明終)

複素平面 $\boldsymbol{C}$ の領域 H および K を

$$H=\{z\in \boldsymbol{C} \mid \mathrm{Im}(z)>0\},$$
$$K=\{z\in \boldsymbol{C} \mid |z|<1\}$$

と定義し，H を **(複素) 上半平面** (complex upper halfplane)，K を**単位円盤** (unit disk) と言う．

補題 1.1.2　上半平面 H と単位円盤 K は複素解析的に同型である．

証明　$\rho=\begin{bmatrix} 1 & -i \\ 1 & i \end{bmatrix}$ とおく．"$z\longmapsto \rho z$" は $\boldsymbol{P}$ の自己同型であり

$$|\rho z|=\left|\frac{z-i}{z+i}\right|<1 \qquad (z\in H),$$

$$\mathrm{Im}(\rho^{-1}z)=\mathrm{Im}\left(i\frac{z+1}{-z+1}\right)=\frac{1-|z|^2}{|1-z|^2}>0 \qquad (z\in K)$$

であるから ρ は H から K への解析的な同型を引き起こす．　(証明終)

我々の興味は，上半平面 H 上の函数で H の自己同型に対して特別な変換式を満たすもの (**保型性を持つ**と言う) にある．そのために H の (複素解析的な) 自己同型にはどのようなものがあるか調べよう．H および K の自己同型全体の集合をそれぞれ $\mathrm{Aut}(H)$, $\mathrm{Aut}(K)$ と書く．いま，$\alpha=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\in GL_2(\boldsymbol{R})$

とすれば，$z\in H$ に対して，

$$\mathrm{Im}(\alpha z)=\frac{\det(\alpha)\mathrm{Im}(z)}{|cz+d|^2} \tag{1.1.6}$$

が成り立つから，$\det(\alpha)>0$ ならば $\mathrm{Im}(\alpha z)>0$ で，"$z\longmapsto\alpha z$" は H の自己同型である．そこで

$$GL_2^+(\boldsymbol{R})=\{\alpha\in GL_2(\boldsymbol{R})\,|\det(\alpha)>0\}$$

とおく．$\alpha\in GL_2^+(\boldsymbol{R})$ に対し，$\iota(\alpha)$ で H の自己同型 "$z\longmapsto\alpha z$" を表わすと

$$GL_2^+(\boldsymbol{R})\ni\alpha\longmapsto\iota(\alpha)\in\mathrm{Aut}(H)$$

は (1.1.4) により群の準同型である．特に，ι は $SL_2(\boldsymbol{R})$ から $\mathrm{Aut}(H)$ への準同型も引き起こす．

さて

$$SO_2(\boldsymbol{R})=\left\{\alpha\in GL_2(\boldsymbol{R})\,|\,\alpha=\begin{bmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ -\sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix},\ 0\leqq\theta<2\pi\right\}$$

とする．便宜上 $\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix}a & 0\\ 0 & a\end{bmatrix}(a\neq 0)$ を各々 -1, $a\cdot 1$ で表わし

$$\boldsymbol{R}^\times\cdot 1=\left\{\begin{bmatrix}a & 0\\ 0 & a\end{bmatrix}\middle|\,a\in\boldsymbol{R}^\times\right\}$$

と書くことにする．$GL_2^+(\boldsymbol{R})$ の元 $\alpha=\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}$ に対し，$\iota(\alpha)$ が H の恒等写像となるならば，$cz^2+(d-a)z-b=0$ が任意の $z(\in H)$ について成り立たねばならぬから，$\alpha\in\boldsymbol{R}^\times\cdot 1$ である．

定理 1.1.3　(1)　$z\in H$ とすると $SL_2(\boldsymbol{R})$ の元 α で $\alpha i=z$ なるものが存在する．

(2)　ι により，$\mathrm{Aut}(H)\cong GL_2^+(\boldsymbol{R})/\{\boldsymbol{R}^\times\cdot 1\}\cong SL_2(\boldsymbol{R})/\{\pm 1\}$ が成り立つ．

(3)　$SO_2(\boldsymbol{R})=\{\alpha\in SL_2(\boldsymbol{R})\,|\,\alpha i=i\}$, $\boldsymbol{R}^\times\cdot SO_2(\boldsymbol{R})=\{\alpha\in GL_2^+(\boldsymbol{R})\,|\,\alpha i=i\}$ である．

証明　$z=x+yi\in H$ とする．$\alpha=\sqrt{y}^{-1}\begin{bmatrix}y & x\\ 0 & 1\end{bmatrix}\in SL_2(\boldsymbol{R})$ とおくと $\alpha i=z$ となり (1) を得る．次に $\varphi\in\mathrm{Aut}(H)$ とする．$z=\varphi(i)$ に (1) を適用すると $\alpha(\in SL_2(\boldsymbol{R}))$ が存在して $\alpha^{-1}\varphi(i)=i$ である．今 $\mathrm{Aut}(H)$ の元 ϕ で

$\psi(i)=i$ なるものは $SO_2(\boldsymbol{R})$ の元 β によって $\psi=\iota(\beta)$ と書き表わされることが示されたとすると，ψ として $\iota(\alpha^{-1})\varphi$ をとると $\varphi=\iota(\alpha\beta)$ となるから，ι は全射である．よって上の注意と合わせて（2）が示される．さて $\psi\in\mathrm{Aut}(H)$ は $\psi(i)=i$ なる元とし，ρ は

$$\rho(z)=(z-i)/(z+i) \qquad (z\in H)$$

なる H から K への同型写像とする．$\rho(i)=0$ であるから $\eta=\rho\psi\rho^{-1}$ は $\eta(0)=0$ となる K の自己同型写像である．η および η^{-1} に Schwarz の定理を適用すると

$$|\eta(z)|=|z|$$

である．そこで再び Schwarz の定理を用いると，$0\leqq\theta<\pi$ が存在して

$$\eta(z)=e^{2\theta i}z \qquad (z\in K)$$

となるから，ρ^{-1} で H に戻して

$$\psi(z)=\rho^{-1}\eta\rho(z)=\frac{(\cos\theta)z+\sin\theta}{(-\sin\theta)z+\cos\theta}$$

を得る．即ち $k_\theta=\begin{bmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ -\sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}\in SO_2(\boldsymbol{R})$ とおくと

$$\psi=\iota(k_\theta)$$

である．よって（2）が示された．（3）は（2）の証明中に示されているが，直接にも容易に示される． (証明終)

さて定理 1.1.3 と同様に K の自己同型群については

$$SU(1,1)=\left\{g\in SL_2(\boldsymbol{C})\,\middle|\,{}^t\bar{g}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}g=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}\right\}$$
$$=\left\{g=\begin{bmatrix}u & v\\ \bar{v} & \bar{u}\end{bmatrix}\,\middle|\,u,\ v\in\boldsymbol{C},\ |u|^2-|v|^2=1\right\}$$

とおくと，$\rho=\begin{bmatrix}1 & -i\\ 1 & i\end{bmatrix}$ に対して $\rho SL_2(\boldsymbol{R})\rho^{-1}=SU(1,1)$ が成り立つから

$$\mathrm{Aut}(K)\cong SU(1,1)/\{\pm1\}$$

が成り立つ．

§1.2 群の作用

我々が本書で考える空間は主に上半平面 H であるが，一般的な定義をしておいた方が便利なことが多い．そのために，一般に位相空間または複素領域を扱う．**群 G が位相空間（または複素領域）X に作用している**とは，写像

$$G\times X\ni(g,x)\longmapsto gx\in X$$

で次の（i）(ii)(iii) を満たすものが定義されているときに言う：

（i） $g\in G$ を固定したときに，“$X\ni x\longmapsto gx\in X$” は連続写像（または複素解析的写像）である．

（ii） $g,h\in G,\ x\in X$ のときに，$(gh)x=g(hx)$ が成り立つ．

(iii) G の単位元を 1 と書くとき，任意の $x(\in X)$ について $1x=x$ が成り立つ．

G の任意の元 g に対し，“$x\longmapsto g^{-1}x$” は $x\longmapsto gx$” の逆写像であるから，G が X に作用するならば

（i′） $g\in G$ を固定したとき，“$X\ni x\longmapsto gx\in X$” は X の位相自己同型（または複素解析的な自己同型）である

ことがわかる．さて G が X に作用しているとき，X の点 x に対し

$$G_x=\{g\in G\,|\,gx=x\}$$

と書いて，x における G の**固定部分群** (group of stabilizers at x) と言う．g が G の元であるとき

$$G_{gx}=gG_xg^{-1} \tag{1.2.1}$$

が成り立っていることは明らかである．次に X の点 x が $g\in G$ の**固定点** (fixed point) であるとは

$$gx=x$$

であるときに言う．x が g の固定点であることは，$g\in G_x$ と同値である．また，X の点 x を固定したときに，X の部分集合

$$Gx=\{gx\,|\,g\in G\}$$

を x の **G-軌跡** (G-orbit) と言う．X に含まれる G-軌跡の全体を $G\backslash X$ で表わす．$x,y\in X$ とすると $Gx=Gy$ であるか，$Gx\cap Gy=\phi$ であるかのいず

れかであるから

$$X=\coprod Gx$$

と X は G-軌跡の直和で表わされる．特に X 自身が G-軌跡になるときに，G は X に**推移的** (transitively) に作用すると言う．G が X に推移的に作用するとは，言い換えると

(1.2.2)　任意の $x,\ y\in X$ に対して，$gx=y$ となる G の元 g が存在する

と言うことである．よって (1.2.1) により，G が X に推移的に作用するならば，G の X の各点における固定部分群は，互いに共役であることがわかる．

さて X から X の G-軌跡の集合 $G\backslash X$ への自然な写像を π で表わす．即ち，π は X の各点 x に $G\backslash X$ の元 Gx を対応させる写像

$$X\ni x\longmapsto \pi(x)=Gx\in G\backslash X$$

である．$G\backslash X$ に上の π が連続になるように入れることの出来る位相の中で最も強いものを $G\backslash X$ の**商空間としての位相** (quotient topology) であると言う．言い換えると，$G\backslash X$ の商空間としての位相とは，開集合の全体として π による逆像が X で開集合となるような部分集合の全体をとって定義される位相である．$G\backslash X$ に商空間としての位相を入れた位相空間を X の G の作用による**商空間** (quotient space) であると言う．今，U が X の開集合であるとき

$$\pi^{-1}(\pi(U))=\bigcup_{g\in G} gU \qquad (gU=\{gu\mid u\in U\})$$

であるが，gU は開集合であるから，$\pi(U)$ は商空間 $G\backslash X$ の開集合である．よって π は X から商空間 $G\backslash X$ への連続な開写像である．

群 G が更に Hausdorff な位相空間の構造を持ち，この位相に関して

$$G\times G\ni(g,h)\longmapsto gh\in G, \qquad G\ni g\longmapsto g^{-1}\in G$$

が連続であるとき，G を**位相群** (topological group) と言う．位相群 G が位相空間（複素領域）X に作用しているとは，上の (i)(ii)(iii) に加えて条件

(iv)　$G\times X\ni(g,x)\longmapsto gx\in X$ が連続である

を満たすときに言う．位相群 G が位相空間 X に作用しているならば X の各点における G の固定部分群は G の閉部分群である．G を位相群とし K を G の閉部分群とすると，K は左および右からの乗法で G に作用する．G の

K による剰余類の集合 $K\backslash G$ および G/K に上の意味での商空間としての位相を入れたものを，G の K による**剰余類の空間**と言う．

定理 1.2.1 位相群 G が位相空間 X に推移的に作用しているとする．G が局所 compact で可算基を持ち，X は局所 compact で Hausdorff であるとする．X の任意の点 x に対して，G の G_x による剰余類の空間 G/G_x は X と $gG_x \longmapsto gx$ なる対応で位相同型である．

証明 集合として G/G_x と X とは $gG_x \longmapsto gx$ により1対1に対応していることは明らかであるから，この写像が実際に位相同型であることを示せばよい．G/G_x の位相の定義により，これは x を固定したときに "$g \longmapsto gx$" が G から X への連続な開写像であることと同値である．この写像は定義により連続であるから，開写像であることを示せばよい．U が G の開集合のときに $Ux=\{gx \mid g\in U\}$ とおき Ux が X の開集合であることを示そう．$gx\,(g\in U)$ を Ux の任意の点とする．G の単位元の compact な近傍 V を $V^{-1}=V$ で $gV^2\subset U$ にとる．G は可算基を持つから可算個の元 $\{g_n\}_{n=1}^{\infty}$ が存在して $G=\cup_{n=1}^{\infty} g_n V$ である．従って $W_n=g_n Vx$ とおくと，$X=\cup_{n=1}^{\infty} W_n$ が成り立つ．W_n は Hausdorff 空間 X の compact 集合であるから閉集合である．さて，どの n に対しても W_n は開集合を含まないとする．X は正則な位相空間であるから，各 n について X の空でない開集合 U_n を $\bar{U}_n$ が compact で且つ

$$U_{n-1}-W_{n-1}\supset \bar{U}_n \qquad (n\geqq 2)$$

となるように帰納的にとることが出来る．U_n の取り方により $\bar{U}_1\supset\bar{U}_2\supset\bar{U}_3\supset\cdots$ となるが $\bar{U}_n$ は compact であるから $\cap_{n=1}^{\infty}\bar{U}_n\neq\phi$ である．U_n の作り方により，$\cap_{n=1}^{\infty}\bar{U}_n$ は任意の W_m と共通点を持たないから，これは $X=\bigcup_m W_m$ に矛盾する．従って少くも1つの $W_m=g_m Vx$ は X の開集合を含むが，$g_m Vx$ と Vx は同相であるから Vx も開集合を含む．そこで S を Vx に含まれる開集合とし，h を $hx\in S$ なる V の元とすると

$$gx\in gh^{-1}S\subset gV^2x\subset Ux$$

となるから，gx は Ux の内点である．故に Ux が開集合であることが示さ

れた．　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　(証明終)

さて $X=H$ とし $G=SL_2(\boldsymbol{R})$ とすると，定理 1.1.3 により位相群 $SL_2(\boldsymbol{R})$ は複素領域 H に推移的に作用し $SL_2(\boldsymbol{R})_i=SO_2(\boldsymbol{R})$ であるから次の系を得る．

系 1.2.2　剰余類の空間 $SL_2(\boldsymbol{R})/SO_2(\boldsymbol{R})$ と H は $\alpha SO_2(\boldsymbol{R})\longmapsto \alpha i$ により位相同型である．

§1.3　1次分数変換の分類

定理 1.1.3 により，H の自己同型は $GL_2^+(\boldsymbol{R})$ の元で尽くされることがわかった．では $GL_2^+(\boldsymbol{R})$ の引き起こす変換はどのようなものかを調べてみよう．$GL_2^+(\boldsymbol{R})$ の元を次のように分類する．

定義　$GL_2^+(\boldsymbol{R})$ の scalar 行列でない元 α を

（1） $\mathrm{tr}(\alpha)^2<4\det(\alpha)$，（2） $\mathrm{tr}(\alpha)^2=4\det(\alpha)$，（3） $\mathrm{tr}(\alpha)^2>4\det(\alpha)$

の各条件を満たすに従って**楕円元** (elliptic element)，**放物元** (parabolic element)，**双曲元** (hyperbolic element) と呼ぶ．α の引き起こす上半平面 H の自己同型 $\iota(\alpha)$ は，（1），（2），(3) の順に**楕円型変換**，**放物型変換**，**双曲型変換**と呼ばれる．

上の（1），（2），（3）は各々 α の固有値が虚数，唯1つで実数，相異なる2実数を意味することを注意しておく．さて $\alpha=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\in GL_2^+(\boldsymbol{R})$ が scalar 行列ではないとし，α の固定点を調べよう．α は H の自己同型であったが，Riemann 球面 $\boldsymbol{P}$ の自己同型でもあったので，$\boldsymbol{P}$ の変換と考えて $\boldsymbol{P}$ 上の固定点を調べてみる．先ず $c=0$ とすると“$a=d \Longleftrightarrow \alpha$：放物元”であり，このとき α は固定点 $\{\infty\}$ を持つ．更に“$a\neq d \Longleftrightarrow \alpha$：双曲元”であり，このとき α は固定点 $\left\{\infty, \dfrac{-b}{a-d}\right\}$ を持つことがわかる．次に $c\neq 0$ とする．∞ は α の固定点ではないから α の固定点を z とすると z は $(az+b)=z(cz+d)$ 即ち

$$cz^2+(d-a)z-b=0$$

の2根であるが，この方程式の判別式は $\mathrm{tr}(\alpha)^2-4\det(\alpha)$ であるから α の固定点は α の上の定義の条件（1），（2），（3）に応じて，共役な複素数，$\boldsymbol{R}$ 上

に1点，$\boldsymbol{R}$ 上に2点となる．

以上から次の定理を得る．

定理 1.3.1　α が $GL_2^+(\boldsymbol{R})$ の scalar でない元であるとき，α は固定点によって次のように特徴づけられる．

（1）　α が楕円元 $\Longleftrightarrow$ α は $\boldsymbol{P}$ の自己同型として共役な複素数 $\{z_0, \bar{z}_0\}$ $(z_0\in H)$ を固定点として持つ．

（2）　α が放物元 $\Longleftrightarrow$ α は $\boldsymbol{P}$ の自己同型として $\boldsymbol{R}\cup\{\infty\}$ 上に唯1個の固定点を持つ．

（3）　α が双曲元 $\Longleftrightarrow$ α は $\boldsymbol{P}$ の自己同型として $\boldsymbol{R}\cup\{\infty\}$ 上に2個の固定点を持つ．

定義　$H\cup\boldsymbol{R}\cup\{\infty\}$ 上の点 z に対し

$$GL_2^+(\boldsymbol{R})_z=\{\alpha\in GL_2^+(\boldsymbol{R})\,|\,\alpha z=z\},\qquad SL_2(\boldsymbol{R})_z=SL_2(\boldsymbol{R})\cap GL_2^+(\boldsymbol{R})_z$$

とおく．$x\in\boldsymbol{R}\cup\{\infty\}$ のときには $GL_2^+(\boldsymbol{R})_x$ は放物元と双曲元を含むから，区別するために x, $x'\in\boldsymbol{R}$ $(x\neq x')$ に対し

$$GL_2^+(\boldsymbol{R})_x^{(p)}=\{\alpha\in GL_2^+(\boldsymbol{R})_x\mid\alpha\text{ は放物型または scalar}\},$$
$$SL_2(\boldsymbol{R})_x^{(p)}=SL_2(\boldsymbol{R})\cap GL_2^+(\boldsymbol{R})_x^{(p)},$$
$$GL_2^+(\boldsymbol{R})_{xx'}=GL_2^+(\boldsymbol{R})_x\cap GL_2^+(\boldsymbol{R})_{x'},$$
$$SL_2(\boldsymbol{R})_{xx'}=SL_2(\boldsymbol{R})\cap GL_2^+(\boldsymbol{R})_{xx'}$$

とおく．

補題 1.3.2　$\alpha(\in GL_2^+(\boldsymbol{R}))$ は scalar でない元とする．

（1）　α が楕円型 $\Longleftrightarrow$ α は $r\begin{bmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ -\sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}$ $(r>0,\ 0\leqq\theta<2\pi)$ と共役である．

（2）　α が放物型 $\Longleftrightarrow$ α は $\begin{bmatrix}a & 1\\ 0 & a\end{bmatrix}$ $(a\in\boldsymbol{R}^\times)$ と共役である．

（3）　α が双曲型 $\Longleftrightarrow$ α は $\begin{bmatrix}a & 0\\ 0 & d\end{bmatrix}$ $(a, d\in\boldsymbol{R}^\times,\ a\neq d)$ と共役である．

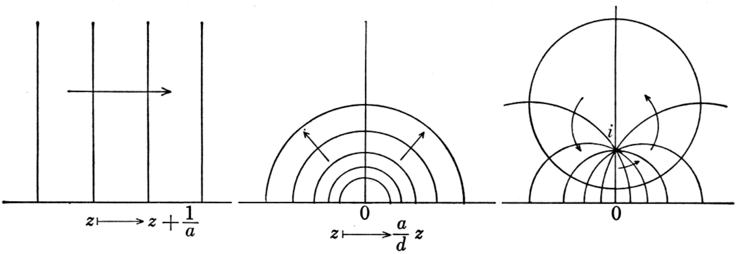
上の共役は $SL_2(\boldsymbol{R})$ の元でとれる．

証明　α が放物型または双曲型ならば固有値は実数であるから，$GL_2^+(\boldsymbol{R})$ の中で Jordan の標準型に共役である．α が楕円元で $z\in H$ を α の固定点

とする．$SL_2(\boldsymbol{R})$ は H に推移的に作用するから，$SL_2(\boldsymbol{R})$ の元 β で $\beta \boldsymbol{i}=z$ となるものが存在する．$\beta^{-1}\alpha\beta\in GL_2^+(\boldsymbol{R})_i$ だから，α は $\boldsymbol{R}^\times\cdot SO_2(\boldsymbol{R})$ の元に共役である．逆は明らかである．　(証明終)

α を $\begin{bmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{bmatrix}$, $r\begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$ とすると，α によって引き起こされる H の変換は，図示すると次のようになる．

$$\alpha=\begin{bmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{bmatrix}\ (a>0),\qquad \alpha=\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{bmatrix}\ (a/d>1),\qquad \alpha=r\begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$



(固定点 (∞))　　(固定点 0, ∞)　　(固定点 $\boldsymbol{i}$)

補題 1.3.2(3) の証明から，$z\in H$ ならば $GL_2^+(\boldsymbol{R})_z$ は $GL_2^+(\boldsymbol{R})_i$ と共役である．更に簡単な計算で

$$GL_2^+(\boldsymbol{R})_\infty^{(p)}=\left\{\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & a \end{bmatrix}\middle|\, a\in\boldsymbol{R}^\times,\ b\in\boldsymbol{R}\right\},$$

$$GL_2^+(\boldsymbol{R})_{\infty 0}=\left\{\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{bmatrix}\middle|\, a, d\in\boldsymbol{R}^\times\right\}$$

であることがわかる．$x, x'\in\boldsymbol{R}\cup\{\infty\}$ $(x\neq x')$ に対して $\{\beta x, \beta x'\}=\{0, \infty\}$ となる $\beta\in SL_2(\boldsymbol{R})$ の存在は容易にわかるから，$GL_2^+(\boldsymbol{R})_x^{(p)}$, $GL_2^+(\boldsymbol{R})_{xx'}$ は各各 $GL_2^+(\boldsymbol{R})_\infty^{(p)}$, $GL_2^+(\boldsymbol{R})_{\infty 0}$ と共役である．従って，$GL_2^+(\boldsymbol{R})_z$, $GL_2^+(\boldsymbol{R})_x^{(p)}$, $GL_2(\boldsymbol{R})_{xx'}$ は可換である．次に $GL_2^+(\boldsymbol{R})$ の元の中心化群および上の $GL_2^+(\boldsymbol{R})_z$, $GL_2^+(\boldsymbol{R})_x^{(p)}$, $GL_2^+(\boldsymbol{R})_{xx'}$ の正規化群を調べよう．第6章で必要とするので，少し一般に $GL_2(\boldsymbol{R})$ における中心化群，正規化群を調べておく．

$\alpha\in GL_2^+(\boldsymbol{R})$ が楕円元，放物元，双曲元であることは，定義により $GL_2(\boldsymbol{R})$ の元による共役では不変であることに注意しておく．

補題 1.3.3 $\alpha\in GL_2(\boldsymbol{R})$ に対し $Z(\alpha)$ を α の $GL_2(\boldsymbol{R})$ における中心化群 $\{\beta\in GL_2(\boldsymbol{R})\,|\,\alpha\beta=\beta\alpha\}$ とする．$z\in H, x, x'\in\boldsymbol{R}\cup\{\infty\}(x\neq x')$ とするとき，scalar でない α について $Z(\alpha)$ は次の通りである．

（1） $\alpha\in GL_2^+(\boldsymbol{R})_z$ ならば，$Z(\alpha)=Z(\alpha)\cap GL_2^+(\boldsymbol{R})=GL_2^+(\boldsymbol{R})_z$ である．

（2） $\alpha\in GL_2^+(\boldsymbol{R})_x^{(p)}$ ならば，$Z(\alpha)=Z(\alpha)\cap GL_2^+(\boldsymbol{R})=GL_2^+(\boldsymbol{R})_x^{(p)}$ である．

（3） $\alpha\in GL_2^+(\boldsymbol{R})_{xx'}$ ならば，$[Z(\alpha):Z(\alpha)\cap GL_2^+(\boldsymbol{R})]=2$, $Z(\alpha)\cap GL_2^+(\boldsymbol{R})=GL_2^+(\boldsymbol{R})_{xx'}$ である．

証明 (2), (3) は，補題 1.3.2（2）および（3）により，α が各々 $\begin{bmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{bmatrix}$ $(a\in\boldsymbol{R}^\times)$ または $\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{bmatrix}$ $(a, d\in\boldsymbol{R}^\times,\ a\neq d)$ のときに示せばよいが，このときには直接に計算して容易にわかる．次に（1）を示すには，複題 1.3.2（1）により $z=i$ で $\alpha=r\begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$ $(\theta\neq n\pi)$ であると仮定してよい．$\beta\in Z(\alpha)$ とすると $\alpha\beta i=\beta\alpha i=\beta i$ であるから βi は α の固定点である．従って $\beta i=\pm i$ である．もし $\beta\in GL_2^+(\boldsymbol{R})$ ならば，これから $\beta i=i$ であり，故に $\beta\in GL_2^+(\boldsymbol{R})_i$ となる．よって $\det(\beta)<0$ と仮定しよう．(1.1.6) により $\beta i=-i$ である．このとき $\beta'=\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\beta$ とおくと $\det(\beta')>0$ であり $\beta' i=i$ であるから $\beta'\in GL_2^+(\boldsymbol{R})_i$ である．よって β, β' は α と可換であるから $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ も α と可換である．α は scalar でないから

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\alpha\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1}=r\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}\neq r\begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

となり矛盾である．即ち，$Z(\alpha)$ は行列式が負であるような元を含まない．よって（1）を得る．　(証明終)

補題 1.3.4 $GL_2(\boldsymbol{R})$ の部分群 G に対し，$N(G)$ で G の $GL_2(\boldsymbol{R})$ における正規化群 $\{\alpha\in GL_2(\boldsymbol{R})\,|\,\alpha G\alpha^{-1}=G\}$ を表わす．$z\in H$ とし，$x, x'\in\boldsymbol{R}\cup\{\infty\}$ $(x\neq x')$ とする．G として $GL_2^+(\boldsymbol{R})_z$, $GL_2^+(\boldsymbol{R})_x^{(p)}$, $GL_2^+(\boldsymbol{R})_{xx'}$ をとると，$[N(G):N(G)\cap GL_2^+(\boldsymbol{R})]=2$ である．更に

（1） $N(GL_2^+(\boldsymbol{R})_z)\cap GL_2^+(\boldsymbol{R})=GL_2^+(\boldsymbol{R})_z$,

（2） $N(GL_2^+(\boldsymbol{R})_x^{(p)})\cap GL_2^+(\boldsymbol{R})=GL_2^+(\boldsymbol{R})_x$,

（3） $[N(GL_2^+(\boldsymbol{R})_{xx'})\cap GL_2^+(\boldsymbol{R}):GL_2^+(\boldsymbol{R})_{xx'}]=2$

である.

証明 $GL_2^+(\boldsymbol{R})_z$ から始めよう. $GL_2^+(\boldsymbol{R})_z$ は $GL_2^+(\boldsymbol{R})_i$ に共役であるから, $z=i$ の場合について調べればよい. $\beta\in N(GL_2^+(\boldsymbol{R})_i)$ とする. $GL_2^+(\boldsymbol{R})_i$ の scalar でない元 α をとると, $\beta\alpha\beta^{-1}$ は βi を固定点として持つから $\beta i=\pm i$ である. もし $\beta\in GL_2^+(\boldsymbol{R})$ ならば, これより $\beta i=i$ であり, よって $\beta\in GL_2^+(\boldsymbol{R})_i$ である. 即ち（1）である. また

$$[N(GL_2^+(\boldsymbol{R})_i):N(GL_2^+(\boldsymbol{R})_i)\cap GL_2^+(\boldsymbol{R})]\leqq[GL_2(\boldsymbol{R}):GL_2^+(\boldsymbol{R})]=2$$

であるが, $\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\in N(GL_2^+(\boldsymbol{R})_i)$ であるから, 実際に等号が成り立つ. 次に, $GL_2^+(\boldsymbol{R})_x$ は $GL_2^+(\boldsymbol{R})_\infty$ と $GL_2^+(\boldsymbol{R})$ の元で共役であるから, $x=\infty$ のときにのみ調べればよいが, この場合には楕円型の場合と全く同様の議論で補題の主張が成り立つ. 最後に, $GL_2^+(\boldsymbol{R})_{xx'}$ を考える. この群は $GL_2^+(\boldsymbol{R})_{\infty 0}$ に $GL_2^+(\boldsymbol{R})$ の元で共役であるから, $GL_2^+(\boldsymbol{R})_{\infty 0}$ について示せばよい. 先ず

$$[N(GL_2^+(\boldsymbol{R})_{\infty 0}):N(GL_2^+(\boldsymbol{R})_{\infty 0})\cap GL_2^+(\boldsymbol{R})]\leqq[GL_2(\boldsymbol{R}):GL_2^+(\boldsymbol{R})]=2$$

であるが, $\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\in N(GL_2^+(\boldsymbol{R})_{\infty 0})$ であるから実際に等号が成り立つ. 次に, $\beta\in N(GL_2^+(\boldsymbol{R})_{\infty 0})\cap GL_2^+(\boldsymbol{R})$ とすると, 上と同様の議論で $\{\beta\infty,\beta 0\}$ は $\{\infty,0\}$ に等しい. 即ち, β は $\{\infty,0\}$ の互換を引き起こす. $GL_2^+(\boldsymbol{R})_{\infty 0}$ の元は $\infty,0$ を固定する $GL_2^+(\boldsymbol{R})$ の元全体だから

$$[N(GL_2^+(\boldsymbol{R})_{\infty 0})\cap GL_2^+(\boldsymbol{R}):GL_2^+(\boldsymbol{R})_{\infty 0}]\leqq 2$$

であるが, $\begin{bmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{bmatrix}\in N(GL_2^+(\boldsymbol{R})_{\infty 0})\cap GL_2^+(\boldsymbol{R})$ 且つ $\begin{bmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{bmatrix}\notin GL_2^+(\boldsymbol{R})_{\infty 0}$ であるので, 等号が成り立つ. （証明終）

補題 1.3.5 （1） $\alpha,\beta\in GL_2^+(\boldsymbol{R})_z$ が相異なる楕円元であるとき, α と β は $GL_2^+(\boldsymbol{R})$ の中では共役ではない.

（2） $\alpha,\beta\in GL_2^+(\boldsymbol{R})$ が相異なる放物元であるとき, $GL_2(\boldsymbol{R})$ の元 γ で $\det(\gamma)<0$ なるものが存在して $\beta=\gamma\alpha\gamma^{-1}$ となるならば, α と β は $GL_2^+(\boldsymbol{R})$

の中では共役ではない．

証明　(1) $\beta=\delta\alpha\delta^{-1}$, $\delta\in GL_2^+(\boldsymbol{R})$, とすると, δz は β の固定点であるから仮定により $\delta z=z$ である．従って $\delta\in GL_2^+(\boldsymbol{R})_z$ となるので δ は α と可換である．よって $\alpha=\beta$ となり矛盾である．(2) α,β が $GL_2^+(\boldsymbol{R})$ の中で共役であると仮定し, $\beta=\delta\alpha\delta^{-1}, \delta\in GL_2^+(\boldsymbol{R})$, とおく．仮定により $\delta^{-1}\gamma\in Z(\alpha)$ であるが, これは補題 1.3.3 (2) に矛盾する．　(証明終)

§1.4　H の不変距離と不変測度

上半平面 H は, 対称領域と呼ばれる空間の特別の場合であって, 次のように $GL_2^+(\boldsymbol{R})$ の作用で不変な Riemann 計量と測度を持っている．それを定義するために, $z=x+iy$ とし, H 上の $\boldsymbol{C}$ 係数の微分形式 dz および $d\bar{z}$ を

$$dz=dx+idy,\qquad d\bar{z}=dx-idy$$

と定義する．$\alpha\in GL_2^+(\boldsymbol{R})$ ならば

$$dz\circ\alpha=\left(\frac{d(\alpha z)}{dz}\right)dz,\qquad d\bar{z}\circ\alpha=\left(\frac{\overline{d(\alpha z)}}{dz}\right)d\bar{z} \tag{1.4.1}$$

が成り立つ．さて H の Riemann 計量 ds^2 および測度 dv を

$$ds^2(z)=\frac{(dx)^2+(dy)^2}{y^2},\qquad dv(z)=\frac{dxdy}{y^2} \tag{1.4.2}$$

と定義する．定義により $(dx)^2+(dy)^2=dz\cdot d\bar{z}$, $dx\wedge dy=\frac{i}{2}dz\wedge d\bar{z}$ であり, $\alpha=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d\end{bmatrix}$ とすると

$$\frac{d(\alpha z)}{dz}=\frac{\det(\alpha)}{(cz+d)^2}\qquad (z\in H) \tag{1.4.3}$$

であるから, (1.4.1) および (1.1.6) により, ds^2 および dv は $GL_2^+(\boldsymbol{R})$ の作用で不変である．

φ を $[0,1]$ から H への 1 対 1 の連続写像であって, $(0,1)$ において有限個の点を除いて C^∞ であるようなものとするとき φ の像 $\varphi([0,1])$ を H 上の曲線と言う．$C=\varphi([0,1])$ が H 上の曲線であるとき

$$l(C)=\int_0^1 ds(\varphi(t))=\int_0^1\frac{\sqrt{\left(\frac{dx(t)}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy(t)}{dt}\right)^2}}{y(t)}dt$$

とおき C の長さと言う．ここで $x(t)$, $y(t)$ は $\varphi(t)=x(t)+iy(t)$ で与えられる．$l(C)$ は C のみで決まり，φ のとり方にはよらない．更に H 上の2点 z_1, z_2 に対し

$$d(z_1,z_2)=\inf\{l(C)\,|\,C\text{ は }z_1\text{ と }z_2\text{ を結ぶ曲線}\}$$

とおき，z_1 と z_2 の**距離**と言う．H 上の2点 z_1 と z_2 を結ぶ曲線のうち長さが $d(z_1,z_2)$ に等しいものが存在するならば，それを z_1 と z_2 を結ぶ**測地線** (geodesic) と言う．

H と K は $\rho=\begin{bmatrix}1 & -i\\ 1 & i\end{bmatrix}$ により同型であるから，以上の定義は ρ により K に移され，K は $SU(1,1)$ の作用で不変な Riemann 計量 $ds_K^2=ds^2\circ\rho^{-1}$ および測度 $dv_K=dv\circ\rho^{-1}$ を持つ．ds_K^2 および dv_K は

$$ds_K^2(z)=\frac{4(dx^2+dy^2)}{(1-|z|^2)^2},\quad dv_K(z)=\frac{4dxdy}{(1-|z|^2)^2}\qquad (z=x+iy\in K)$$

と具体的に書き表わされる．K 上の距離，および測地線もこれを用いて H と同様に定義され，K 上の曲線 C_K の長さを $l_K(C_K)$ と表わすと，H 上の曲線 C に対し $l_K(\rho(C))=l(C)$ 且つ "C が H の測地線 $\Longleftrightarrow$ $\rho(C)$ が K の測地線" が成り立つ．

補題 1.4.1　(1)　H 上の測地線は，実軸と直交する円または直線（の一部分）である．

(2)　K 上の測地線は，単位円と直交する円または直径（の一部分）である．

証明　(2) を示せば，ρ は等角写像であるから補題1.1.1により (1) が示される．z_1, z_2 が K の任意の2点であるとき，z_1 と z_2 を結ぶ測地線は単位円と直交する円または直径の一部分であることを示そう．先ず，$SU(1,1)$ は K に推移的に作用するので，$z_1=O$（K の原点）と仮定しても差支えない．また $\rho SO_2(\boldsymbol{R})\rho^{-1}$ は原点を中心とした回転を与えるから，z_2 は正の実数としてよい．$z_2=x_0$ とおく．C_0 を O と x_0 を実軸に沿って結んだ曲線とし，C を O と x_0 を結んだ C_0 と異なる任意の曲線とする．$\varphi:[0,1]\to C$ とし $\varphi(t)$

$=x(t)+iy(t)$ とすると

$$l_K(C)=\int_0^1\sqrt{\left(\frac{dx(t)}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy(t)}{dt}\right)^2}\frac{2dt}{1-|\varphi(t)|^2}$$
$$>\int_0^1\left|\frac{dx(t)}{dt}\right|\frac{2dt}{1-x(t)^2}\geqq\int_0^{x_0}\frac{2}{1-x^2}dx=l_K(C_0)$$

となり，C_0 が O と x_0 を結ぶ曲線のうちで最短である． (証明終)

系 1.4.2 (1) z_0 が H (または K) の点であるとき，z_0 から等距離にある H (または K) の点全体のなす集合は z_0 を通るすべての測地線と直交する円である．

(2) z_1, z_2 が H (または K) の異なる2点であるとき，z_1, z_2 から等距離にある点全体のなす集合は H (または K) の測地線*である．

証明 (1)，(2) とも K についてのみ示せばよい．(1) $SU(1,1)$ が推移的に作用するから $z_0=O$ (原点) の場合に示せばよいが，O からの距離は O を中心とした回転で不変だから，O から等距離にある点全体は O を中心とした円である．(2) z_1 と z_2 を結ぶ測地線の中点を $SU(1,1)$ の元で O に写像することにより，$z_1=y_0i$，$z_2=-y_0i$ $(0<y_0<1)$ のときに示せばよい．$d(>0)$ を与えたとき $z_\nu(\nu=1,2)$ からの距離が d である点全体 C_ν は (1) により円である．K の Riemann 計量は $(x,y)\longmapsto(-x,y)$ なる変換で不変だから，$C_\nu(\nu=1,2)$ は中心を虚軸上に持つ．よって C_1 と C_2 は実軸に関して対称であるから，C_1 と C_2 の交点は存在すれば実軸上である．逆に，実軸上にある K の点は明らかに z_1, z_2 から等距離にあるから，z_1, z_2 から等距離にある点全体は K 内の実軸上の点である． (証明終)

さて，$\alpha\in SL_2(\boldsymbol{R})$ が z_0 を固定する楕円元であるとする．z_0 を O に写す H から K への同型を ρ とすると

$$\rho\alpha\rho^{-1}=\beta,\qquad \beta=\begin{bmatrix}e^{i\theta} & 0\\ 0 & e^{-i\theta}\end{bmatrix}$$

と書ける．β は原点のまわりの角度 2θ の回転であるから，z_0 を通る測地線 C

---

* 以下，H 上の (K 上の) 実軸と (単位円と) 直交する円，直線，およびその一部分を測地線ということにする．

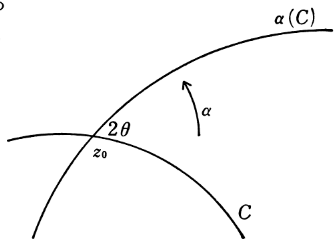
と α による像 $\alpha(C)$ の角度は 2θ である．$\alpha z_0 = z_0$ であるから (1.1.5) により

$$j(\beta, 0) = j(\rho, z_0)\, j(\alpha, z_0)\, j(\rho^{-1}, 0)$$
$$= j(\alpha, z_0)$$

となるので

$$(1.4.4) \qquad \arg(j(\alpha, z_0)) = \arg(j(\beta, 0)) = -\theta$$

を得る．



補題 1.4.3 $\alpha \in SL_2(\boldsymbol{R})$ とすると

(1) $\quad (y^{-1}dz)\circ\alpha - y^{-1}dz = -2id[\log(j(\alpha, z))]$.

(2) $\quad y^{-1}dx\circ\alpha - y^{-1}dx = 2d[\arg(j(\alpha, z))]$.

証明 $\alpha = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ とする．(1.1.6)，(1.4.1)，(1.4.3) により

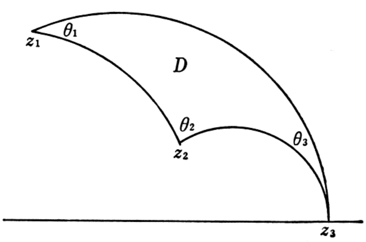
$$(y^{-1}dz)\circ\alpha - y^{-1}dz = (|j(\alpha, z)|^2 j(\alpha, z)^{-2} - 1)\, y^{-1}dz$$
$$= -2cidz/j(\alpha, z)$$
$$= -2id\log[j(\alpha, z)]$$

となる．(2) は (1) の実部をとって得られる．　(証明終)

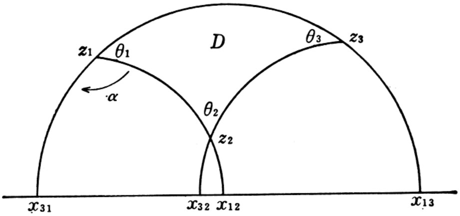
補題 1.4.4 実軸と直交する円または直線を辺とする $H \cup \boldsymbol{R} \cup \{\infty\}$ の三角形の内部を D とする．3頂点を z_1, z_2, z_3 とし各々における内角を θ_1, θ_2, θ_3 とすると

$$v(D) = \pi - (\theta_1 + \theta_2 + \theta_3)$$

である．



証明 先ず z_1, z_2, z_3 が H 内にあるときに示そう．辺 z_iz_j を z_j の方向に延長し，$\boldsymbol{R} \cup \{\infty\}$ との交点を x_{ij} で表わす．$d(y^{-1}dx) = y^{-2}dx \wedge dy$ であるから D の境界に正方向に向きを付けたのを ∂D とすると Stokes の定理によって



$$\begin{aligned}\int_D y^{-2}\,dx\,dy &= \int_{\partial D} y^{-1}dx\\ &= \left(\int_{z_1}^{z_2}+\int_{z_2}^{z_3}+\int_{z_3}^{z_1}\right)y^{-1}dx\\ &= \left(\int_{z_1}^{x_{12}}+\int_{x_{12}}^{z_2}+\int_{z_2}^{x_{32}}+\int_{x_{32}}^{z_3}+\int_{z_3}^{z_1}\right)y^{-1}dx\end{aligned}$$

が成り立つ．任意の実数 x_0 に対し円 $|z-x_0|=r_0$ 上では $z-x_0=re^{i\theta}$ とおくと $y^{-1}dx=-d\theta$ であるから右辺の各積分は有限で意味を持つ．$\alpha\in SL_2(\boldsymbol{R})$ を z_1 を固定する楕円元で x_{12} を x_{31} に写像するものとすると，補題 1.4.3(2) と (1.4.4) により

$$\begin{aligned}\int_{z_1}^{x_{12}} y^{-1}dx &= \int_{z_1}^{x_{12}} y^{-1}dx\circ\alpha-\int_{z_1}^{x_{12}} 2d[\arg(j(\alpha,z))]\\ &= \int_{z_1}^{x_{31}} y^{-1}dx-\Big[2\arg(j(\alpha,z))\Big]_{z_1}^{x_{12}}\\ &= \int_{z_1}^{x_{31}} y^{-1}dx+(\pi-\theta_1)\end{aligned}$$

である．同様に

$$\int_{x_{12}}^{z_2} y^{-1}dx=\int_{x_{32}}^{z_2} y^{-1}dx-\theta_2,\qquad \int_{x_{32}}^{z_3} y^{-1}dx=\int_{x_{13}}^{z_3} y^{-1}dx+(\pi-\theta_3)$$

となるから

$$\int_D y^{-2}dx\,dy=\int_{x_{13}}^{x_{31}} y^{-1}dx+(\pi-\theta_1)+\theta_2+(\pi-\theta_3)$$

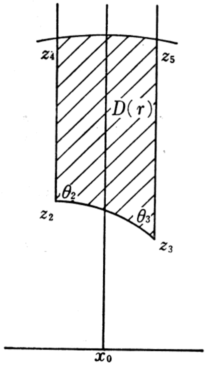
を得る．さて円弧 $x_{31}z_1z_3x_{13}$ の中心を x_0 とし $(x-x_0)+iy_0=re^{i\theta}$ とおくと，上に述べたことより

$$\int_{x_{13}}^{x_{31}} y^{-1}dx=\int_0^{\pi}-d\theta=-\pi$$

である．よって

$$\int_D y^{-1}dxdy=\pi-(\theta_1+\theta_2+\theta_3)$$

を得る．次に頂点が $\boldsymbol{R}\cup\{\infty\}$ 上にある場合を考えよう．適当に三角形を分割することによって，$\boldsymbol{R}\cup\{\infty\}$ 上にある頂点は唯1つであるとして差支えない．$SL_2(\boldsymbol{R})$ は $\boldsymbol{R}\cup\{\infty\}$ に推移的に作用しているので三角形の1つの頂点は ∞ であるとしてよいから，3頂点を $z_1=\infty$, z_2, z_3 とし内角を各々 $\theta_1(=0)$, θ_2, θ_3 とする．$x_0=\frac{1}{2}\mathrm{Re}(z_2+z_3)$ とおき，x_0 を中心とし，十分大きな半径 r を持つ円と直線 $\mathrm{Re}(z)=\mathrm{Re}(z_2)$, $\mathrm{Re}(z)=\mathrm{Re}(z_3)$ との交点を各々 z_4, z_5 とする．z_2, z_3, z_5, z_4 を頂点に持つ四辺形を $D(r)$ とすると，上の結果によって



$$v(D)=\lim_{r\to\infty}v(D(r))=\pi-(\theta_2+\theta_3)=\pi-(\theta_1+\theta_2+\theta_3)$$

であるから補題を得る．　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　(証明終)

一般に局所 compact な位相群 G の測度は，(i) G の任意の compact 部分集合は可測であり，(ii) G の元の左からの乗法に関し不変であるときに，**Haar 測度**と呼ばれる．G の Haar 測度は常に存在し，常数倍を除き一意的に定まる．G の Haar 測度が特に右からの G の元の乗法に関しても不変なときに，G は **unimodular** であると言う．

$SL_2(\boldsymbol{R})$ の Haar 測度を調べてみよう．先ず，$z=x+iy\in H$ に対して，$h_z=\sqrt{y}^{-1}\begin{bmatrix} y & x \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\in SL_2(\boldsymbol{R})$ とおく．$\alpha\in SL_2(\boldsymbol{R})$ とし $z=\alpha i$ とすると，$h_z^{-1}\alpha i=i$ であるから，$h_z^{-1}\alpha=k_\theta$, $k_\theta=\begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}\in SO_2(\boldsymbol{R})$，と書ける．即ち任意の $\alpha\in SL_2(\boldsymbol{R})$ は

(1.4.5)　　　　$\alpha=h_z k_\theta \qquad (z\in H,\ k_\theta\in SO_2(\boldsymbol{R}))$

と書ける．また α が (1.4.5) のように表わされたならば

$$z=\alpha i, \qquad \theta=-\arg(j(\alpha,i))$$

であるから，z および θ は α により唯1組決まる．更に $\alpha=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ とすると，x, y, θ は a, b, c, d の C^∞ 函数であり，逆に a, b, c, d は x, y, θ の C^∞ 函数である．よって多様体として

$$SL_2(\boldsymbol{R}) \cong H \times \boldsymbol{C}^1$$

が成り立つ．(z, θ) を用いて $SL_2(\boldsymbol{R})$ の測度を

$$d\alpha = (2\pi)^{-1} y^{-2} dx\, dy\, d\theta$$

と定義する．$SL_2(\boldsymbol{R})$ の元 α_1 を固定したとき

$$\alpha_1 \alpha = h_{\alpha_1 z} k_{\theta+\varphi}, \qquad \varphi = -\arg(j(\alpha_1, z))$$

であるが，$y^{-2} dx \wedge dy$ が $SL_2(\boldsymbol{R})$ の作用で不変であり，また φ は θ を含まないから，$\alpha_1 z = x' + iy'$ とおくと

$$y'^{-2} dx' \wedge dy' \wedge d(\theta+\varphi) = y^{-2} dx \wedge dy \wedge (d\theta + d\varphi) = y^{-2} dx \wedge dy \wedge d\theta$$

である．即ち $d\alpha$ は $SL_2(\boldsymbol{R})$ の左からの乗法で不変である．よって $d\alpha$ は $SL_2(\boldsymbol{R})$ の Haar 測度である．次に $\alpha_1 = h_{z_1} k_{\theta_1}$，$z_1 = x_1 + iy_1$ と書き表わし，z', θ' を

$$\alpha \alpha_1 = h_{z'} k_{\theta'}, \qquad z' = x' + iy'$$

と定義すると簡単な計算で

$$x' = \frac{y \sin\theta \cos\theta (1 - z_1^2) + x_1 y \cos 2\theta}{|\cos\theta - z_1 \sin\theta|^2} + x, \qquad y' = \frac{y_1}{|\cos\theta - z_1 \sin\theta|^2},$$

$$\theta = \arg(x_1 \sin\theta - \cos\theta + iy_1 \sin\theta) + \theta_1 + 2n\pi$$

となり，これから

$$y'^{-2} dx' \wedge dy' \wedge d\theta' = y^{-2} dx \wedge dy \wedge d\theta$$

を得る．故に $d\alpha$ は $SL_2(\boldsymbol{R})$ の元の右からの乗法でも不変である．以上により次の定理が成り立つ．

定理 1.4.5　$SL_2(\boldsymbol{R})$ は unimodular な群である．更に $f(z)$ が H 上の可積分な函数ならば，"$\alpha \longmapsto f(\alpha i)$" は $SL_2(\boldsymbol{R})$ 上の可積分な函数であって

$$\int_H f(z)\, dv(z) = \int_{SL_2(\boldsymbol{R})} f(\alpha i)\, d\alpha$$

が成り立つ．

§1.5 Fuchs 群

一般的な定義から始める．

定義　群 Γ が位相空間（複素領域）X に**不連続に**（properly discontinuously）に作用するとは，Γ が X に作用しており，更に X の任意の2点 x, y に対し各々の近傍 U, V を適当にとると

$$\#\{\gamma\in\Gamma \mid \gamma U\cap V\neq\phi\}<\infty$$

が成り立つときに言う．

X が特に局所 compact ならば，この後半の部分は，X の任意の compact 集合 A, B に対して

$$\#\{\gamma\in\Gamma \mid \gamma A\cap B\neq\phi\}<\infty$$

と言うのと同値である．次に，位相群 G の部分群 Γ が G の**離散部分群**（discrete subgroup）であるとは，Γ が G の部分空間としての位相で離散的であるときに言う．言い換えると，G の単位元1の近傍 V で $\Gamma\cap V=\{1\}$ となるものが存在することである．

定理 1.5.1　位相群 G の離散部分群 Γ は G に集積点を持たない閉部分群である．

証明　定義により，G の単位元1における近傍 U で $U\cap\Gamma=\{1\}$ なるものが存在する．G の1の近傍 V で $V^{-1}V\subset U$ なるものをとれば，Γ の任意の異なる2元 α, β に対して，$V\alpha\cap V\beta=\phi$ が成り立つ．g を Γ の閉包の元とし $\alpha\in V^{-1}g\cap\Gamma$ とすると，このことから $V^{-1}g\cap\Gamma=\{\alpha\}$ である．よって $g=\alpha\in\Gamma$ となり定理が示された．　　　　（証明終）

定理 1.5.2　G, X は定理 1.2.1 と同様とし，Γ は G の部分群であるとする．X の各元における G の固定部分群が compact なら，次の（1），（2）は同値である．

（1）　Γ は G の離散部分群である．

（2）　Γ は X に不連続に作用する．

証明　（1）$\Longrightarrow$（2）：X の任意の点 x を固定し，X の任意の compact 部分集合 A, B に対して $M=\{g\in G \mid gx\in A\}$, $N=\{g\in G \mid gx\in B\}$ とおく．G は

X に推移的に作用するから $A=Mx$ である．さて $M\subset\bigcup_{\nu} U_\nu$ と M を G の開集合 U_ν でおおう．G は局所 compact であるから U_ν として $\bar{U}_\nu$ が compact なものをとれる．$A\subset\bigcup_{\nu} U_\nu x$ であるが，定理 1.2.1 により $U_\nu x$ は開集合で A は compact であるから，$\{U_\nu\}$ から有限個選んで $A\subset\bigcup_{\nu=1}^{n} U_\nu x$ とできる．よって $M\subset\bigcup_{\nu=1}^{n}\bar{U}_\nu G_x$ である．$\bar{U}_\nu G_x$ は compact で M は閉集合だから M は compact である．同様に N も compact である．Γ が離散的な閉部分群で，NM^{-1} が compact 部分集合だから，$\{\gamma\in\Gamma\mid\gamma(A)\cap B\neq\phi\}=\Gamma\cap NM^{-1}$ は compact な離散集合となり，有限集合である．(2)$\Longrightarrow$(1)：V は G の単位元 1 の近傍で $\bar{V}$ が compact なものとする．X の点 x に対して $\Gamma\cap V\subset\{\gamma\in\Gamma\mid\gamma x\in\bar{V}x\}$ となるが，$\{x\}$, $\bar{V}x$ は X の compact 集合だから，右辺の集合は有限集合である．よって V を十分小さくとりなおして $\Gamma\cap V=\{1\}$ とできる．

(証明終)

定理 1.5.2 および定理 1.1.3 (2) により，次の系を得る．

系 1.5.3 $SL_2(\boldsymbol{R})$ の離散部分群は上半平面 H に不連続に作用する．逆に，上半平面 H に不連続に作用する $\mathrm{Aut}(H)$ の部分群は $SL_2(\boldsymbol{R})$ の離散部分群から得られる．

定義 $SL_2(\boldsymbol{R})$ の離散部分群を **Fuchs 群**と言う．

以下 Γ は Fuchs 群であるとする．$Z(\Gamma)=\Gamma\cap\{\pm1\}$ とおく．§1.1 で定義した $SL_2(\boldsymbol{R})$ から $\mathrm{Aut}(H)$ への準同型を ι とすると，定理 1.1.3 により

$$\iota(\Gamma)\cong\Gamma/Z(\Gamma)$$

である．$z\in H$, $x, x'\in\boldsymbol{R}\cup\{\infty\}$ とするとき

$$\Gamma_z=\{\gamma\in\Gamma\mid\gamma z=z\},\qquad \Gamma_x=\{\gamma\in\Gamma\mid\gamma x=x\},$$
$$\Gamma_{xx'}=\{\gamma\in\Gamma\mid\gamma x=x,\ \gamma x'=x'\}$$

とおく．

定義 $z\in H\cup\boldsymbol{R}\cup\{\infty\}$ が Γ の楕円元，放物元，双曲元の固定点であるとき，各々 z は Γ の**楕円点** (elliptic point)，**cusp**，**双曲点** (hyperbolic point) であると言う．$z\in H$ が Γ の楕円点であるとき，$|\Gamma_z/Z(\Gamma)|$ を楕円点 z の**位数**と言う．

定理 1.5.4　(1)　$z\in H$ が Γ の楕円点ならば，Γ_z は有限巡回群である．

(2)　$x\in\boldsymbol{R}\cup\{\infty\}$ が Γ の cusp ならば，$\Gamma_x\subset SL_2(\boldsymbol{R})_x^{(p)}$ であり $\Gamma_x/Z(\Gamma)\cong\boldsymbol{Z}$ である．$\sigma\in SL_2(\boldsymbol{R})$ を $\sigma x=\infty$ なる元とすると，$h>0$ が存在して $\sigma\Gamma_x\sigma^{-1}\cdot\{\pm1\}=\left\{\pm\begin{bmatrix}1 & mh\\ 0 & 1\end{bmatrix}\middle|\, m\in\boldsymbol{Z}\right\}$ である．

(3)　$x, x'\in\boldsymbol{R}\cup\{\infty\}$, $\Gamma_{xx'}\neq Z(\Gamma)$ ならば，$\Gamma_{xx'}/Z(\Gamma)\cong\boldsymbol{Z}$ である．更に $\sigma(\in SL_2(\boldsymbol{R}))$ が存在し $\sigma\Gamma_{xx'}\sigma^{-1}\cdot\{\pm1\}=\left\{\pm\begin{bmatrix}u & 0\\ 0 & u^{-1}\end{bmatrix}^m\middle|\, m\in\boldsymbol{Z}\right\}(u>0)$ となる．

証明　$SL_2(\boldsymbol{R})$ は H に推移的に作用するから，$SL_2(\boldsymbol{R})_z$ は $SL_2(\boldsymbol{R})_i=SO_2(\boldsymbol{R})$ に共役である．$SO_2(\boldsymbol{R})$ は $\boldsymbol{C}^1$ と同型な compact な Abel 群であるから，$\Gamma_z=\Gamma\cap SL_2(\boldsymbol{R})_z$ は有限群である．$\boldsymbol{C}^1$ の有限部分群は巡回群であるから（1）を得る．（2）を示すには，Γ の代わりに $\sigma\Gamma\sigma^{-1}$ をとることにより，始めから $x=\infty$ と仮定してもよい．∞ が Γ の cusp であるから，$\gamma=\begin{bmatrix}1 & l\\ 0 & 1\end{bmatrix}$ $(\boldsymbol{R}\ni l\neq0)$ なる元が Γ_∞ に存在する．Γ_∞ が放物型でも scalar 行列でもない元 α を含むとすると，α は $\alpha=\begin{bmatrix}a & b\\ 0 & a^{-1}\end{bmatrix}(a\neq\pm1)$ と表わされる．$|a|<1$ なら α の代わりに α^{-1} をとることにより $|a|>1$ としてよい．このとき，任意の自然数 n に対して $\alpha^{-n}\gamma\alpha^n=\begin{bmatrix}1 & a^{-n}l\\ 0 & 1\end{bmatrix}\in\Gamma$ となり Γ が離散的であることに矛盾する．従って，$\Gamma_\infty\subset SL_2(\boldsymbol{R})_\infty^{(p)}=\left\{\pm\begin{bmatrix}1 & b\\ 0 & 1\end{bmatrix}\middle|\, b\in\boldsymbol{R}\right\}$ となり（2）を得る．最後に補題 1.3.2（3）により，$\sigma\in SL_2(\boldsymbol{R})$ が存在して

$$\sigma\Gamma_{xx'}\sigma^{-1}\subset\sigma SL_2(\boldsymbol{R})_{xx'}\sigma^{-1}=SL_2(\boldsymbol{R})_{\infty0}=\left\{\begin{bmatrix}a & 0\\ 0 & a^{-1}\end{bmatrix}\middle|\, a\in\boldsymbol{R}^\times\right\}$$

であるから（3）を得る．　　　　　　　　　　　　　　　　（証明終）

この定理の（2）により $x\in\boldsymbol{R}\cup\{\infty\}$ が Γ の双曲点で且つ cusp となることはないことを注意しておく．

系 1.5.5　Γ' が Fuchs 群 Γ の指数有限の部分群であるとする．Γ' の cusp 全体の集合は Γ の cusp 全体の集合に一致する．

証明　Γ' の cusp は定義により Γ の cusp でもあるから，Γ の cusp が Γ' の cusp になることを示せばよい．x は Γ の cusp であるとする．$[\Gamma_x : \Gamma'\cap\Gamma_x]$

$\leqq [\Gamma : \Gamma'] < \infty$ であるから定理 1.5.4（2）により $\Gamma' \cap \Gamma_x \neq Z(\Gamma')$ である．よって x は Γ' の cusp である．（証明終）

ここで，$-1 \notin \Gamma$ の場合を考察する．今 x は Γ の cusp であるとし，$\sigma \in SL_2(\boldsymbol{R})$ を $\sigma x = \infty$ なる元とする．定理 1.5.4（2）により $h>0$ が存在して

$$\sigma \Gamma_x \sigma^{-1} \cdot \{\pm 1\} = \left\{ \pm \begin{bmatrix} 1 & mh \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \middle| m \in \boldsymbol{Z} \right\}$$

であるが，$-1 \notin \Gamma$ であるから

$$\begin{bmatrix} 1 & h \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \in \sigma \Gamma_x \sigma^{-1} \quad \text{または} \quad \begin{bmatrix} -1 & h \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \in \sigma \Gamma_x \sigma^{-1}$$

のいずれかである．$\begin{bmatrix} 1 & h \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \in \sigma \Gamma_x \sigma^{-1}$ のときに x を Γ の**正則な cusp** (regular cusp)，$\begin{bmatrix} -1 & h \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \in \sigma \Gamma_x \sigma^{-1}$ のときに x を Γ の**非正則な cusp** (irregular cusp) と呼ぶ．次の補題から，この定義は σ のとり方によらないことがわかる．

補題 1.5.6 Γ が $-1 \notin \Gamma$ なる Fuchs 群であるとする．

（1） Γ の cusp x が正則であるか非正則であるかは σ のとり方によらない．

（2） Γ の楕円点の位数は常に奇数である．

証明 $\sigma_1, \sigma_2 (\in SL_2(\boldsymbol{R}))$ が $\sigma_1 x = \sigma_2 x = \infty$ なる元であるとする．$\sigma_2 \sigma_1^{-1} \infty = \infty$ であるから $\sigma_2 \sigma_1^{-1} = \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & a^{-1} \end{bmatrix}$ と書ける．今 $\gamma \in \Gamma_x$ が $\sigma_1 \gamma \sigma_1^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & h \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ $\left(\text{または} \begin{bmatrix} -1 & h \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\right)$ となる元とすると

$$\sigma_2 \gamma \sigma_2^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & a^2 h \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \left(\text{または} \begin{bmatrix} -1 & a^2 h \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\right)$$

となり（1）が示された．次に z が Γ の楕円元であるとする．定理 1.5.4 を $\Gamma' = \Gamma \cdot \{\pm 1\}$ に適用すると，$\Gamma'_z = \Gamma_z \cdot \{\pm 1\}$ は巡回部分群である．よって Γ'_z に含まれる位数 2 の元は唯一つで -1 のみである．$-1 \notin \Gamma_z$ であるから Γ_z は位数 2 の元を持たない．従って巡回群 Γ_z の位数は奇数である．（証明終）

例 1 $\alpha \in SL_2(\boldsymbol{R})$ とする．α で生成される $SL_2(\boldsymbol{R})$ の巡回部分群 $\langle \alpha \rangle$ は，α が

放物型または双曲型ならば $SL_2(\boldsymbol{R})$ の離散部分群である．α が楕円型ならば，$\langle\alpha\rangle$ が $SL_2(\boldsymbol{R})$ の離散部分群になるのは α の位数が有限であるときに限る．

例 2 $\mathfrak{R}$ が compact な Riemann 面で genus $g>1$ なるものであるとき，$\mathfrak{R}$ の universal covering は上半平面 H に同型である．この同型を1つ固定すると $\mathfrak{R}$ の homotopy 群 $\pi_1(\mathfrak{R})$ は $\mathrm{Aut}(H)$ の部分群と考えられる．$\pi_1(\mathfrak{R})$ の ι による逆像として得られる $SL_2(\boldsymbol{R})$ の部分群は Fuchs 群である．このとき Γ は楕円型の元も放物型の元も持たない．([岩澤] 参照．Riemann 面および genus の定義は §1.8 に述べる．)

例 3 $\Gamma=SL_2(\boldsymbol{Z})=\left\{\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\in SL_2(\boldsymbol{R}) \mid a,b,c,d\in\boldsymbol{Z}\right\}$ とする．$SL_2(\boldsymbol{Z})=M_2(\boldsymbol{Z})\cap SL_2(\boldsymbol{R})$ であり，$M_2(\boldsymbol{Z})$ は $M_2(\boldsymbol{R})$ の離散部分集合であるので $SL_2(\boldsymbol{Z})$ は $SL_2(\boldsymbol{R})$ の離散部分群となり Fuchs 群である．Γ および Γ の指数有限の部分群を modular 群と言う．この群については第4章で詳しく調べる．

例 4 A は $\boldsymbol{Q}$ 上の不定符号の四元数環とし，R は A の order であるとする．$A\otimes_{\boldsymbol{Q}}\boldsymbol{R}$ を $M_2(\boldsymbol{R})$ と同一視すると R は $M_2(\boldsymbol{R})$ の離散部分集合であるから，$\Gamma=R\cap SL_2(\boldsymbol{R})$ とすると Γ は Fuchs 群である．特に $A=M_2(\boldsymbol{Q})$，$R=M_2(\boldsymbol{Z})$ とすると例3を得る．(四元数環に関しては第5章に述べるが，更に詳しくは［土方2］を参照されたい．)

§1.6 基本領域

Γ が Fuchs 群であるとき，$\Gamma\backslash H$ を調べるのに $\Gamma\backslash H$ の点と1対1に対応する H の連結集合がとれれば便利である．そのような集合を H 内につくることを考える．少し条件を弱めて

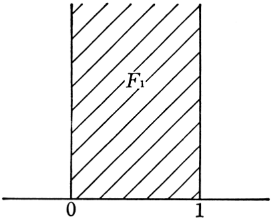
定義 H の連結集合 F が Fuchs 群 Γ の**基本領域** (fundamental domain) であるとは，

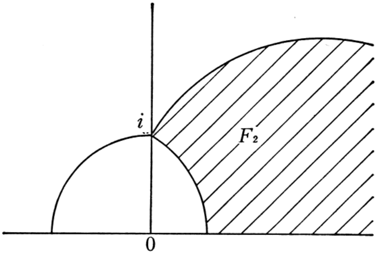
(i) $H=\bigcup_{\gamma\in\Gamma}\gamma F$, (ii) F の内点の集合を U とすると $F=\bar{U}$,

(iii) $\gamma\in\Gamma-Z(\Gamma)$ ならば $\gamma U\cap U=\phi$

が成り立つときに言う．

例えば $\Gamma_1=\left\{\begin{bmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \mid n\in\boldsymbol{Z}\right\}$, $\Gamma_2=\langle k_{\pi/3}\rangle$, $k_\theta=\begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$ とすると，Γ_1 および Γ_2 の基本領域 F_1 および F_2 として次頁の図のようなものがとれる．





Fuchs 群は常に基本領域を持つことを示そう．Γ の楕円点ではない H の1点 z_0 を固定し，$\gamma\in\Gamma-Z(\Gamma)$ に対して

$$F_\gamma=\{z\in H\,|\,d(z,z_0)\leqq d(z,\gamma z_0)\}$$

$$U_\gamma=\{z\in H\,|\,d(z,z_0)<d(z,\gamma z_0)\}$$

$$C_\gamma=\{z\in H\,|\,d(z,z_0)=d(z,\gamma z_0)\}$$

と定義する．系 1.4.2 (1) により C_γ は H の測地線である．

補題 1.6.1 M が H の compact 集合であるとき，$\sharp\{\gamma\in\Gamma-\Gamma(Z)\,|\,M\cap C_\gamma\neq\phi\}<\infty$ である．

証明 $r(>0)$ に対して $M_r=\{z\in H\,|\,d(z,z_0)\leqq r\}$ とおく．z を $M_r\cap C_\gamma$ の元とすると $d(z_0,\gamma z_0)\leqq d(z,z_0)+d(z,\gamma z_0)\leqq 2r$ であるから $\gamma z_0\in M_{2r}$ である．M_{2r} は compact であるから，このような γz_0 の個数は有限個である．従って $M_r\cap C_\gamma\neq\phi$ となる γ の個数は有限個である．H の任意の compact 集合はある M_r に含まれるから補題は証明された． (証明終)

H の部分集合 F, U を

$$F=\bigcap_{\gamma\in\Gamma-Z(\Gamma)}F_\gamma=\{z\in H\,|\,d(z,z_0)\leqq d(z,\gamma z_0),\ \forall\gamma\in\Gamma\},$$
(1.6.1)
$$U=\bigcap_{\gamma\in\Gamma-Z(\Gamma)}U_\gamma=\{z\in H\,|\,d(z,z_0)<d(z,\gamma z_0),\ \forall\gamma\in\Gamma-Z(\Gamma)\}$$

と定義する．定義によって $\bar{U}\subset F$ である．H の各点 z の開近傍 V_z を $\bar{V}_z$ が compact であるようにとると

$$U=\bigcup_{z\in H}\bigcap_{\gamma\in\Gamma-Z(\Gamma)}(U_\gamma\cap V_z)$$

であるが，各 z に対して $C_\gamma\cap V_z\neq\phi$ となる γ は，補題 1.6.1 により有限

個であるから，U は開集合である．同様に

$$F=\bigcup_{z\in H}\bigcap_{\gamma\in\Gamma-Z(\Gamma)}(F_\gamma\cap\bar{V}_z)$$

で各 $z\in H$ を固定すると，$C_\gamma\cap\bar{V}_z\neq\phi$ となる γ は有限個だから $F=\bigcup_z\overline{\bigcap_\gamma U_\gamma\cap V_z}$ $\subset\bar{U}$ となり，よって $F=\bar{U}$ を得る．この F が Γ の基本領域であることを示そう．$\gamma\neq\pm1$ とし $U\cap\gamma U=\phi$ と仮定する．$U\cap\gamma U\ni z_1$ とすると $z_1\in\gamma U$ だから $d(\gamma^{-1}z_1, z_0)<d(\gamma^{-1}z_1, \gamma^{-1}z_0)=d(z_1, z_0)$ であるが，これは $z_1\in U$ に矛盾するので $U\cap\gamma U=\phi$ $(\gamma\neq\pm1)$ である．次に z_1 を H の任意の点とするとき，Γ は Fuchs 群だから，$\{\gamma z_0|\gamma\in\Gamma\}$ は H において集積点を持たないので，$\{d(z_1,\gamma z_0)|\gamma\in\Gamma\}$ には最小値が存在する．この最小値を与える Γ の元を γ_0 と書くと $d(z_1,\gamma_0 z_0)\leqq d(z_1,\gamma z_0)$ が任意の $\gamma\in\Gamma$ に対して成り立つので，$z_1\in\gamma_0 F$ である．以上により，次の定理の前半が示された．

定理 1.6.2 (1.6.1) で定義された H の部分集合 F は Γ の基本領域である．更に上の記号の下で，F は次の（1）（2）（3）を満たす．

（1） F の２点を結ぶ測地線は F に含まれる．

（2） $\gamma\in\Gamma-Z(\Gamma)$ に対し，$L_\gamma=F\cap\gamma F$ とする．$L_\gamma\subset C_\gamma$ で $L_\gamma\neq\phi$ なら L_γ は１点または測地線である．

（3） H の 任意の compact 部分集合 M に対し，$\sharp\{\gamma\in\Gamma|M\cap\gamma F\neq\phi\}<\infty$．

証明 F_γ の２点を結ぶ測地線は明らかに F_γ に含まれる．$F=\cap F_\gamma$ であるから，F の２点を結ぶ測地線は F に含まれる．（2）は（1）により明らかである．（3）を示すには M は連結であると仮定して差支えない．更に $\gamma_0\in\Gamma$ とすると，$\sharp\{\gamma\in\Gamma|M\cap\gamma F\neq\phi\}=\sharp\{\gamma\in\Gamma|\gamma_0 M\cap\gamma F\neq\phi\}$ であるから，必要なら M の代わりに $\gamma_0 M$ をとることにして，$M\cap F\neq\phi$ としてよい．このとき $M\cap\gamma F\neq\phi$ $(\gamma\notin Z(\Gamma))$ なら $M\cap C_\gamma\neq\phi$ である．よって補題 1.6.1 により $\sharp\{\gamma\in\Gamma|M\cap\gamma F\neq\phi\}<\infty$ である． (証明終)

$\gamma\in\Gamma-Z(\Gamma)$ とする．$L_\gamma=F\cap\gamma F$ が空でも，１点でもないときに L_γ を F の辺であると言う．F の境界は F の辺からなる．F の相異なる２辺 L および L' は $L\cap L'=\phi$ または $L\cap L'=\{１点\}$ である．F の相異なる２辺の共有点となる点を F の ***H* 内の頂点**と言う．$z\in H$ が $L\cap L'=\{z\}$ となる F

の H 内の頂点であるとき L と L' のなす角を z における F の内角と言う．定理 1.6.2（1）により F の H 内の頂点における内角は π より小さい．F の2辺 L, L' は $L=L'$ であるか F の相異なる辺 $L_1, \cdots, L_n$ が存在して

$$L=L_1,\ L'=L_n \text{ で且つ } L_\nu \cap L_{\nu+1} \neq \phi \quad (1 \leqq \nu \leqq n-1)$$

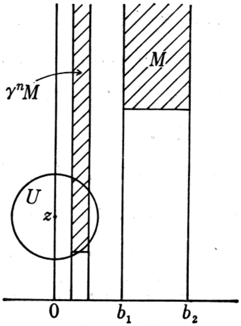
のときに，L と L' は繋がっていると言い，$L \sim L'$ と表わすことにする．F の辺 L を1つ固定したときに L と繋っている辺の和

$$\bigcup_{L' \sim L} L'$$

を F の境界の連結成分と言う．また F の辺 L が端点を持たないときにも，L は実軸に直交する円または直線の一部であるから，L を延長したものが $\boldsymbol{R} \cup \{\infty\}$ と交わるときに，その交点を便宜上 F の $\boldsymbol{R} \cup \{\infty\}$ 上の頂点とか L の端点と言うことにする．

補題 1.6.3 F は定理 1.6.2 における Γ の基本領域であるとする．$\boldsymbol{R} \cup \{\infty\}$ 上にある F の頂点 x が F の2つの辺の端点で，且つ或る scalar でない元 $\gamma(\in \Gamma)$ の固定点なら x は Γ の cusp である．

証明 仮定により，γ は双曲型か放物型のいずれかである．γ が双曲型であると仮定して矛盾を導く．先ず補題 1.3.2（3）により，$x=\infty$ で $0, \infty$ が γ の固定点であるとして差支えない．このときには，$\gamma = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{bmatrix}$ $(a, d \in \boldsymbol{R},\ a \neq d)$ である．F の辺は測地線であるから，実数 $b_1 < b_2$ が存在して，$x=\infty$ を端点とする F の2辺は直線 $\mathrm{Re}(z)=b_1$ および $\mathrm{Re}(z)=b_2$ 上にある．$c>0$ を十分大きくとると $M=\{z \mid \mathrm{Im}(z) \geqq c,\ b_1 \leqq \mathrm{Re}(z) \leqq b_2\} \subset F$ である．虚軸上の1点を z とし，U を z の近傍で $\bar{U}$ が compact なものとすると，無限に多くの $n(\in \boldsymbol{Z})$ に対し $U \cap \gamma^n F \supset U \cap \gamma^n M (\neq \phi)$ である．これは定理 1.6.2（3）に矛盾する．（証明終）



§1.7　商空間 $\Gamma\backslash H^*$

群 G が位相空間 X に作用しているとする．商空間 $G\backslash X$ が Hausdorff になる条件から始めよう．

補題 1.7.1　群 G が位相空間 X に作用しているとする．X の任意の2点 x, y に対して，x の近傍 U と y の近傍 V で G の元 g に対し

$$gU\cap V\neq\phi \Longleftrightarrow gx=y$$

が成り立つようなものが存在すれば，$G\backslash X$ は Hausdorff である．

証明　X から $G\backslash X$ への自然な写像を π とする．$G\backslash X$ の位相の定義により $\pi(U)$, $\pi(V)$ は $\pi(x)$, $\pi(y)$ の近傍であり，"$\pi(U)\cap\pi(V)\neq\phi \Longleftrightarrow {}^{\exists}g\in G,\ gU\cap V\neq\phi$" であるから "$\pi(x)=\pi(y) \Longleftrightarrow {}^{\exists}g\in G,\ gx=y \Longleftrightarrow {}^{\exists}g\in G,\ gU\cap V\neq\phi \Longleftrightarrow \pi(U)\cap\pi(V)\neq\phi$" となり，$G\backslash X$ は Hausdorff である．

(証明終)

補題 1.7.2　群 Γ が Hausdorff な位相空間 X に不連続に作用しているならば，$\Gamma\backslash X$ は Hausdorff である．

証明　x, y が X の任意の2点であるとする．仮定により x の近傍 U_0, y の近傍 V_0 で $\sharp\{\gamma\in\Gamma\,|\,\gamma U_0\cap V_0\neq\phi\}<\infty$ なるものが存在する．$\gamma U_0\cap V_0\neq\phi$ なる Γ の元を $\gamma_1,\cdots,\gamma_m$ とする．適当に順序を入れ替えて

$$\gamma_k x=y\quad(1\leqq k\leqq l),\qquad \gamma_k x\neq y\quad(l+1\leqq k\leqq m)$$

としてよい．$\gamma_k x\neq y\,(l+1\leqq k\leqq m)$ であるから $\gamma_k x$, y の近傍 W_k, V_k を $W_k\cap V_k=\phi$ にとることが出来る．

$$U=U_0\cap\gamma_{l+1}^{-1}W_{l+1}\cap\cdots\cap\gamma_m^{-1}W_m,\qquad V=V_0\cap V_{l+1}\cap\cdots\cap V_m$$

とすると，U, V は x, y の近傍で $\gamma U\cap V\neq\phi \Longleftrightarrow \gamma\in\{\gamma_1,\cdots,\gamma_l\} \Longleftrightarrow \gamma x=y$ が成り立つ．　(証明終)

この補題により，Γ を Fuchs 群とすれば商空間 $\Gamma\backslash H$ は Hausdorff である．我々の目的とする Fuchs 群 Γ に関して保型性を持つ函数が，重要な性質を有するためには，Γ に関する保型性が H 上の函数の中で非常に特別なものである必要がある．そのためには Fuchs 群 Γ は十分に大きい必要がある．また保型性を持つ函数を調べるのに $\Gamma\backslash H$ が compact であるか，適当にうまく

compact 化出来る場合には良く知られた compact な Riemann 面の理論を適用して色々調べることができる．compact 化の準備として先ず H に Γ の cusp を付け加えることから始める．Γ の cusp 全体の集合を P_Γ とし

(1.7.1) $$H^*=H^*_\Gamma=H\cup P_\Gamma$$

とおく．もし Γ が cusp を持たなければ $H^*=H$ である．H^* に位相を入れるために正数 l に対し

(1.7.2) $$U_l=\{z\in H\,|\,\mathrm{Im}(z)>l\},\quad U^*_l=U_l\cup\{\infty\}$$

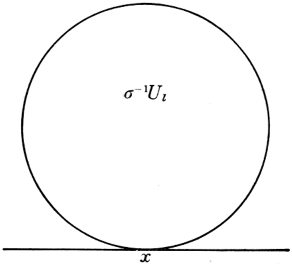
とおく．H^* に次のように位相を定義する．

1° $z\in H$ ならば z の H^* における基本近傍系として，z の H における近傍系をとる．

2° $x\in P_\Gamma$ ならば $\sigma\in SL_2(\boldsymbol{R})$ を $\sigma x=\infty$ にとり x の基本近傍系として

$$\{\sigma^{-1}U^*_l\,|\,l>0\}$$

をとる．



H^* は定義により明らかに Hausdorff 空間である．$\sigma=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ とすると，$x=-d/c$ であり

$$\sigma^{-1}U_l=\{z\in H\,|\,\mathrm{Im}(z)/|cz+d|^2>l\}$$

は点 x で実軸に接する半径 $c^{1/2}/2l$ の円の内部である．$x\in P_\Gamma$ のとき便宜上 $U_x=\sigma^{-1}U_l$ を x の H における近傍と言うことにする．Γ の作用は円および直線を円または直線に写像する等角写像であるから，Γ は位相空間 H^* に作用する．よって商空間 $\Gamma\backslash H^*$ が定義され，$\Gamma\backslash H$ は自然な対応で $\Gamma\backslash H^*$ の部分空間とみなせる．Γ が cusp を持たなければ $\Gamma\backslash H^*=\Gamma\backslash H$ である．$\Gamma\backslash H^*$ が Hausdorff であることを示そう．

補題 1.7.3 [清水] ∞ が Γ の cusp であると仮定する．$\Gamma_\infty\cdot\{\pm 1\}=\left\{\pm\begin{bmatrix} 1 & mh \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\middle|\, m\in\boldsymbol{Z}\right\}$ とすると，Γ の元 $\gamma=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ に対し

$$\gamma\in\Gamma_\infty\Longleftrightarrow|ch|<1$$

である．

証明 $\Longrightarrow$ は自明であるから，$\Longleftarrow$ を示す． $|ch|<1$ とする．$\Gamma\cdot\{\pm 1\}$ の元 $\{\gamma_n|n\geqq 0\}$ を $\gamma_0=\gamma$, $\gamma_{n+1}=\gamma_n\begin{bmatrix}1 & h\\ 0 & 1\end{bmatrix}\gamma_n^{-1}$ でもって帰納的に定義する．$\gamma_n=\begin{bmatrix}a_n & b_n\\ c_n & d_n\end{bmatrix}$ とすると

$$a_{n+1}=1-a_n(c_nh),\ b_{n+1}=a_n^2h,\quad c_{n+1}=-c_n^2h,\ d_{n+1}=1+a_n(c_nh)$$

である．よって $n\geqq 1$ ならば $c_n=-c(ch)^{2^n-1}$ 且つ $|a_n|\leqq|a|+n$．従って

$$|a_{n+1}-1|=|d_{n+1}-1|=|a_n||c_nh|<(|a|+n)|ch|^{2^n}$$

となり $\{\gamma_n\}$ は $\begin{bmatrix}1 & h\\ 0 & 1\end{bmatrix}$ に収束するが，Γ は離散的であるから $\gamma_n=\begin{bmatrix}1 & h\\ 0 & 1\end{bmatrix}$ となる n が存在する．従って $c=c_n=0$ でなければならないことがわかる．

(証明終)

補題 1.7.4 x_1, x_2 は Γ の cusp であるとし，$\sigma_1, \sigma_2\in SL_2(\boldsymbol{R})$ は $\sigma_1x_1=\sigma_2x_2=\infty$ なる元であるとする． $\sigma_i\Gamma_{x_i}\sigma_i^{-1}\cdot\{\pm 1\}=\left\{\pm\begin{bmatrix}1 & mh_i\\ 0 & 1\end{bmatrix}\middle| m\in\boldsymbol{Z}\right\}$ $(i=1,2)$ とする．l_1, l_2 を $l_1l_2>|h_1h_2|$ なる正数とすると，$\gamma\in\Gamma$ に対して

$$\gamma\sigma_1^{-1}U_{l_1}\cap\sigma_2^{-1}U_{l_2}\neq\phi\Longleftrightarrow\gamma x_1=x_2$$

が成り立つ．

証明 $\Longleftarrow$ は明らかである．$\Longrightarrow$ を示そう． $\gamma\sigma_1^{-1}U_{l_1}\cap\sigma_2^{-1}U_{l_2}\neq\phi$ と仮定する．そこで $\delta=\sigma_2\gamma\sigma_1^{-1}$ とおくと $\delta U_{l_1}\cap U_{l_2}\neq\phi$ である．$\delta^{-1}=\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}$ とおく．$z\in\delta U_{l_1}\cap U_{l_2}$ とすると

$$l_1l_2<\mathrm{Im}(\delta^{-1}z)\mathrm{Im}(z)=\mathrm{Im}(z)^2/|cz+d|^2$$

だから $c^2l_1l_2\leqq 1$ である．今 $\gamma_1\in\Gamma\cdot\{\pm 1\}$ が $\sigma_1\gamma_1\sigma_1^{-1}=\begin{bmatrix}1 & h_1\\ 0 & 1\end{bmatrix}$ なる元であるとすれば

$$\delta\begin{bmatrix}1 & h_1\\ 0 & 1\end{bmatrix}\delta^{-1}=(\sigma_2\gamma\sigma_1^{-1})(\sigma_1\gamma_1\sigma_1^{-1})(\sigma_1\gamma^{-1}\sigma_2^{-1})=\sigma_2\gamma\gamma_1\gamma^{-1}\sigma_2^{-1}\in\sigma_2\Gamma\sigma_2^{-1}\cdot\{\pm 1\}$$

となるので，$\delta\begin{bmatrix}1 & h_1\\ 0 & 1\end{bmatrix}\delta^{-1}=\begin{bmatrix}a_1 & b_1\\ c_1 & d_1\end{bmatrix}$ と書くと，$c_1=-c(ch_1)$ であるから

$$|c_1h_2|=|c^2h_1h_2|<c^2l_1l_2\leqq 1$$

を得る. よって補題1.7.3における Γ, γ として $\sigma_2\Gamma\sigma_2^{-1}\cdot\{\pm 1\}$, $\gamma=\delta\begin{bmatrix}1 & h_1\\ 0 & 1\end{bmatrix}\delta^{-1}$ をとることにより $c_1=0$, 従って $c=0$ を得る. すなわち $\gamma x_1=x_2$ である.

(証明終)

特に $x_1=x_2$ とすると次の系を得る.

系 1.7.5 x は Γ の cusp であるとする. $\sigma\in SL_2(\boldsymbol{R})$ を $\sigma x=\infty$ なる元, h を $\sigma\Gamma_x\sigma^{-1}\cdot\{\pm 1\}=\left\{\pm\begin{bmatrix}1 & mh\\ 0 & 1\end{bmatrix}\middle| m\in\boldsymbol{Z}\right\}$ なる正数とすると, $l>h$ ならば

$$\gamma\sigma^{-1}U_l\cap\sigma^{-1}U_l\neq\phi \Longleftrightarrow \gamma\in\Gamma_x$$

である.

補題 1.7.6 Γ の cusp x に対して, $\sigma\in SL_2(\boldsymbol{R})$ を $\sigma x=\infty$ なる元であるとする. H の任意の compact 集合 M に対し, 任意の$\gamma\in\Gamma$ について

$$M\cap\gamma\sigma^{-1}U_l=\phi$$

となる正数 l が存在する.

証明 "$M\cap\gamma\sigma^{-1}U_l\neq\phi \Longleftrightarrow \sigma M\cap\sigma\gamma\sigma^{-1}U_l\neq\phi$" であるから, Γ の代わりに $\sigma\Gamma\sigma^{-1}$ をとることにより $x=\infty$, $\sigma=1$ のときに帰着される. $\Gamma_\infty\cdot\{\pm 1\}=\left\{\pm\begin{bmatrix}1 & mh\\ 0 & 1\end{bmatrix}\middle| m\in\boldsymbol{Z}\right\}$ とする. $\gamma\in\Gamma_\infty$ ならば $\gamma U_l=U_l$ であり, $\gamma\notin\Gamma_\infty$ ならば $\gamma U_l\subset\{z\in H|\,\mathrm{Im}(z)<h^2/l\}$ であるから lを$M\subset\{z\in H|\,h^2/l<\mathrm{Im}(z)<l\}$ にとればよい.

(証明終)

補題 1.7.7 $\Gamma\backslash H^*$ は Hausdorff である.

証明 補題 1.7.2, 1.7.6, 1.7.4 を, それぞれ (i) x, $y\in H$, (ii) $x\in H$, $y\in P_\Gamma$, (iii) x, $y\in P_\Gamma$ の場合に適用すれば補題1.7.1 の条件が確かめられる.

(証明終)

H^* から $\Gamma\backslash H^*$ への自然な写像を π または π_Γ と書く. $z\in H^*$ が Γ の楕円点および cusp であるに従い $\boldsymbol{a}=\pi(z)\in\Gamma\backslash H^*$ も楕円点および cusp と呼ぶことにする. $\Gamma\backslash H^*$ の楕円点および cusp でない点を**通常点** (ordinary point) と言う.

定理 1.7.8 $\Gamma\backslash H^*$ が compact ならば, $\Gamma\backslash H^*$ の楕円点および cusp は有限個である.

証明 $\Gamma\backslash H^*$ の任意の点を $\boldsymbol{a}=\pi(z)$ とする. 補題 1.7.7 の証明で見たよう

に，Γ, H^* は補題 1.7.1 の条件を満たしているから z の近傍 U を“$\gamma U\cap U\neq\phi \Longleftrightarrow \gamma z=z$”にとることができる．$\pi(U)$ は $\Gamma\backslash H^*$ の近傍であるが，作り方から $\pi(U)-\{\boldsymbol{a}\}$ は楕円点も cusp も含まない．$\Gamma\backslash H^*$ は compact であるので有限個の $\pi(U)$ で覆われるから，$\Gamma\backslash H^*$ の楕円点も cusp も有限個しか存在しない．　(証明終)

定義　Fuchs 群 Γ が第1種の Fuchs 群であるとは，$\Gamma\backslash H^*$ が compact であるときに言う．

§1.8　$\Gamma\backslash H^*$ の Riemann 面の構造

1次元の複素多様体を **Riemann 面**と言う．$\Gamma\backslash H^*$ に Riemann 面の構造を入れよう．そのために Riemann 面の定義を念のために述べておく．

連結な位相空間 $\mathfrak{R}$ に対して，$\mathfrak{R}$ の開集合 V_α と V_α から連結な複素領域への位相同型な写像 t_α の組 (V_α, t_α) からなる集合 $\{(V_\alpha, t_\alpha)\}$ が次の条件 (i), (ii) を満たすときに，$\mathfrak{R}$ の(複素)座標系と言う．

(i)　$\mathfrak{R}=\bigcup_\alpha V_\alpha$ である．

(ii)　$V_\alpha\cap V_\beta\neq\phi$ ならば $t_\beta t_\alpha^{-1}$ は $t_\alpha(V_\alpha\cap V_\beta)$ から $t_\beta(V_\alpha\cap V_\beta)$ への正則写像である．

このとき V_α を $\mathfrak{R}$ の座標近傍，t_α を V_α における局所座標と言う．$\mathfrak{R}$ の2つの座標系 $\{(V_\alpha, t_\alpha)\}$ および $\{(V'_\beta, t'_\beta)\}$ は $\{(V_\alpha, t_\alpha)\}\cup\{(V'_\beta, t'_\beta)\}$ が再び $\mathfrak{R}$ の座標系となるときに同値であると言う．$\mathfrak{R}$ に座標系の同値類が与えられたとき $\mathfrak{R}$ を Riemann 面と言う．

例　Riemann 球面 $\boldsymbol{P}=\boldsymbol{C}\cup\{\infty\}$ は $V_1=\boldsymbol{C}$, $t_1(z)=z$, $V_2=\boldsymbol{P}-\{0\}$, $t_2(z)=1/z$ とすることにより Riemann 面である．また $\boldsymbol{C}$ の連結領域は Riemann 面である．

さて Γ が Fuchs 群であるとき，$\Gamma\backslash H^*$ に Riemann 面の構造を入れよう．$\boldsymbol{a}\in\Gamma\backslash H^*$ とし z_0 を $\pi(z_0)=\boldsymbol{a}$ となる H^* の点とする．

1°　$\boldsymbol{a}$ が通常点であるとする．このとき z_0 の近傍 U を $U\subset H$ で且つ

$$\gamma U\cap U\neq\phi \Longleftrightarrow \gamma\in Z(\Gamma) \tag{1.8.1}$$

であるようにとることができる．今 $V_{\boldsymbol{a}}=\pi(U)$ とおくと，$V_{\boldsymbol{a}}$ は $\boldsymbol{a}$ の近傍で

(1.8.1) により U と V_a は π によって位相同型である．よって V_a から $\boldsymbol{C}$ への写像 t_a をこの逆写像，即ち $t_a: V_a \longrightarrow U$ で $t_a\circ\pi(z)=z$ $(z\in U)$ なるものにとる．

2° $\boldsymbol{a}$ が楕円点であるとする．$\rho\in SL_2(\boldsymbol{C})$ を $\rho z_0=0$, $\rho H=K$ となる元とし，正数 r に対して $W_r=\{z\in\boldsymbol{C}|\ |z|<r\}$ とおく．r を十分小さくとると，z_0 の近傍 $U=\rho^{-1}W_r$ は

$$\gamma U\cap U\neq\phi \Longleftrightarrow \gamma\in\Gamma_{z_0} \tag{1.8.2}$$

を満たす．U は Γ_{z_0} の作用で不変であるから $\Gamma_{z_0}\backslash U$ が定義できて，(1.8.2) により $V_a=\pi(U)$ は $\Gamma_{z_0}\backslash U$ と位相同型であり，更に $\Gamma_{z_0}\backslash U$ は $\rho\Gamma_{z_0}\rho^{-1}\backslash W_r$ と ρ により位相同型である．さて W_r 上の函数 φ を

$$\varphi(z)=z^e \qquad (e=|\Gamma_{z_0}/Z(\Gamma)|)$$

と定義する．φ は原点のまわりの角度が $2\pi/e$ の回転で不変であるから，$\rho\Gamma_{z_0}\rho^{-1}\backslash W_r$ 上の函数 φ_1 を引き起こす．明らかに φ_1 は $\rho\Gamma_{z_0}\rho\backslash W_r$ と W_{r^e} の位相同型を引き起こす．以上により次の図式は可換であり，下段の "$\longrightarrow$" は位相同型である．

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & U & \xrightarrow{\ \rho\ } & W_r & & \\
 & \overset{\pi}{\swarrow} & \downarrow & & \downarrow & \overset{\varphi}{\searrow} & \\
V_a=\pi(U) & \longrightarrow & \Gamma_{z_0}\backslash U & \longrightarrow & \rho\Gamma_{z_0}\rho^{-1}\backslash W_r & \xrightarrow{\ \varphi_1\ } & W_{r^e}
\end{array}$$

そこで V_a から $\boldsymbol{C}$ への写像 t_a を，上の図式から得られるもの，即ち V_a から W_{r^e} への位相同型で

$$t_a\circ\pi(z)=(\rho z)^e \qquad (z\in U)$$

となるもので定義する．

3° 最後に $\boldsymbol{a}$ が cusp であるとする．σ を $\sigma z_0=\infty$ となる $SL_2(\boldsymbol{R})$ の元とする．正数 l に対して $U_l=\{z\in H|\mathrm{Im}(z)>l\}$, $U_l^*=U_l\cup\{\infty\}$ とする．更に $U=\sigma^{-1}U_l$, $U^*=\sigma^{-1}U_l^*$ とおく．l を十分大きくとると系 1.7.5 により

$$\gamma U^*\cap U^*\neq\phi \Longleftrightarrow \gamma\in\Gamma_{z_0}$$

である．1°, 2° と同様に $V_a=\pi(U^*)$ は $\Gamma_{z_0}\backslash U^*$ と位相同型で $\Gamma_{z_0}\backslash U^*$ は

$\sigma\Gamma_{z_0}\sigma^{-1}\backslash U_l^*$ と位相同型である．そこで $\sigma\Gamma_{z_0}\sigma^{-1}\cdot\{\pm 1\}=\left\{\pm\begin{bmatrix}1 & mh\\ 0 & 1\end{bmatrix}\middle| m\in\boldsymbol{Z}\right\}$ となる $h>0$ をとり U_l^* 上の函数 ψ を

$$\psi(z)=\begin{cases} e^{2\pi iz/h} & (z\in U_l)\\ 0 & (z=\infty)\end{cases}$$

と定義する．U_l^* の定義により ψ は連続な開写像である．W_r を 2° と同様とすると，ψ は $\sigma\Gamma_{z_0}\sigma^{-1}$ の作用で不変であるから，$\sigma\Gamma_{z_0}\sigma^{-1}\backslash U_l^*$ から W_r $(r=e^{-2\pi l/h})$ への写像 ψ_1 を引き起こす．ψ_1 は1対1で，ψ が連続な開写像であることから，$\sigma\Gamma_{z_0}\sigma^{-1}\backslash U_l^*$ と W_r の位相同型である．以上により，次のような可換な図式が得られた．

$$\begin{array}{ccccccc} & & U^* & \xrightarrow{\ \sigma\ } & U_l^* & & \\ & \swarrow^{\pi} & \downarrow & & \downarrow & \searrow^{\psi} & \\ V_{\boldsymbol{a}}=\pi(U^*) & \longrightarrow & \Gamma_{z_0}\backslash U^* & \longrightarrow & \sigma\Gamma_{z_0}\sigma^{-1}\backslash U_l^* & \xrightarrow{\ \psi_1\ } & W_r.\end{array}$$

よって，$t_{\boldsymbol{a}}$ を上の図式における位相同型 $V_{\boldsymbol{a}}\longrightarrow W_r$ でもって定義する．即ち

$$t_{\boldsymbol{a}}\cdot\pi(z)=\begin{cases} e^{2\pi i\sigma z/h} & (z\in U)\\ 0 & (z=z_0)\end{cases}$$

である．

以上によって得られた $\{(V_{\boldsymbol{a}},t_{\boldsymbol{a}})\}$ が $\Gamma\backslash H^*$ の複素座標系になること，およびこうして得られた $\Gamma\backslash H^*$ の Riemann 面の構造が，$\pi(z_0)=\boldsymbol{a}$ となる z_0 のとり方および 2° における $\boldsymbol{\rho}$，3° における σ のとり方によらないことは容易にわかる．こうして $\Gamma\backslash H^*$ に Riemann 面の構造が入った，$\Gamma\backslash H^*$ にこの Riemann 面の構造を入れたものを以下 $\mathfrak{R}_\Gamma$ と書くことにする．$\mathfrak{R}_\Gamma$ の点 $\boldsymbol{a}$ に対して $\pi(z_0)=\boldsymbol{a}$ なる点 z_0 をとって

$$e_{\boldsymbol{a}}=|\Gamma_{z_0}/Z(\Gamma)|$$

とおく．右辺は自然数または ∞ であるが，z_0 のとり方によらないことは明らかである．$e_{\boldsymbol{a}}$ を $\boldsymbol{a}$ の分岐指数と言う．

定理 1.8.1　$\Gamma\backslash H$ が compact ならば，Γ は cusp を持たない．

証明 $\Gamma\backslash H$ が compact で且つ Γ が cusp x を持つと仮定する．$\boldsymbol{a}=\pi(x)\in\Gamma\backslash H^*$ とすると上の考察により，$\boldsymbol{a}$ の近傍 $V_{\boldsymbol{a}}$ は適当な正数 r に対し，$\bar{V}_{\boldsymbol{a}}\cap\Gamma\backslash H=\bar{V}_{\boldsymbol{a}}-\{\boldsymbol{a}\}\cong\{z\in\boldsymbol{C}\,|\,0<|z|\leqq r\}$ ととることができる．ここで $\bar{V}_{\boldsymbol{a}}$ は $V_{\boldsymbol{a}}$ の閉包である．$\bar{V}_{\boldsymbol{a}}\cap\Gamma\backslash H$ は $\Gamma\backslash H$ の閉部分集合であるから，compact でなければならないが，$\{z\in\boldsymbol{C}\,|\,0<|z|\leqq r\}$ は compact ではないからこれは矛盾である．よって Γ は cuspを持たない． (証明終)

さて Γ が第1種の Fuchs 群ならば（第2章以下で考えるのはこのときである），$\mathfrak{R}_\Gamma$ は compact な Riemann 面である．compact な Riemann 面について後で必要とする事柄を簡単にまとめておく．証明および更に詳しいことは [岩澤] を参照されたい．

Riemann 面 $\mathfrak{R}$ に対して，$\{(V_\alpha, t_\alpha)\}$ は $\mathfrak{R}$ の座標系であるとする．V_α で定義された函数 φ が正則 (holomorphic) または有理型 (meromorphic) であるとは，$\varphi\circ t_\alpha^{-1}$ が $t_\alpha(V_\alpha)$ で正則または有理型のときに言う．明らかに，この定義は t_α のとり方によらずに決まる．$\boldsymbol{a}\in V_\alpha$ とする．V_α で定義された有理型函数は $t_\alpha(\boldsymbol{a})$ の近傍で

$$\varphi\circ t_\alpha^{-1}(z)=\sum_{n=l}^{\infty}a_n(z-t_\alpha(\boldsymbol{a}))^n \qquad (a_l\neq 0)$$

と Laurent 展開される．このとき

(1.8.3) $$\nu_{\boldsymbol{a}}(\varphi)=l$$

と書き φ の $\boldsymbol{a}$ における位数と言う．$\nu_{\boldsymbol{a}}(\varphi)\geqq 0$, $\nu_{\boldsymbol{a}}(\varphi)>0$, $\nu_{\boldsymbol{a}}(\varphi)<0$ に従って φ は $\boldsymbol{a}$ で正則である，零点を持つ，極を持つと言う．即ち φ が $\boldsymbol{a}$ で正則である，零点を持つ，極を持つとは各々 $\varphi\circ t_\alpha^{-1}$ が $t_\alpha(\boldsymbol{a})$ で正則である，零点を持つ，極を持つことである．以上の定義は明らかに t_α のとり方によらない．$\mathfrak{R}$ 上の函数 φ が正則または有理型であるとは，φ を各 V_α に制限したときに各々正則または有理型であるときに言う．$K(\mathfrak{R})$ で $\mathfrak{R}$ の有理型函数全体を表わす．$\mathfrak{R}$ が compact ならば最大値の原理により $\mathfrak{R}$ の正則函数は定数以外には存在しない，また $K(\mathfrak{R})$ は $\boldsymbol{C}$ 上1変数の代数函数体である．$K(\mathfrak{R})$ を単に $\mathfrak{R}$ の函数体と言う．以下 $\mathfrak{R}$ は compact であるとする．$K(\mathfrak{R})$ の定数

でない元 φ の零点および極の個数は有限個であるから

$$n_0(\varphi)=\sum_{\nu_a(\varphi)>0}\nu_a(\varphi),\qquad n_\infty(\varphi)=\sum_{\nu_a(\varphi)<0}|\nu_a(\varphi)|$$

と定義出来るが，このときに

$$[K(\mathfrak{R}):\boldsymbol{C}(\varphi)]=n_0(\varphi)=n_\infty(\varphi) \tag{1.8.4}$$

となることが知られる．

$\mathfrak{R}$, $\mathfrak{R}'$ は compact な Riemann 面であるとし，$\mathfrak{R}'$ から $\mathfrak{R}$ への写像を F とする．$\{(V_\alpha, t_\alpha)\}$ および $\{(V_\beta', t_\beta')\}$ を $\mathfrak{R}$ および $\mathfrak{R}'$ の座標系とする．F が $\mathfrak{R}'$ から $\mathfrak{R}$ への複素解析的写像であるとは，$F(V_\beta')\cap V_\alpha\neq\phi$ のときに $t_\alpha\circ F\circ t_\beta'^{-1}$ が $t_\beta(V_\beta'\cap F^{-1}(V_\alpha))$ で正則のときに言う．よって，特に $\mathfrak{R}$ 上の有理型函数とは $\mathfrak{R}$ から Riemann 球面 $\boldsymbol{P}$ への複素解析的写像のことである．さて F は $\mathfrak{R}'$ から $\mathfrak{R}$ への複素解析的写像であるとする．F の像は1点でないとすると $\mathfrak{R}$ の開集合であるが，$\mathfrak{R}'$ が compact であるから $\mathfrak{R}$ の閉集合でもある．よって $F(\mathfrak{R}')=\mathfrak{R}$ である．このとき $(\mathfrak{R}', F)$ または F を省略して $\mathfrak{R}'$ を $\mathfrak{R}$ の covering であると言う．更に $F(\boldsymbol{b})\in V_\alpha$ のときに

$$e_{\boldsymbol{b},F}=\nu_{\boldsymbol{b}}(t_\alpha\circ F)$$

を $(\mathfrak{R}', F)$ の $\boldsymbol{b}$ における分岐指数または単に $\boldsymbol{b}$ の分岐指数と言う．$\mathfrak{R}'$ は compact であるから $e_{\boldsymbol{b},F}\neq 1$ となる $\mathfrak{R}'$ の元 $\boldsymbol{b}$ の個数は高々有限である．$\boldsymbol{a}\in\mathfrak{R}$ とし $F^{-1}(\boldsymbol{a})=\{\boldsymbol{b}_1,\cdots,\boldsymbol{b}_t\}$ とするとき

$$n=\sum_{i=1}^{t}e_{\boldsymbol{b}_i,F}$$

は $\boldsymbol{a}$ によらずに決まる自然数である．この n を covering $(\mathfrak{R}', F)$ の次数と言う．$\varphi\in K(\mathfrak{R})$ とすると $\varphi\circ F\in K(\mathfrak{R}')$ であるが，更に $\varphi\longmapsto\varphi\circ F$ は $K(\mathfrak{R})$ から $K(\mathfrak{R}')$ の中への同型を与える．このとき $K(\mathfrak{R})\circ F=\{\varphi\circ F\mid\varphi\in K(\mathfrak{R})\}$ と書くと

$$[K(\mathfrak{R}'):K(\mathfrak{R})\circ F]=n \tag{1.8.5}$$

である．(1.8.4) はこの特別な場合である．

最後に compact な Riemann 面 $\mathfrak{R}$ の Euler–Poincaré の標数を χ とするとき，g を

$$\chi=2g-2$$

で定義すると g は0または自然数である．この g を $\mathfrak{R}$ の **genus** と言う．$(\mathfrak{R}',F)$ が $\mathfrak{R}$ の covering ならば，$\mathfrak{R}'$ の genus を g' とすると **Hurwitz の公式**と呼ばれる次の関係式が成り立つ．

$$2g'-2=n(2g-2)+\sum_{\boldsymbol{b}\in\mathfrak{R}'}(e_{\boldsymbol{b},F}-1). \tag{1.8.6}$$

ここで n は covering の次数である．

§1.9 第1種の Fuchs 群

Γ は Fuchs 群（第1種とは限らぬ）であるとする．$\Gamma\backslash H^*$ の上に dv から引き起こされる測度を定義しよう．一般に局所 compact な位相空間 X 上の compact な台を持つ連続函数全体のなす空間を $C_c(X)$ とすると $C_c(X)$ 上の線型汎函数 M で $\varphi\geqq 0$ なる $C_c(X)$ の元に対しては $M(\varphi)\geqq 0$ となるものは X の測度を与える．$C_c(\Gamma\backslash H^*)$ 上の線型汎函数を定義しよう．$\varphi\in C_c(\Gamma\backslash H^*)$ とする．1の分割を用いることによって，φ の台は前節で Riemann 面の構造を定義するのに用いた近傍 $V_{\boldsymbol{a}}(\boldsymbol{a}\in\Gamma\backslash H^*)$ に含まれているとしてよい．以下前節と同じ記号を用いる．

1° $\boldsymbol{a}$ が通常点または楕円点であるとする．z_0 は $\pi(z_0)=\boldsymbol{a}$ となる H の点とし，U は $\pi(U)=V_{\boldsymbol{a}}$ となる z_0 の近傍とする．$\varphi\circ\pi$ は U 上で compact な台を持つ連続函数だから

$$M(\varphi)=\frac{1}{e_{\boldsymbol{a}}}\int_U\varphi\circ\pi(z)\frac{dxdy}{y^2}<\infty$$

と定義する．明らかに $M(\varphi)$ は z_0 のとり方によらない．

2° $\boldsymbol{a}$ が cusp であるとする．$x_0\in\boldsymbol{R}\cup\{\infty\}$ は $\pi(x_0)=\boldsymbol{a}$ となる Γ の cusp, $\sigma\in SL_2(\boldsymbol{R})$ は $\sigma x_0=\infty$ となる元であるとする．更に，$U^*=\sigma^{-1}U_l^*$ は $\pi(U^*)=V_{\boldsymbol{a}}$ となる x_0 の近傍であるとする．このとき $U_l'=\{z\in H|\ |\mathrm{Im}(z)|\geqq l,\ 0\leqq\mathrm{Re}(z)\leqq h\}$ とおくと，$\varphi\circ\pi(z)$ は U_l' 上で連続である．$M(\varphi)$ を

$$M(\varphi)=\int_{\sigma^{-1}U_l'}\varphi\circ\pi(z)\frac{dxdy}{y^2}$$

と定義する．$\varphi\circ\pi$ は $\sigma^{-1}U_l'$ で有界であるから，これが有限な値をとるため

には $\int_{\sigma^{-1}U_l'}\frac{dxdy}{y^2}$ が有限であればよい．$y^{-2}dxdy$ は $SL_2(\boldsymbol{R})$ の作用で不変であったから

$$\int_{\sigma^{-1}U_l'}\frac{dxdy}{y^2}=\int_{U_l'}\frac{dxdy}{y^2}$$

であるが，これは補題 1.4.4 により有限の値を持つ．$M(\varphi)$ が x_0 および σ のとり方によらぬことは明らかである．

この M で定義される測度でもって $\Gamma\backslash H^*$ の測度を定義する．この測度も dv で表わす．F を Γ の基本領域とすると，定義により

$$v(\Gamma\backslash H^*)=v(\Gamma\backslash H)=v(F)$$

となる．更に，A が H の可測集合ならば $\pi(A)$ も可測で

$$v(A)\geqq v(\pi(A))$$

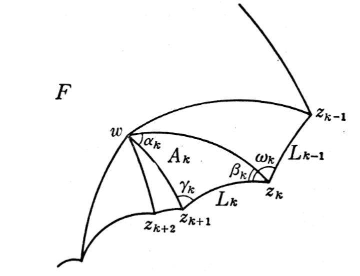
が成り立っている．

定理 1.9.1 (**Siegel**)　Γ が Fuchs 群であるとき

$$\Gamma \text{ が第1種である} \Longleftrightarrow v(\Gamma\backslash H^*)<\infty$$

が成り立つ．

証明　$\Longrightarrow$ は自明である．$\Longleftarrow$ を示す．定理 1.6.2 で与えた Γ の基本領域を F とし，F の内点 w を1つ固定する．C を F の境界の1つの連結成分とする．$\{L_k\}_{k=M}^{N}(-\infty\leqq M\leqq N\leqq\infty)$ は C 上にある辺全体の集合に，L_k と L_{k+1} とが隣り合うように番号を付けたものとする．もし C が閉曲線なら F は compact で，したがって $\Gamma\backslash H^*=\Gamma\backslash H=\pi_\Gamma(F)$ は compact である．次に C が閉曲線ではないとする．C 上の頂点および C の両端となる頂点に L_k の両端の点が $z_k, z_{k+1}(M\leqq k\leqq N)$



となるように記号を付ける（図参照）．w と z_k を測地線で結び w, z_k, z_{k+1} を頂点とする（測地線を辺とする）三角形を A_k とする．A_k の頂点 w, z_k, z_{k+1} における内角を各々 $\alpha_k, \beta_k, \gamma_k$ とする．$\omega_k=\gamma_{k-1}+\beta_k$ とおく．ω_k は点

z_k における F の内角である．補題 1.4.4 により A_k の測度は $v(A_k)=\pi-(\alpha_k+\beta_k+\gamma_k)$ であるから，$M\leqq m\leqq n\leqq N$ $(-\infty<m,\ n<\infty)$ とすると

$$(1.9.1)\quad \sum_{k=m}^{n} v(A_k)=\begin{cases}\displaystyle\sum_{k=m+1}^{n}(\pi-\omega_k)+(\pi-\beta_m-\gamma_n)-\sum_{k=m}^{n}\alpha_k & (m<n)\\ \pi-\alpha_m-\beta_m-\gamma_m & (m=n)\end{cases}$$

が成り立つ．もし $N<\infty$ ならば $z_{N+1}\in \boldsymbol{R}\cup\{\infty\}$ で $\gamma_N=0$ である．$N=\infty$ とすると $\{L_k\}$ のうち H の compact 部分集合と交わるものは有限個であるから，$\{z_k\}$ の部分列 $\{z_l\}$ で $d(w,z_l)\longrightarrow\infty\ (l\longrightarrow\infty)$ なるものがある．したがって，$d(w,z_k)<d(w,z_{k+1})$ なる k は $k\longrightarrow\infty$ のとき無限個存在する．そのような k に対しては $\beta_k\geqq\gamma_k$ で，したがって $\gamma_k\leqq\pi/2$ である*．同様にして $-\infty<M$ なら $\beta_M=0$ であり，$M=-\infty$ なら $\beta_K\leqq\dfrac{\pi}{2}$ なる k は $k\longrightarrow-\infty$ としたときに，無限個存在するから，(1.9.1) により

$$(1.9.2)\quad \sum_{k=M}^{N} v(A_k)\geqq\begin{cases}\displaystyle\sum_{k=M+1}^{N}(\pi-\omega_k)-\sum_{k=M}^{N}\alpha_k & (N>M)\\ \pi-\alpha_M & (N=M)\end{cases}$$

である．これは F のすべての境界の連結成分について成り立つから，辺々加え合わせると

$$(1.9.3)\quad v(F)+2\pi\geqq\sum_{\omega}(\pi-\omega)+\sum{}'\pi$$

となる．ここで ω は F の H 内の頂点の内角全体を動き，$\sum'$ は連結成分 C 自身が辺となる ($M=N$ となる) 境界の連結成分を動く．よって唯 1 つの辺からなる連結成分の個数は有限個であり，また任意の $\varepsilon>0$ に対して $\pi-\omega\geqq\varepsilon$ となる ω は有限個しかない．特に $\varepsilon=\pi/3$ とすると

(1.9.4) $\omega\leqq\dfrac{2\pi}{3}$ なる ω の個数は高々有限個である

ことがわかる．さて z が H 内にある F の 1 つの頂点であるとき，z と Γ

* Euclid 幾何学の場合と同様に，長い辺の対角の方が短い辺の対角より大きい．これを見るには，三角形を単位円盤内に写像し，更に $SU(1,1)$ の元で 1 つの頂点を原点に移してみれば容易である．

の作用で同値な F の頂点は有限個しかない．それを $z_1, \cdots, z_l$ とし，各点における F の内角を各々 $\omega_1, \cdots, \omega_l$ とすると

$$\omega_1 + \cdots + \omega_l = 2\pi/p \qquad (p = |\Gamma_z/Z(\Gamma)|)$$

である．$0<\omega_\nu<\pi$ $(1 \leqq \nu \leqq l)$ であるから，少くとも1つの ω_ν は $0<\omega_\nu \leqq 2\pi/3$ でなければならない．もし F の H 内の頂点が無限個あるならば，このことから F の頂点でその内角 ω が $0<\omega \leqq 2\pi/3$ なるものが無限に多く存在することになり (1.9.4) に矛盾する．よって F の H 内の頂点の数は有限個である．故に境界の連結成分の個数は有限で，各連結成分に含まれる辺の個数も有限である．よって(1.9.2)において等号が成り立つ．故に (1.9.3) において等号が成り立たないのは，α_k をすべての辺にわたってとった和が 2π にならないときである．このときは，w を通り長さが無限で互いに交わらない測地線が F 内に2本引ける．その2本の測地線の間の領域は F に含まれるから $v(F) = \infty$ となり矛盾する*．よって α_k の和は 2π である．言いかえると F の $\boldsymbol{R} \cup \{\infty\}$ 上の頂点は F の2本の辺の端点である．

F の $\boldsymbol{R} \cup \{\infty\}$ 上の任意の頂点を x とし，x が cusp であることを示す．x を端点とする F の1辺を L_1 とすると，定義により $\gamma_1 \in \Gamma$ が存在して

$$L_1 = F \cap \gamma_1 F$$

である．両辺に γ_1^{-1} を施すと $\gamma_1^{-1} L_1 = \gamma_1^{-1} F \cap F$ であるから，$\gamma_1^{-1} F$ は F の辺であり，$\gamma_1^{-1} x$ は F の $\boldsymbol{R} \cup \{\infty\}$ 上の頂点である．$x_1 = x$, $x_2 = \gamma_1^{-1} x_1$ とおく．x_2 を端点とする F の2辺を $\gamma_1^{-1} L_1$ および L_2 とする．上と同様に $\gamma_2 \in \Gamma$ が存在して $L_2 = F \cap \gamma_2 F$ であり，$x_3 = \gamma_2^{-1} x_2$ とおくと x_3 は F の $\boldsymbol{R} \cup \{\infty\}$ 上の頂点である．これを繰り返すと F の $\boldsymbol{R} \cup \{\infty\}$ 上の頂点の列 $\{x_k\}$ と Γ の元の列 $\{\gamma_k\}$ で，$\gamma_k^{-1} x_k = x_{k+1}$ となるものを得る．F の $\boldsymbol{R} \cup \{\infty\}$ の頂点は有限個であるから，自然数 m と n $(m<n)$ が存在して $x_m = x_n$ となる．従って $\gamma = \gamma_{n-1}^{-1} \cdots \gamma_m^{-1}$ とすると $\gamma x_m = x_m$ である．よって補題 1.6.3 により x_m は Γ の cusp であることがわかる．x は x_m と Γ の元で同値であるから，x

* 3頂点を $\boldsymbol{R} \cup \{\infty\}$ 上に持つ三角形（補題 1.4.4 により測度 π）が F の中に無限個作れるから $v(F) = \infty$ である．

も Γ の cusp である．以上により F の $\boldsymbol{R}\cup\{\infty\}$ 上の頂点はすべて cusp であることがわかった．

次に $\{x_1,\cdots,x_t\}$ を F の $\boldsymbol{R}\cup\{\infty\}$ 上の頂点とすると，Γ の任意の cusp は $\{x_1,\cdots,x_t\}$ に同値であることを示す．$U_\nu^*(1\leqq\nu\leqq t)$ を x_ν における近傍

$$U_\nu^*=\sigma^{-1}U_i^*,\qquad \sigma x_\nu=\infty$$

とすると，$F-\bigcup_{\nu=1}^{t}U_\nu^*$ は compact である．もしも Γ の cusp x が $\{x_\nu\}$ のいずれとも同値でないとすると，補題 1.7.6 および補題 1.7.4 により x の近傍 U^* を

$$\gamma U^*\cap(F-\bigcup_{\nu}U_\nu^*)=\phi,\qquad \gamma U^*\cap U_\nu^*=\phi\quad(1\leqq\nu\leqq t)$$

が任意の $\gamma\in\Gamma$ に成り立つようにとれるが，これは $H=\bigcup_{\gamma\in\Gamma}\gamma F$ に矛盾する．故に x は $\{x_\nu\}$ のいずれかと同値である．$\pi_\Gamma(U_\nu^*)$ の $\Gamma\backslash H^*$ における閉包は位相の定義により compact であり

$$\Gamma\backslash H^*=\pi_\Gamma(F-\bigcup_{\nu=1}^{t}U_\nu^*)\cup(\bigcup_{\nu=1}^{t}\pi_\Gamma(U_\nu^*))$$

であるから $\Gamma\backslash H^*$ は compact である． (証明終)

系 1.9.2 Γ が第1種の Fuchs 群であるとき，Γ の指数有限の部分群は第1種の Fuchs 群である．

証明 Γ の指数有限の部分群 Γ_1 について，$\Gamma=\coprod_{\nu=1}^{m}\Gamma_1\gamma_\nu$ とし，Γ の基本領域を F とする．$\pi_1:H\longrightarrow\Gamma_1\backslash H$ とすると $\pi_1(\bigcup_{\nu}\gamma_\nu F)=\Gamma_1\backslash H$ であるから

$$v(\Gamma_1\backslash H)\leqq\sum_{\nu=1}^{m}v(\gamma_\nu F)=mv(F)=mv(\Gamma\backslash H)<\infty$$

である． (証明終)

第2章　保　型　形　式

§2.1　保　型　形　式

α が $GL_2^+(\boldsymbol{R})$ の元であるならば，$j(\alpha, z)=(cz+d)$ は H 上の零点を持たない正則函数である．この $j(\alpha, z)$ は以降の議論において基本的であるので，§1.1 で考察したその性質を繰り返しておく．α, β は $GL_2^+(\boldsymbol{R})$ の元とし，$z\in H$ とすると

$$(2.1.1)\qquad j(\alpha\beta, z)=j(\alpha, \beta z)j(\beta, z),\quad j(\alpha^{-1}, z)=j(\alpha, \alpha^{-1}z)^{-1},$$

$$(2.1.2)\qquad \frac{d(\alpha z)}{dz}=\frac{\det(\alpha)}{j(\alpha, z)^2},$$

$$(2.1.3)\qquad \mathrm{Im}(\alpha z)=\frac{\mathrm{Im}(z)\det(\alpha)}{|j(\alpha, z)|^2}$$

であり，更に (2.1.1) により

$$(2.1.4)\quad j(\alpha, z)=\mathrm{const.}\ j(\beta, z) \Longleftrightarrow \alpha\beta^{-1}\in GL_2^+(\boldsymbol{R})_\infty$$

となることがわかる．さて整数 k を固定する．H 上の任意の函数 $f(z)$ に対して $GL_2^+(\boldsymbol{R})$ の元 α の作用を

$$(2.1.5)\qquad (f|[\alpha]_k)(z)=\det(\alpha)^{k/2}j(\alpha, z)^{-k}f(\alpha z)\qquad (z\in H)$$

でもって定義すると，(2.1.1) により

$$(2.1.6)\qquad f|[\alpha\beta]_k=(f|[\alpha]_k)|[\beta]_k\qquad (\alpha, \beta\in GL_2^+(\boldsymbol{R}))$$

が成り立つ．(2.1.5) において α として特に scalar な元をとれば

$$(2.1.7)\quad f\left|\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix}_k\right.=f\quad (a>0),\quad f\left|\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}_k\right.=(-1)^k f$$

である*.

定義 Γ を Fuchs 群とし k を整数とする．H 上の有理型函数 $f(z)$ が Γ の任意の元 γ に対して

$$f|[\gamma]_k=f$$

を満たすときに，$f(z)$ を Γ に関する **weight k の保型形式** (automorphic form of weight k) または weight k の Γ-保型形式と言う．weight k の Γ 保型形式全体を $\Omega_k(\Gamma)$ で表わす．

$\Omega_k(\Gamma)$ は $\boldsymbol{C}$ 上の vector 空間であり，(2.1.6) により

(2.1.8) $\Gamma\supset\Gamma' \Longrightarrow \Omega_k(\Gamma)\subset\Omega_k(\Gamma')$,

(2.1.9) $f\in\Omega_k(\Gamma),\ \alpha\in GL_2^+(\boldsymbol{R}) \Longrightarrow f|[\alpha]_k\in\Omega_k(\alpha^{-1}\Gamma\alpha)$,

(2.1.10) $f\in\Omega_k(\Gamma),\ g\in\Omega_h(\Gamma) \Longrightarrow fg\in\Omega_{k+h}(\Gamma)$

がわかる．更に (2.1.7) によって

(2.1.11) k が奇数であって，$-1\in\Gamma$ ならば $\Omega_k(\Gamma)=\{0\}$ である．

補題 2.1.1 Γ が第1種の Fuchs 群であるならば，$\Omega_k(\Gamma)\,(k\in\boldsymbol{Z})$ によって生成される加群

$$\Omega(\Gamma)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\Omega_k(\Gamma)$$

は次数を持った環である．

証明 $\Omega(\Gamma)$ が環となることは (2.1.10) により容易にわかる．$\Omega_k(\Gamma)$ が次数を持つことを示そう．先ず Γ の元 α,β に対して (2.1.4) により

$$j(\alpha,z)=j(\beta,z) \Longleftrightarrow \alpha\beta^{-1}\in\Gamma_\infty$$

であることに注意する．仮定により，$v(\Gamma\backslash H)<\infty$ であり $\Gamma_\infty\backslash H$ の測度は有限ではないから，$\Gamma_\infty\backslash\Gamma$ は無限集合である．よって Γ の元の列 $\{\gamma_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$ を，$m\neq n$ ならば

$$j(\gamma_n,z)\neq j(\gamma_m,z)$$

となるようにとれる．さて $f_k\in\Omega_k(\Gamma)$ $(M\leqq k\leqq N)$ が

---

* $f\left|\begin{bmatrix} a & 0\\ 0 & a\end{bmatrix}_k\right.$ は $f\left|\left[\begin{bmatrix} a & 0\\ 0 & a\end{bmatrix}\right]_k\right.$ とすべきだが，以後 $GL_2^+(\boldsymbol{R})$ の元を行列の形に書いたときにはこのように略記することにする．

$$\sum_{k=M}^{N} f_k = 0$$

なる関係を満たすとすると，任意の整数 m に対して

$$\sum_{k=M}^{N} f_k(\gamma_m z) = \sum_{k=M}^{N} j(\gamma_m, z)^k f_k(z) = 0$$

が成り立つ．この式を $f_k(z)$ $(M \leqq k \leqq N)$ に関する，H 上の有理型函数を係数に持つ1次方程式とみなし，m を $M \leqq m \leqq N$ の範囲で動かして連立方程式と考えたときの係数行列の行列式は

$$\det[j(\gamma_m, z)^k] = \pm \prod_{m=M}^{N} j(\gamma_m, z)^M \prod_{m<n} (j(\gamma_m z) - j(\gamma_n, z))$$

となるが，これは H 上で恒等的には 0 とならない正則函数であるから

$$f_k = 0 \qquad (M \leqq k \leqq N)$$

でなければならない．よって $\Omega(\Gamma)$ は次数を持った環である．　　（証明終）

Γ が cusp x を持つとし，$SL_2(\boldsymbol{R})$ の元 σ を $\sigma x = \infty$ をみたすようにとると，$\sigma \Gamma_x \sigma^{-1}$ は ∞ を固定するから，正数 h が存在して

$$\sigma \Gamma_x \sigma^{-1} \cdot \{\pm 1\} = \left\{ \pm \begin{bmatrix} 1 & mh \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \middle| m \in \boldsymbol{Z} \right\} \tag{2.1.12}$$

である．$f(z)$ が $\Omega_k(\Gamma)$ の元ならば $f|[\sigma^{-1}]_k \in \Omega_k(\sigma \Gamma \sigma^{-1})$ であるから，k は偶数であると仮定すると，$(f|[\sigma^{-1}]_k) \left| \begin{bmatrix} 1 & h \\ 0 & 1 \end{bmatrix}_k \right. = f|[\sigma^{-1}]_k$ が成り立つので

$$(f|[\sigma^{-1}]_k)(z+h) = (f|[\sigma^{-1}]_k)(z)$$

となる．故に K を単位円盤，O をその原点とすると，$K - \{O\}$ 上の函数 $g(w)$ が存在して

$$(f|[\sigma^{-1}]_k)(z) = g(e^{2\pi i z/h}) \qquad (z \in H) \tag{2.1.13}$$

と書ける．f が H で有理型であるから，g は $K - \{O\}$ 上の有理型函数である．

定義　k が偶数のときに $\Omega_k(\Gamma)$ の元 $f(z)$ が Γ の cusp x において**有理型**である（**正則**である，**零点**を持つ）とは上の $g(w)$ が原点 O で有理型である（正則である，零点を持つ）ときに言う．k が奇数のときには f^2 が Γ の cusp x において有理型である（正則である，零点を持つ）ときに f は x で有理型である（正則である，零点を持つ）と言う．

補題 2.1.2 上の定義は σ のとり方によらない．

証明 k が偶数の場合にのみ示せば十分である．f は $\Omega_k(\Gamma)$ の元，x は Γ の cusp とし，$\sigma, h, g(w)$ は上の通りとする．$\sigma_1 \in SL_2(\boldsymbol{R})$ を $\sigma_1 x=\infty$ にとると，$\sigma\sigma_1{}^{-1}\infty=\infty$ であるから $\sigma_1^{-1}=\sigma^{-1}\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & a^{-1} \end{bmatrix}$ と書ける．$h_1, g_1(w)$ を σ_1 に対して $h, g(w)$ に相当するものとすると，$h_1=h/a^2$ であり

$$g_1(w)=a^k g(cw), \qquad c=e^{2\pi iab/h}$$

となるので，上の定義は σ のとり方によらないことがわかる．　(証明終)

$\Omega_k(\Gamma)$ の元 f が Γ の cusp x で有理型であるとし，σ は $\sigma x=\infty$ となる $SL_2(\boldsymbol{R})$ の元であり，h は (2.1.12) で与えられる正数とする．k が偶数ならば，$g(w)$ を (2.1.13) によって与えられる有理函数とし，原点における Laurent 展開を $g(w)=\sum_{n=N}^{\infty} a_n w^n$ $(a_N \neq 0)$ と書くと，十分大きく正数 l をとれば $\{z \in H \mid \mathrm{Im}(z)>l\}$ において，

$$(2.1.14) \qquad (f|[\sigma^{-1}]_k)(z)=\sum_{n=N}^{\infty} a_n e^{2\pi inz/h}$$

が成り立つ．次に k が奇数であって $-1 \notin \Gamma$ であると仮定すると，$f^2|[\sigma^{-1}]_{2k}=(f|[\sigma^{-1}]_k)^2$ が (2.1.14) のような展開を持つことと

$$(f|[\sigma^{-1}]_k)(z+h)=\begin{cases} (f|[\sigma^{-1}]_k)(z) & (x \text{ が正則な cusp}) \\ -(f|[\sigma^{-1}]_k)(z) & (x \text{ が非正則な cusp}) \end{cases}$$

となることにより，十分大きい $l(>0)$ をとると $\{z \in H \mid \mathrm{Im}(z)>l\}$ において $f|[\sigma^{-1}]_k$ は

$$(2.1.15) \qquad (f|[\sigma^{-1}]_k(z)=\begin{cases} \displaystyle\sum_{n \geqq N,\, n:\text{偶}} a_n e^{\pi inz/h}, \quad a_N \neq 0 & (x \text{ が正則な cusp}) \\ \displaystyle\sum_{n \geqq N,\, n:\text{奇}} a_n e^{\pi inz/h}, \quad a_N \neq 0 & (x \text{ が非正則な cusp}) \end{cases}$$

と展開される．(2.1.14) および (2.1.15) を f の cusp x における Fourier 展開と呼ぶ．(2.1.14) および (2.1.15) の右辺は $\{z \in H \mid \mathrm{Im}(z)>l\}$ において広義一様に絶対収束しており，特に $f(z)$ が H で正則ならば H 全体で広義一様に絶対収束する．また

$$f \text{ が } x \text{ で正則である（零点を持つ）} \Longleftrightarrow N \geqq 0 \quad (N>0)$$

であることは定義により容易にわかる.

定義　Γ が第1種の Fuchs 群であるときに,

$A_k(\Gamma)=\{f\in\Omega_k(\Gamma)\,|\,f$ は Γ の各 cusp で有理型$\}$,

$G_k(\Gamma)=\{f\in\Omega_k(\Gamma)\,|\,f$ は H 上および Γ の各 cusp で正則$\}$,

$S_k(\Gamma)=\{f\in\Omega_k(\Gamma)\,|\,f$ は H 上で正則で, Γ の各 cusp で零点を持つ$\}$

とおく. $A_k(\Gamma)$, $G_k(\Gamma)$, $S_k(\Gamma)$ の元を各々 Γ に関する weight k の**有理型保型形式** (meromorphic automorphic form), **正則保型形式** (integral form), **cusp 形式** (cusp form) と言う.

以下 Γ は第1種の Fuchs 群であると仮定する. $A_k(\Gamma)$, $G_k(\Gamma)$, $S_k(\Gamma)$ は $\boldsymbol{C}$ 上の vector 空間であり, 次の (2.1.16)～(2.1.22) は容易にわかる.

(2.1.16)　$\Omega_k(\Gamma)\supset A_k(\Gamma)\supset G_k(\Gamma)\supset S_k(\Gamma)$.

(2.1.17)　Γ が cusp を持たなければ $\Omega_k(\Gamma)=A_k(\Gamma)$, $G_k(\Gamma)=S_k(\Gamma)$ である.

(2.1.18)　$\alpha\in Gl_2^+(\boldsymbol{R})$ ならば, "$f\longmapsto f|[\alpha]_k$" により $\boldsymbol{C}$ 上の vector 空間として

$$A_k(\Gamma)\cong A_k(\alpha^{-1}\Gamma\alpha),\quad G_k(\Gamma)\cong G_k(\alpha^{-1}\Gamma\alpha),\quad S_k(\Gamma)\cong S_k(\alpha^{-1}\Gamma\alpha)$$

である.

(2.1.19)　$f\in A_k(\Gamma)$, $f\neq 0$ ならば, $f^{-1}\in A_{-k}(\Gamma)$ である.

(2.1.20)　$f\in A_k(\Gamma)$, $g\in A_h(\Gamma)\Longrightarrow fg\in A_{k+h}(\Gamma)$.

(2.1.21)　$f\in G_k(\Gamma)$, $g\in G_h(\Gamma)\Longrightarrow fg\in G_{k+h}(\Gamma)$.

(2.1.22)　$f\in G_k(\Gamma)$, $g\in S_h(\Gamma)\Longrightarrow fg\in S_{k+h}(\Gamma)$.

この (2.1.20)～(2.1.22) および $\Omega(\Gamma)$ が次数を持った環であることから

$$A(\Gamma)=\sum_k A_k(\Gamma),\quad G(\Gamma)=\sum_k G_k(\Gamma),\quad S(\Gamma)=\sum_k S_k(\Gamma)$$

と定義すると

(2.1.23)　$A(\Gamma)$, $G(\Gamma)$, $S(\Gamma)$ は次数を持った環である.

さて, 特に $k=0$ とすると, (2.1.19) および (2.2.20) により $A_0(\Gamma)$ は体である. $A_0(\Gamma)$ を Γ に関する**保型函数体** (automorphic function field) と言い, $A_0(\Gamma)$ の元を**保型函数** (automorphic function) と呼ぶ. f が Γ に関す

る保型函数とすると $f|[\gamma]_0=f(\gamma z)$ であるから f は $\Gamma\backslash H$ 上の有理型函数 φ によって

$$f(z)=\varphi\circ\pi_\Gamma(z)$$

と書け，更に f が Γ の cusp で有理型であることは，この φ が $\mathfrak{R}_\Gamma$ の有理型函数であることに他ならない．逆に，$\varphi\in K(\mathfrak{R}_\Gamma)$ に対して $f(z)=\varphi\circ\pi_\Gamma(z)$ $(z\in H)$ と H 上の函数 $f(z)$ を定義すると，明らかに $f\in A_0(\Gamma)$ であるから

(2.1.24) $K(\mathfrak{R}_\Gamma)$ と $A_0(\Gamma)$ は "$\varphi\longmapsto\varphi\circ\pi_\Gamma$" により同型な体である．

補題 2.1.3 Γ は第1種の Fuchs 群とする．Γ の任意の指数有限の部分群 Γ' について

$$A_k(\Gamma)=\Omega_k(\Gamma)\cap A_k(\Gamma'),\ G_k(\Gamma)=\Omega_k(\Gamma)\cap G_k(\Gamma'),$$
$$S_k(\Gamma)=\Omega_k(\Gamma)\cap S_k(\Gamma')$$

が成り立つ．特に $A_k(\Gamma)\subset A_k(\Gamma')$, $G_k(\Gamma)\subset G_k(\Gamma')$, $S_k(\Gamma)\subset S_k(\Gamma')$ である．

証明 k が偶数であるときに示せば十分であることは定義から明らかである．以下証明は全く同じであるから cusp 形式についてのみ示す．$S_k(\Gamma)$ の元も，$\Omega_k(\Gamma)\cap S_k(\Gamma')$ の元も H 上で正則であって，Γ の任意の元 γ に対して

$$f|[\gamma]_k=f$$

が成り立っているから，Γ が cusp を持たなければ補題が成り立つこと，および Γ が cusp を持てば cusp における条件のみ調べればよいことがわかる．Γ が cusp x を持つとすると，x は Γ' の cusp でもある（系 1.5.5）．$SL_2(\boldsymbol{R})$の元 σ と正数 h を (2.1.12) のようにとり $l=[\Gamma_x\cdot\{\pm1\}:\Gamma'_x\cdot\{\pm1\}]$ とおくと，仮定により l は有限であって，$\sigma\Gamma_x\sigma^{-1}\cdot\{\pm1\}=\left\{\pm\begin{bmatrix}1 & mlh\\ 0 & 1\end{bmatrix}\middle| m\in\boldsymbol{Z}\right\}$ となる．今 f を $S_k(\Gamma)$ の元とすると

$$(f|[\sigma^{-1}]_k)(z)=\sum_{n=1}^{\infty}a_ne^{2\pi inz/h}=\sum_{n=1}^{\infty}a_ne^{2\pi ilnz/lh}$$

であるから $f\in S_k(\Gamma')$ である．逆に，f が $\Omega_k(\Gamma)\cap S_k(\Gamma')$ の元であるとすると

$$(f|[\sigma^{-1}]_k)(z)=\sum_{n=1}^{\infty}a_ne^{2\pi inz/lh}$$

であるが，f が $\Omega_k(\Gamma)$ に属することから $(f|[\sigma^{-1}]_k)(z+h)=(f|[\sigma^{-1}]_k)(z)$ であるので，n が l と互いに素ならば $a_n=0$ がわかり

$$=\sum_{n=1}^{\infty} a_{nl}e^{2\pi inz/h}$$

となるので f は $S_k(\Gamma)$ の元である．よって $S_k(\Gamma)=\Omega_k(\Gamma)\cap S_k(\Gamma')$ である． (証明終)

定理 2.1.4 $\Omega_k(\Gamma)$ の元 $f(z)$ が H 上で正則であるとする．$\nu>0$ が存在して

$$f(z)=O(\mathrm{Im}(z)^{-\nu}) \qquad (\mathrm{Im}(z)\longrightarrow 0)$$

が $\mathrm{Re}(z)$ に関して一様に成り立つならば $f(z)\in G_k(\Gamma)$ である．更に ν を $\nu<k$ にとれるならば $f(z)\in S_k(\Gamma)$ である．

証明 k は偶数であると仮定して差支えない．もし $\Gamma\backslash H$ が compact ならば定理は自明であるから Γ が cusp を持つ場合に証明する．先ず x を Γ の実軸上にある cusp とする．$SL_2(\boldsymbol{R})$ の元 σ で $\sigma x=\infty$ となるものをとり，正数 h を (2.1.12) で与えると

$$(f|[\sigma^{-1}]_k)(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{2\pi inz/h} \qquad (z\in H)$$

と H で広義一様に収束する級数に展開される．係数 a_n は H の任意の1点 z_0 を固定したときに

$$(2.1.25) \qquad a_n=\frac{1}{h}\int_{z_0}^{z_0+h}(f|[\sigma^{-1}]_k)(z)e^{-2\pi inz/h}dz$$

と表わされる．ここで $\sigma^{-1}=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ と書き表わすと $c\neq 0$ であるから，仮定により $|\mathrm{Re}(z)|\leqq h/2$ において $\mathrm{Re}(z)$ に関して一様に

$$(2.1.26) \qquad (f|[\sigma^{-1}]_k)(z)=f(\sigma^{-1}z)j(\sigma^{-1},z)^{-k}$$
$$=O(\mathrm{Im}(z)^{\nu-k}) \qquad (\mathrm{Im}(z)\longrightarrow\infty)$$

が成り立っている．(2.1.25) において $z_0=iy-h/2$ ととると

$$|a_n|=O(y^{\nu-k}e^{2\pi ny/h}) \qquad (y\longrightarrow\infty)$$

となるので，$n<0$ ならば $a_n=0$ であり，もし更に $\nu<k$ であるならば $a_0=0$

となる．よって $f(z)$ は x において正則で，$\nu<k$ ならば更に x で零点を持つことがわかる．もし ∞ が cusp ならば Γ は第1種の Fuchs 群であるから，実軸上に ∞ と同値な cusp を持つので $f(z)$ は Γ の任意のcusp で正則であり，$\nu<k$ ならば Γ の任意の cusp で零点を持つことが示された．（証明終）

定理 2.1.5 $f(z)$ を $\Omega_k(\Gamma)$ の元とすると

$$f(z)\in S_k(\Gamma) \Longleftrightarrow f(z)(\mathrm{Im}(z))^{k/2} \text{ が } H \text{ で有界である．}$$

証明 $\Longleftarrow$ は定理 2.1.4 により明らかである．$\Longrightarrow$ を示す．$g(z)=|f(z)|\mathrm{Im}(z)^{k/2}$ とおくと $g(\gamma z)=g(z)$ が任意の $\gamma\in\Gamma$ に対して成り立つから，$g(z)$ は $\Gamma\backslash H$ 上の連続函数と考えられるので，もし $\Gamma\backslash H$ が compact ならば $g(z)$ は $\Gamma\backslash H$ 上で有界である．Γ が cusp を持つとしよう．$g(z)$ は $\Gamma\backslash H$ の任意の compact な部分集合上では有界であるから，$g(z)$ が Γ の任意の cusp の近傍で有界であることを示せばよい．Γ の任意の cusp x をとり，$\sigma\in SL_2(\boldsymbol{R})$ を $\sigma x=\infty$ なる元とする．h は $\sigma\Gamma_x\sigma^{-1}\cdot\{\pm 1\}=\left\{\pm\begin{bmatrix}1 & mh\\ 0 & 1\end{bmatrix}\middle| m\in\boldsymbol{Z}\right\}$ なる正数とし，$(f|[\sigma^{-1}]_k)(z)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n e^{2\pi inz/h}$ を f の x における Fourier 展開とすると

$$\begin{aligned}|g(\sigma^{-1}z)|&=|(f|[\sigma^{-1}]_k)(z)|\mathrm{Im}(z)^{k/2}\\ &=\left|\sum_{n=1}^{\infty}a_n e^{2\pi inz/h}\right|\mathrm{Im}(z)^{k/2}\longrightarrow 0 \qquad (\mathrm{Im}(z)\longrightarrow\infty)\end{aligned}$$

であるから，$g(z)$ は x の近傍で有界である．（証明終）

系 2.1.6 $f(z)\in S_k(\Gamma)$ とする．x_0 は Γ の cusp とし $\sigma\in SL_2(\boldsymbol{R})$ を $\sigma x_0=\infty$ にとる．h は $\sigma\Gamma_{x_0}\sigma^{-1}\{\pm 1\}=\left\{\pm\begin{bmatrix}1 & nh\\ 0 & 1\end{bmatrix}\middle| n\in\boldsymbol{Z}\right\}$なる正数とし

$$(f|[\sigma^{-1}]_k)(z)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n e^{\pi inz/h}$$

を f の x_0 における Fourier 展開とすると

$$a_n=O(n^{k/2})$$

が成り立つ．

証明 $g(z)=(f|[\sigma^{-1}]_k)(z)$ とおくと，$g(z)\in S_k(\sigma\Gamma\sigma^{-1})$ であるので，定理 2.1.5 により定数 $M(>0)$ が存在して $|g(z)|\leqq M\mathrm{Im}(z)^{-k/2}$ が成り立つから

$$|a_n|=\frac{1}{2h}\left|\int_0^{2h} f(x+yi)e^{-\pi ni(x+yi)}dx\right|$$
$$\leqq My^{-k/2}e^{\pi ny}$$

である．特に $y=2/n$ とすると $|a_n|\leqq Ln^{k/2}$ $(L>0)$ を得る． (証明終)

保型形式の定義は次のように少し拡張しておいた方が便利である．Γ を第1種の Fuchs 群とし，χ を Γ の指標で位数 $|\chi(\Gamma)|$ が有限なものとする．従って $\Gamma_\chi=\mathrm{Ker}(\chi)$ とおくと，Γ_χ は Γ の指数有限な部分群であるから第1種の Fuchs 群である．このとき

$$\Omega_k(\Gamma,\chi)=\{f\in\Omega_k(\Gamma_\chi)\mid f|[\gamma]_k=\chi(\gamma)f,\ \forall\gamma\in\Gamma\},$$
$$A_k(\Gamma,\chi)=\Omega_k(\Gamma,\chi)\cap A_k(\Gamma_\chi),\ G_k(\Gamma,\chi)=\Omega_k(\Gamma,\chi)\cap G_k(\Gamma_\chi),$$
$$S_k(\Gamma,\chi)=\Omega_k(\Gamma,\chi)\cap S_k(\Gamma_\chi)$$

と定義する．特に $\chi=1$ のときには $\Omega_k(\Gamma,\chi)=\Omega_k(\Gamma)$, $A_k(\Gamma,\chi)=A_k(\Gamma)$, $G_k(\Gamma,\chi)=G_k(\Gamma)$, $S_k(\Gamma,\chi)=S_k(\Gamma)$ である．$\Omega_k(\Gamma,\chi)$ の元を**指標 χ を持つ Γ に関する保型形式**と言う．

定義から次の (2.1.27)～(2.1.31) は直ちにわかる．

(2.1.27) $-1\in\Gamma$ とする．$\chi(-1)\neq(-1)^k$ ならば $\Omega_k(\Gamma,\chi)=\{0\}$ である．

(2.1.28) Γ' を Γ_χ の指数有限の部分群とすると

$$A_k(\Gamma,\chi)=\Omega_k(\Gamma,\chi)\cap A_k(\Gamma'),\ G_k(\Gamma,\chi)=\Omega_k(\Gamma,\chi)\cap G_k(\Gamma'),$$
$$S_k(\Gamma,\chi)=\Omega_k(\Gamma,\chi)\cap S_k(\Gamma')$$

が成り立つ．

(2.1.29) Γ' を Γ の指数有限の部分群とし，χ を Γ' に制限して得られる Γ' の指標も χ と書き表わすと

$$A_k(\Gamma,\chi)\subset A_k(\Gamma',\chi),\ G_k(\Gamma,\chi)\subset G_k(\Gamma',\chi),\ S_k(\Gamma,\chi)\subset S_k(\Gamma',\chi)$$

である．

(2.1.30) $f\in A_k(\Gamma,\chi)$, $g\in A_h(\Gamma,\psi)$ ならば $fg\in A_{k+h}(\Gamma,\chi\psi)$ である．

(2.1.31) α を $GL_2^+(\boldsymbol{R})$ の任意の元とする．$\Gamma'=\alpha^{-1}\Gamma\alpha$ とおき Γ' の指標 χ' を $\chi'(\alpha^{-1}\gamma\alpha)=\chi(\gamma)$ でもって定義すると，"$f\longmapsto f|[\alpha]_k$" により $\boldsymbol{C}$ 上の vector 空間として

$$A_k(\Gamma,\chi)\cong A_k(\Gamma',\chi'),\quad G_k(\Gamma,\chi)\cong G_k(\Gamma',\chi'),\quad S_k(\Gamma,\chi)\cong S_k(\Gamma',\chi')$$

である.

§2.2 compact な Riemann 面上の微分

$\mathfrak{R}$ は Riemann 面とし, m は任意の整数とする. $\mathfrak{R}$ の座標近傍 V_μ, V_μ における局所座標 t_μ, V_μ 上の有理型函数 φ_μ の組 $(\varphi_\mu, V_\mu, t_\mu)$ からなる集合 $\{(\varphi_\mu, V_\mu, t_\mu)\}$ が次の(i)および(ii)を満たすときに, m 次の微分の局所表示と言う.

(i) $\{(V_\mu, t_\mu)\}$ は $\mathfrak{R}$ の1つの座標系である.

(ii) φ_μ は V_μ 上の有理型函数で $V_\mu\cap V_\nu\neq\phi$ ならば $\varphi_\mu(\boldsymbol{a})(dt_\mu/dt_\nu)^m(\boldsymbol{a})=\varphi_\nu(\boldsymbol{a})$ が任意の $\boldsymbol{a}\in V_\mu\cap V_\nu$ について成り立つ.

$\mathfrak{R}$ の m 次の微分の局所表示 $\{(\varphi_\mu, V_\mu, t_\mu)\}$ および $\{(\varphi'_\nu, V'_\nu, t'_\nu)\}$ は $\{(\varphi_\mu, V_\mu, t_\mu)\}\cup\{(\varphi'_\nu, V'_\nu, t'_\nu)\}$ が再び(i)および(ii)を満たすときに同値であると言い, この同値類を $\mathfrak{R}$ の **m 次の微分**と呼ぶ. 特に $m=1$ のときには単に $\mathfrak{R}$ の**微分**と言う. m 次の微分全体を $\mathscr{D}^m(\mathfrak{R})$ と書き表わす. $\boldsymbol{\omega}$ が $\mathscr{D}^m(\mathfrak{R})$ の元で $\{(\varphi_\mu, V_\mu, t_\mu)\}$ が $\boldsymbol{\omega}$ に属するならば, $\{(\varphi_\mu, V_\mu, t_\mu)\}$ を m 次の微分 $\boldsymbol{\omega}$ の局所表示と言う. 以下においては冗長を避けるために, m 次の微分とその局所表示を混乱のない限り同一視して

$$\boldsymbol{\omega}=\{(\varphi_\mu, V_\mu, t_\mu)\}$$

と書き表わすことにする. さて $\mathfrak{R}$ の1つの座標系 $\{(V_\mu, t_\mu)\}$ をとり, V_μ 上の函数 φ_μ として V_μ において恒等的に0となる函数をとると, $\{(\varphi_\mu, V_\mu, t_\mu)\}$ は上の(i)および(ii)を満たす. これを局所表示に持つ m 次の微分を0で表わす. 0でない m 次の微分 $\boldsymbol{\omega}$ を $\boldsymbol{\omega}=\{(\varphi_\mu, V_\mu, t_\mu)\}$ と局所を表すると, $\mathfrak{R}$ が連結であるので上の(ii)により φ_μ が V_μ で恒等に0となることはない. よって

$$\boldsymbol{\omega}^{-1}=\{(\varphi_\mu^{-1}, V_\mu, t_\mu)\} \tag{2.2.1}$$

は意味を持ち, $-m$ 次の微分である. 次に $\boldsymbol{\omega}$ および $\boldsymbol{\omega}'$ を m 次の微分とする. $\boldsymbol{\omega}$ および $\boldsymbol{\omega}'$ の局所表示において座標系を十分細かくとれば

$$\boldsymbol{\omega}=\{(\varphi_\mu, V_\mu, t_\mu)\},\qquad \boldsymbol{\omega}'=\{(\varphi'_\mu, V_\mu, t_\mu)\}$$

と座標系を共通にとれるから，この局所表示を用いて ω と ω' の和を

$$\omega+\omega'=\{(\varphi_\mu+\varphi'_\mu, V_\mu, t_\mu)\} \qquad (\in\mathcal{D}^m(\mathfrak{R})) \tag{2.2.2}$$

と定義する．更に $\omega\in\mathcal{D}^m(\mathfrak{R})$, $\omega'\in\mathcal{D}^n(\mathfrak{R})$ とするときに，上と同様にして $\omega=\{(\varphi_\mu, V_\mu, t_\mu)\}$，$\omega'=\{(\varphi'_\mu, V_\mu, t_\mu)\}$ と座標系を共有するような局所表示をとり

$$\omega\omega'=\{(\varphi_\mu\varphi'_\mu, V_\mu, t_\mu)\} \qquad (\in\mathcal{D}^{m+n}(\mathfrak{R})) \tag{2.2.3}$$

とおく．上の (2.2.1), (2.2.2), (2.2.3) が局所表示のとり方によらずに決まることは容易に確かめられる．また (2.2.2) により $\mathcal{D}^m(\mathfrak{R})$ は0を単位元とする加群となることがわかる．特に $m=0$ とすると，(2.2.1)～(2.2.3) によって $\mathcal{D}^0(\mathfrak{R})$ は体になることが確められる．さて $\omega=\{(\varphi_\mu, V_\mu, t_\mu)\}$ を $\mathcal{D}^0(\mathfrak{R})$ の元とするとき，$\mathfrak{R}$ 上の函数 φ を

$$\varphi(\boldsymbol{a})=\varphi_\mu(\boldsymbol{a}) \qquad (\boldsymbol{a}\in V_\mu) \tag{2.2.4}$$

でもって定義する．$V_\mu\cap V_\nu$ においては $\varphi_\mu=\varphi_\nu$ であるから，この定義は意味を持ち，φ は $\mathfrak{R}$ 上の有理型函数である．逆に $K(\mathfrak{R})$ の元 φ が与えられたときに，$\mathfrak{R}$ の1つの座標系 $\{(V_\mu, t_\mu)\}$ をとり φ_μ を逆に (2.2.4) で定義することにより $\mathcal{D}^0(\mathfrak{R})$ の元を得る．この対応により $K(\mathfrak{R})$ と $\mathcal{D}^0(\mathfrak{R})$ は同型である．以下 $\mathcal{D}^0(\mathfrak{R})$ と $K(\mathfrak{R})$ をこの同型により同一視することにすると，(2.2.3) で定義した積により $\mathcal{D}^m(\mathfrak{R})$ は $K(\mathfrak{R})$ 上の vector 空間であり，$\mathcal{D}(\mathfrak{R})$ を $\mathcal{D}^m(\mathfrak{R})$ の直和でもって

$$\mathcal{D}(\mathfrak{R})=\bigoplus_{n=-\infty}^{\infty}\mathcal{D}^m(\mathfrak{R}) \tag{2.2.5}$$

と定義すると，$\mathcal{D}(\mathfrak{R})$ は $\boldsymbol{C}$ 上および $K(\mathfrak{R})$ 上の次数を持つ多元環である．

φ は $K(\mathfrak{R})$ の元とする．$\mathfrak{R}$ の座標系 $\{(V_\mu, t_u)\}$ をとり，V_μ 上の函数 φ_μ を

$$\varphi_\mu(\boldsymbol{a})=\left(\frac{d\varphi}{dt_\mu}\right)(\boldsymbol{a}) \qquad (\boldsymbol{a}\in V_\mu)$$

と定義すると $\{(\varphi_\mu, V_\mu, t_\mu)\}$ は $\mathfrak{R}$ の微分の局所表示となる．この $\{(\varphi_\mu, V_\mu, t_\mu)\}$ の属する微分を $d\varphi$ でもって書き表わす．明らかに $d\varphi$ は座標系のとり方にはよらない．また φ が定数でなければ $d\varphi\neq 0$ である．$\mathfrak{R}$ が compact ならばこのことから $\mathcal{D}^1(\mathfrak{R})\neq\{0\}$ であり，更に $(d\varphi)^m\in\mathcal{D}^m(\mathfrak{R})$ であるから，$\mathcal{D}^m(\mathfrak{R})$

$\neq \{0\}$ が任意の整数 m に対して成り立つことがわかる．$\boldsymbol{\omega}$ が 0 でない $\mathcal{D}^m(\mathfrak{R})$ の元ならば，任意の $\boldsymbol{\omega}'(\in \mathcal{D}^m(\mathfrak{R}))$ に対して $\boldsymbol{\omega}^{-1}\boldsymbol{\omega}' \in \mathcal{D}^0(\mathfrak{R})\,(=K(\mathfrak{R}))$ であるから

$$\dim_{K(\mathfrak{R})}\mathcal{D}^m(\mathfrak{R}) = 1 \tag{2.2.6}$$

となる．

以下 $\mathfrak{R}$ は compact な Riemann 面であると仮定する．$\mathfrak{R}$ の点で生成される自由加群を $D(\mathfrak{R})$ で表わして，$\mathfrak{R}$ の**因子群** (divisor group) と言う．即ち
$D(\mathfrak{R}) = \{\mathfrak{a} = \sum c_{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{a} \mid \boldsymbol{a}$ は $\mathfrak{R}$ の点で，$c_{\boldsymbol{a}}$ は有限個の $\boldsymbol{a}$ を除き 0 となる整数$\}$
である．$D(\mathfrak{R})$ の元は $\mathfrak{R}$ の**因子** (divisor) と呼ばれる．$\mathfrak{R}$ の因子 $\mathfrak{a} = \sum c_{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{a}$ に対して

$$\deg(\mathfrak{a}) = \sum c_{\boldsymbol{a}} \qquad (\in \boldsymbol{Z})$$

と定義して，$\mathfrak{a}$ の**次数** (degree) と言う．$\mathfrak{R}$ 上の函数および m 次の微分の因子を定義しよう．先ず $\varphi \in K(\mathfrak{R})^\times$ とする．$\mathfrak{R}$ の各点 $\boldsymbol{a}$ に対し $\nu_{\boldsymbol{a}}(\varphi)$ を (1.8.3) で定義した φ の $\boldsymbol{a}$ における位数とするとき

$$\operatorname{div}(\varphi) = \sum \nu_{\boldsymbol{a}}(\varphi)\boldsymbol{a} \tag{2.2.7}$$

と定義し，φ の因子と言う．右辺の和は $\mathfrak{R}$ のすべての点にわたるが $\nu_{\boldsymbol{a}}(\varphi) \neq 0$ となる $\mathfrak{R}$ の点 $\boldsymbol{a}$ は高々有限個であるから意味を持ち $\operatorname{div}(\varphi)$ は $D(\mathfrak{R})$ の元であり，(1.8.4) により

$$\deg(\operatorname{div}(\varphi)) = 0 \tag{2.2.8}$$

である．また $\nu_{\boldsymbol{a}}$ の定義により φ, ψ が $K(\mathfrak{R})^\times$ の元ならば

$$\operatorname{div}(\varphi\psi) = \operatorname{div}(\varphi) + \operatorname{div}(\psi) \tag{2.2.9}$$

が成り立つ．よって

$$D_l(\mathfrak{R}) = \{\operatorname{div}(\varphi) \mid \varphi \in K(\mathfrak{R})^\times\}$$

とおくと，$D_l(\mathfrak{R})$ は $D(\mathfrak{R})$ の部分加群である．$D_l(\mathfrak{R})$ を**主因子群** (principal divisor group)，$D(\mathfrak{R})$ の $D_l(\mathfrak{R})$ による剰余類 $D(\mathfrak{R})/D_l(\mathfrak{R})$ を $\mathfrak{R}$ の**因子類群** (divisor class group) と言う．また各剰余類を**因子類** (divisor class) と呼ぶ．

$\boldsymbol{\omega}$ は 0 でない m 次の微分とし，$\boldsymbol{a}$ は $\mathfrak{R}$ の任意の点とする．$\boldsymbol{\omega} = \{\varphi_\mu, V_\mu, t_\mu)\}$

と表わしたときに，$\boldsymbol{a}\in V_\mu$ ならば

$$\nu_{\boldsymbol{a}}(\omega)=\nu_{\boldsymbol{a}}(\varphi_\mu)$$

とおく．(dt_μ/dt_ν) は $V_\mu\cap V_\nu$ で零点を持たない正則函数であるから，$\nu_{\boldsymbol{a}}(\omega)$ は ω の局所表示のとり方および $\boldsymbol{a}$ を含む座標近傍のとり方によらずに決まる整数で，$\mathfrak{R}$ が compact だから，有限個の $\mathfrak{R}$ の点を除くと $\nu_{\boldsymbol{a}}(\omega)=0$ である．そこで

$$\mathrm{div}(\omega)=\sum\nu_{\boldsymbol{a}}(\omega)\boldsymbol{a}$$

とおくと，$\mathrm{div}(\omega)$ は $D(\mathfrak{R})$ の元である．これを m 次の微分 ω の因子と言う．上で定義した函数の微分はこの特別の場合 $(m=0)$ である．$\omega\in\mathscr{D}^m(\mathfrak{R})$, $\omega'\in\mathscr{D}^n(\mathfrak{R})$ とし，ω,ω' が 0 でないとすると，(2.2.9) と同様に

$$\mathrm{div}(\omega\omega')=\mathrm{div}(\omega)+\mathrm{div}(\omega') \tag{2.2.10}$$

が成り立つ．これと (2.2.6) により

(2.2.11)　　$\{\mathrm{div}(\omega)\,|\,\omega\in\mathscr{D}^m(\mathfrak{R})-\{0\}\}$ は 1 つの因子類になる

ことがわかる．

$\mathfrak{R}$ の因子 $\mathfrak{a}=\sum c_{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{a}$ が正であるとは，任意の $\boldsymbol{a}$ に対して $c_{\boldsymbol{a}}\geqq 0$ のときに言い $\mathfrak{a}\geqq 0$ と書く．$\mathfrak{R}$ の因子 $\mathfrak{a}$ に対し

$$L(\mathfrak{a})=\{\varphi\in K(\mathfrak{R})\,|\,\varphi=0 \text{ または } \varphi\neq 0 \text{ で } \mathrm{div}(\varphi)+\mathfrak{a}\geqq 0\}$$

と定義する．$L(\mathfrak{a})$ は $\boldsymbol{C}$ 上の vector 空間であるが，更に有限次元であることが容易にわかり，(2.2.8) により

$$L(0)=\boldsymbol{C}, \tag{2.2.12}$$

$$\deg(\mathfrak{a})<0 \text{ ならば } L(\mathfrak{a})=\{0\} \tag{2.2.13}$$

となることが示される．一般に

$$l(\mathfrak{a})=\dim_{\boldsymbol{C}}L(\mathfrak{a})$$

と定義すると次の定理が成り立つ ([岩澤])．

定理 2.2.1 (Riemann-Roch)　$\mathfrak{R}$ は compact な Riemann 面とし，$\mathfrak{R}$ の genus を g とする．ω を 0 でない $\mathfrak{R}$ の微分とすると，$\mathfrak{R}$ の任意の因子 $\mathfrak{a}$ に対して

$$l(\mathfrak{a})=\deg(\mathfrak{a})-g+1+l(\mathrm{div}(\omega)-\mathfrak{a})$$

が成り立つ.

この定理により容易に次の系が導かれる.

系 2.2.2 $\mathfrak{R}$ は genus が g である compact な Riemann 面とする.

（1） ω が 0 でない $\mathfrak{R}$ の微分ならば, $\deg(\mathrm{div}(\omega))=2g-2$, $l(\mathrm{div}(\omega))=g$ である.

（2） ω が 0 でない m 次の微分ならば, $\deg(\mathrm{div}(\omega))=2m(g-1)$ である.

（3） $\mathfrak{a}$ が $\deg(\mathfrak{a})>2g-2$ なる $\mathfrak{R}$ の因子ならば, $l(\mathfrak{a})=\deg(\mathfrak{a})-g+1$ である.

m 次の微分 ω が**正則**であるとは, $\omega=0$ であるか $\omega\neq 0$ で $\mathrm{div}(\omega)\geqq 0$ のときに言う. $\mathfrak{R}$ の正則な m 次の微分全体を $\mathcal{D}_0^m(\mathfrak{R})$ で表わす. ω_1 が $\mathfrak{R}$ の 0 でない微分とすると

$$L(\mathrm{div}(\omega_1))=\{\varphi\in K(\mathfrak{R})\,|\,\varphi=0 \quad \text{または}\ \varphi\neq 0\ \text{で}\ \mathrm{div}(\varphi\omega_1)\geqq 0\}$$

であるから, $\boldsymbol{C}$ 上の vector 空間として

$$\cong\{\omega\in\mathcal{D}^1(\mathfrak{R})\,|\,\omega=0\ \text{または}\ \omega\neq 0\ \text{で}\ \mathrm{div}(\omega)\geqq 0\}=\mathcal{D}_0^1(\mathfrak{R})$$

となるので, 系 2.2.2(1) により

$$\dim_{\boldsymbol{C}}\mathcal{D}_0^1(\mathfrak{R})=g \tag{2.2.14}$$

が得られる.

§2.3　保型形式と微分

先ず k は偶数とし $k=2m$ とおく. $A_k(\Gamma)$ の任意の元 f に $\mathcal{D}^m(\mathfrak{R}_\Gamma)$ の元を対応させよう. $\pi=\pi_\Gamma$ とし, $\mathfrak{R}_\Gamma$ の任意の点 $\boldsymbol{a}$ に対して $\pi(z_0)=\boldsymbol{a}$ となる H^* の点 z_0 をとる. z_0 の H^* における近傍 $U_{z_0}^*$ を

$$\gamma U_{z_0}^*\cap U_{z_0}^*\neq\phi \Longleftrightarrow \gamma\in\Gamma_{z_0}, \tag{2.3.1}$$

$$\gamma\in\Gamma_{z_0}\ \text{ならば}\ \gamma U_{z_0}^*=U_{z_0}^* \tag{2.3.2}$$

を満たすようにとる. $t_{\boldsymbol{a}}$ は §1.8 で与えた $\boldsymbol{a}$ の近傍 $V_{\boldsymbol{a}}=\pi(U_{z_0}^*)$ における局所座標とする.

1° z_0 が H の点であるならば, $U_{z_0}^*$ 上の函数 $g(z)$ を

$$g(z)=f(z)\,(d(t_{\boldsymbol{a}}\circ\pi)(z)/dz)^{-m} \qquad (z\in U_{z_0}^*) \tag{2.3.3}$$

と定義する．Γ_{z_0} の任意の元 γ に対して $t_a\cdot\pi(\gamma z)=t_a\cdot\pi(z)$ であるから

$$(2.3.4)\qquad d(t_a\circ\pi\circ\gamma)(z)/d(\gamma z)=(d(\gamma z)/dz)^{-1}=j(\gamma,z)^2\qquad(\gamma\in\Gamma_{z_0})$$

となるので，(2.3.4) により $g(\gamma z)=g(z)$ が任意の γ に対して成り立つ．よって V_a 上の函数 φ_a が存在して

$$(2.3.5)\qquad \varphi_a\circ\pi(z)=g(z)\qquad(z\in U^*_{z_0})$$

と書ける．$f(z)$ は z の有理型函数であるから φ_a も V_a 上の有理型函数であり，更に $\mathfrak{R}_\Gamma$ の点 b が cusp でなく，近傍 V_b が V_a と交わるならば，$V_a\cap V_b$ において

$$(2.3.6)\qquad \varphi_a(c)(dt_a/dt_b)^m(c)=\varphi_b(c)\qquad(c\in V_a\cap V_b)$$

が成り立つことがわかる．

2°　z_0 が cusp であるとする．$U_{z_0}=U^*_{z_0}-\{z_0\}$ とし，U_{z_0} 上の函数 $g(z)$ を

$$(2.3.7)\qquad g(z)=f(z)(d(t_a\circ\pi)(z)/dz)^{-m},\qquad z\in U_{z_0}$$

と定義すると，1° と同様にして $g(z)$ は $g(\gamma z)=g(z)$ $(\gamma\in\Gamma_{z_0})$ を満たす．従って $V_a-\{a\}$ 上の函数 φ_a で

$$\varphi_a\circ\pi(z)=g(z)\qquad(z\in U_{z_0}-\{z_0\})$$

となるものが存在する．$f(z)$ が U_{z_0} で有理型であるから φ_a は V_a で有理型である．$SL_2(\boldsymbol{R})$ の元 σ を $\sigma(z_0)=\infty$ なるものとし，正数 h を $\sigma\Gamma_x\sigma^{-1}\cdot\{\pm1\}=\left\{\pm\begin{bmatrix}1&nh\\0&1\end{bmatrix}\middle|\,n\in\boldsymbol{Z}\right\}$ となるようにとる．局所座標 t_a として $t_a\circ\pi(z)=e^{2\pi i\sigma z/h}$ をとり，$c=(2\pi i/h)^{-m}$ とすると，U_{z_0} 上で

$$\begin{aligned}(2.3.8)\qquad \varphi_a\circ\pi(z)&=cf(z)(d\sigma(z)/dz)^{-m}(t_a\circ\pi)(z)^{-m}\\&=cf(z)j(\sigma,z)^{2m}(t_a\circ\pi)(z)^{-m}\\&=c(f|[\sigma^{-1}]_{2m})(\sigma z)(t_a\circ\pi)(z)^{-m}\end{aligned}$$

であり，f が z_0 で有理型であるから φ_a は a で有理型となることがわかる．更に b が R_Γ の点で $V_a\cap V_b\neq\phi$ ならば，容易に $V_a\cap V_b$ において(2.3.6)が成り立つことが確められる．

1° および 2° により，この $\{(\varphi_a,V_a,t_a)\}$ は $\mathfrak{R}_\Gamma$ の m 次の微分の局所表示となる．これから得られる $\mathfrak{R}_\Gamma$ の m 次の微分を ω_f と書き表わすと，

$$\omega_{fg}=\omega_f\omega_g\qquad(f\in A_{2m}(\Gamma),\ g\in A_{2n}(\Gamma))$$

$$\omega_{f+g}=\omega_f+\omega_g \qquad (f, g\in A_{2m}(\Gamma))$$

が成り立つことは明らかである．逆に $\omega\in\mathcal{D}^m(\mathfrak{R}_\Gamma)$ をとり $\omega=\{(\varphi_\mu, V_\mu, t_\mu)\}$ と局所表示し，H 上の函数 $f(z)$ を

$$f(z)=\varphi_\mu(\pi(z))(d(t_\mu\circ\pi)(z)/dz)^m \qquad (z\in H\cap\pi^{-1}(V_\mu))$$

でもって定義する．$f(z)$ は ω の局所表示のとり方および $\pi(z)$ を含む V_μ のとり方によらずに決まり，(2.3.4) により $A_{2m}(\Gamma)$ の元である．更につくり方から $\omega=\omega_f$ が成り立つ．これをまとめて次の定理を得る．

定理 2.3.1　$A(\Gamma)_{\mathrm{even}}=\sum_m A_{2m}(\Gamma)$ とすると，$A(\Gamma)_{\mathrm{even}}$ と $\mathcal{D}(\mathfrak{R}_\Gamma)=\sum_m \mathcal{D}^m(\mathfrak{R}_\Gamma)$ は，上に述べた対応 $f\longmapsto\omega_f$ により次数を持った多元環として同型である．特に $A_{2m}(\Gamma)\neq\{0\}(m\in\boldsymbol{Z})$ である．

f は $A_{2m}(\Gamma)$ の0でない元とし，上の1°および2°の記号をそのまま用いる．$\boldsymbol{a}$ は $\mathfrak{R}_\Gamma$ の元とし z_0 は $\pi(z_0)=\boldsymbol{a}$ なる H^* の点とする．先ず $z_0\in H$ とし，$SL_2(\boldsymbol{C})$ の元 ρ を $\rho H=K$ 且つ $\rho z_0=O$ にとると，$V_{\boldsymbol{a}}$ における局所座標 $t_{\boldsymbol{a}}$ は $t_{\boldsymbol{a}}\circ\pi(z)=(\rho z)^e$ $(z\in U^*_{z_0})$ ととれた．ここで e は $\boldsymbol{a}$ の分岐指数である．この局所座標を用いると (2.3.3) は

$$\varphi_{\boldsymbol{a}}\circ\pi(z)=f(z)(d(\rho z)/dz)^{-m}(e(\rho z)^{e-1})^{-m} \qquad (z\in U^*_{z_0})$$

と書き改められるから，ここで $w=\rho z$ とおくと

$$\varphi_{\boldsymbol{a}}\circ\pi\circ\rho^{-1}(w)=e^{-m}f(\rho^{-1}w)(d(\rho^{-1}w)/dw)^m w^{-m(e-1)} \qquad (w\in\rho(U^*_{z_0}))$$

となる．よって両辺の w に関する位数を比べると*

(2.3.9)　$$\mathrm{ord}_w(\varphi_{\boldsymbol{a}}\circ\pi\circ\rho^{-1})=\mathrm{ord}_w(f(\rho^{-1}w)(d(\rho^{-1}w)/dw)^m)-m(e-1)$$

であるが，$t_{\boldsymbol{a}}\circ\pi\circ\rho^{-1}(w)=w^e$ であるから左辺は

(2.3.10)　$$\mathrm{ord}_w(\varphi_{\boldsymbol{a}}\circ\pi\circ\rho^{-1})=e\,\nu_{\boldsymbol{a}}(\varphi_{\boldsymbol{a}})=e\,\nu_{\boldsymbol{a}}(\omega_f)$$

である．また $d(\rho z)/dz$ は z_0 において零点も極も持たぬから

(2.3.11)　$$\mathrm{ord}_w(f(\rho^{-1}w)(d(\rho^{-1}w)/dw)^m)=\mathrm{ord}_{(z-z_0)}(f)$$

となるので

$$\nu_{\boldsymbol{a}}(f)=\frac{1}{e}\mathrm{ord}_{(z-z_0)}(f)$$

* $g=\sum_{n=N}^{\infty}a_n w^n\,(a_N\neq 0)$ のときに N を g の w に関する位数といい $\mathrm{ord}_w(g)=N$ と書く．

と定義するのは自然で，(2.3.9)～(2.3.11) によって

(2.3.12) $$\nu_{\boldsymbol{a}}(\omega_f)=\nu_{\boldsymbol{a}}(f)-m\left(1-\frac{1}{e}\right)$$

が成り立つ．従って $\nu_{\boldsymbol{a}}(f)$ の定義は z_0 および ρ のとり方によらない．特に $m=1$ の場合には $\nu_{\boldsymbol{a}}(f)\equiv 1-1/e \pmod{\boldsymbol{Z}}$ で，

(2.3.13) $$\omega_f \text{ が } \boldsymbol{a} \text{ で正則} \Longleftrightarrow \nu_{\boldsymbol{a}}(\omega_f)\geqq 0 \Longleftrightarrow \nu_{\boldsymbol{a}}(f)\geqq 0$$
$$\Longleftrightarrow f \text{ が } z_0 \text{ で正則}$$

であることを注意する．

次に z_0 が Γ の cusp であるとする．このときには $\sigma, h, t_{\boldsymbol{a}}$ は上の 2° と同じとすると

$$(f|[\sigma^{-1}]_{2m})(\sigma z)=\sum_{n=N}^{\infty}a_n e^{2\pi i\sigma z/h} \qquad (a_N\neq 0)$$
$$=\sum_{n=N}^{\infty}a_n(t_{\boldsymbol{a}}\circ\pi(z))^n \qquad (a_N\neq 0)$$

と展開されるから，(2.3.8) によって

$$\nu_{\boldsymbol{a}}(\varphi_{\boldsymbol{a}})=N-m$$

を得る．そこで $\nu_{\boldsymbol{a}}(f)=N$ と定義すると

(2.3.14) $$\nu_{\boldsymbol{a}}(\omega_f)=\nu_{\boldsymbol{a}}(f)-m$$

となるので $\nu_{\boldsymbol{a}}(f)$ は z_0 および σ のとり方にはよらない．また特に $f\in A_2(\Gamma)$ ならば

(2.3.15) $$\omega_f \text{ が cusp } \boldsymbol{a} \text{ で正則である} \Longleftrightarrow \nu_{\boldsymbol{a}}(f)\geqq 1$$
$$\Longleftrightarrow f \text{ が cusp } \boldsymbol{a} \text{ で零点を持つ}$$

ことがわかる．よって (2.3.13) および (2.3.15) により，次の定理を得る．

定理 2.3.2　定理 2.3.1 における対応 “$f\longmapsto\omega_f$” によって $\boldsymbol{C}$ 上の vector 空間として

$$S_2(\Gamma)\cong\mathcal{D}_0^1(\mathfrak{R}_\Gamma)$$

が成り立つ．

保型形式の因子を定義するために，§2.2 で定義した因子の概念を少し拡張する．compact な Riemann 面 $\mathfrak{R}$ にたいし，因子の係数を有理数まで拡張し

$$D(\mathfrak{R})_{\boldsymbol{Q}}=\{\sum c_{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{a}\mid c_{\boldsymbol{a}}\in\boldsymbol{Q},\ \text{有限個の } \boldsymbol{a} \text{ を除き } c_{\boldsymbol{a}}=0\}$$

とおく．$D(\mathfrak{R})_{\boldsymbol{Q}}$ の元を**有理数係数の因子**と言う．f が $A_{2m}(\Gamma)$ の 0 でない元とすると，$\mathfrak{R}_\Gamma$ の通常点 $\boldsymbol{a}$ に対しては $\nu_{\boldsymbol{a}}(f)=\nu_{\boldsymbol{a}}(\omega_f)$ であり，$\mathfrak{R}_\Gamma$ の楕円点および cusp の数は有限だから $\nu_{\boldsymbol{a}}(f)\neq 0$ となる $\mathfrak{R}_\Gamma$ の点 $\boldsymbol{a}$ は高々有限個しかない．よって

$$\mathrm{div}(f)=\sum \nu_{\boldsymbol{a}}(f)\boldsymbol{a}$$

は意味を持ち $D(\mathfrak{R}_\Gamma)_{\boldsymbol{Q}}$ の元である．(2.3.12), (2.3.14) と系 2.2.2 により次の定理を得る．

定理 2.3.3　k は偶数とする．$e_{\boldsymbol{a}}$ を $\boldsymbol{a}$ の分岐指数とすると，$A_k(\Gamma)$ の元 $f\ (\neq 0)$ に対して

$$\mathrm{div}(f)=\mathrm{div}(\omega_f)+\frac{k}{2}\sum_{\boldsymbol{a}}\left(1-\frac{1}{e_{\boldsymbol{a}}}\right)\boldsymbol{a},$$

$$\deg(\mathrm{div}(f))=k(g-1)+\frac{k}{2}\sum_{\boldsymbol{a}}\left(1-\frac{1}{e_{\boldsymbol{a}}}\right)$$

である．但し $\boldsymbol{a}$ が cusp のときは $1/e_{\boldsymbol{a}}=0$ とする．

注意 1　$\boldsymbol{a}$ が通常点であれば $1-1/e_{\boldsymbol{a}}=0$ であるから定理の式の右辺の和は有限和である．

注意 2　特に $m=0$ の場合には，$A_0(\Gamma)$ の元 $f\ (\neq 0)$ の因子 $\mathrm{div}(f)$ は f に対応する $K(\mathfrak{R}_\Gamma)^\times$ の元の因子に等しい．

注意 3　$k=2m$ とすると，$A_k(\Gamma)$ の元 f に対して H 上の m 次の微分として

$$\omega_f\circ\pi=f(z)(dz)^m$$

が成り立つから

$$\omega_f=f(z)(dz)^m$$

としばしば書き表わされる．よって $\mathrm{div}(dz)=-\sum\left(1-\frac{1}{e_{\boldsymbol{a}}}\right)\boldsymbol{a}$ と定義すると

$$\mathrm{div}(\omega_f)=\mathrm{div}(f)+m\,\mathrm{div}(dz)$$

が成り立つ．

系 2.3.4　k は偶数とする．Γ が cusp を持つとし Γ の cusp の同値類の個数を $r(\geqq 1)$ とする．x は Γ の cusp であるとし $SL_2(\boldsymbol{R})$ の元 σ を $\sigma x=\infty$ にとる．$f, g\in G_k(\Gamma)$ とし

$$(f|[\sigma^{-1}]_k)(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n e^{2\pi niz/h},\quad (g|[\sigma^{-1}]_k)(z)=\sum_{n=0}^{\infty}b_n e^{2\pi niz/h}$$

を x における Fourier 展開とする．もし $a_n=b_n$ が $n\leqq k(g-1)+(kr/2)+1$ なる任意の自然数 n に対して成り立つならば，$f=g$ である．よって $\dim_{\boldsymbol{C}} G_k(\Gamma)\leqq k(g-1)+(kr/2)+1$ である．

証明　$\omega=\omega_{(f-g)}$ とおく．$\omega\neq 0$ と仮定すると，(2.3.14) により ω は $\pi(x)$ において少くとも $k(g-1)+k(r-1)/2+1$ 位の零点を持っている．f,g は正則であるから，ω は定理 2.3.3 によって $\mathfrak{R}_\Gamma$ の $k/2$ 次の微分であって，$\mathfrak{R}_\Gamma$ の cusp 以外では正則で x 以外の cusp では高々 $k/2$ 位の極しか持たないから $\deg(\mathrm{div}(\omega))\geqq k(g-1)+1$ となるが，これは系 2.2.2 に矛盾する．よって $\omega=0$ で $f=g$ である．　(証明終)

次に k が奇数の場合を考える．$-1\notin\Gamma$ とし f は $A_k(\Gamma)$ の 0 でない元とする．f^2 は $A_{2k}(\Gamma)$ の元であるから

$$\nu_{\boldsymbol{a}}(f)=\frac{1}{2}\nu_{\boldsymbol{a}}(f^2)\qquad(\boldsymbol{a}\in\mathfrak{R}_\Gamma)$$

とおき，

$$\mathrm{div}(f)=\sum_{\boldsymbol{a}}\nu_{\boldsymbol{a}}(f)\boldsymbol{a}$$

と定義する．

定理 2.3.5　k は奇数とし，$-1\notin\Gamma$ とする．$e_{\boldsymbol{a}}$ を $\boldsymbol{a}$ の分岐指数とすると，$A_k(\Gamma)$ の 0 でない元 f に対して

(1)

$$\mathrm{div}(f)=\frac{1}{2}\mathrm{div}(\omega_{f^2})+\frac{k}{2}\sum_{\boldsymbol{a}}\left(1-\frac{1}{e_{\boldsymbol{a}}}\right)\boldsymbol{a},$$

$$\deg(\mathrm{div}(f))=k(g-1)+\frac{k}{2}\sum_{\boldsymbol{a}}\left(1-\frac{1}{e_{\boldsymbol{a}}}\right).$$

(2)

$$\nu_{\boldsymbol{a}}(f)\equiv\left\{\begin{array}{ll}\frac{1}{2} & (\boldsymbol{a}:\text{非正則 cusp})\\ \text{整数}/e_{\boldsymbol{a}} & (\boldsymbol{a}:\text{楕円点})\\ 0 & (\boldsymbol{a}:\text{それ以外の点})\end{array}\right\}(\mathrm{mod}\ \boldsymbol{Z}).$$

(3)

$$\frac{1}{2}\nu_{\boldsymbol{a}}(\omega_{f^2})\equiv\left\{\begin{array}{ll}\frac{1}{2} & (\boldsymbol{a}:\text{正則な cusp})\\ 0 & (\boldsymbol{a}:\text{それ以外の点})\end{array}\right\}(\mathrm{mod}\ \boldsymbol{Z}).$$

が成り立つ．但し $\boldsymbol{a}$ が cusp のときは $1/e_{\boldsymbol{a}}=0$ とする．

証明 （1）は定理 2.3.3 により，また（2）の合同式は $\boldsymbol{a}$ が cusp のときには (2.1.15) により直ちにわかる．$\boldsymbol{a}$ が cusp でないと仮定し，$\pi(z_0)=\boldsymbol{a}$ となる H の点 z_0 をとると

$$\nu_{\boldsymbol{a}}(f)=\frac{1}{2}\nu_{\boldsymbol{a}}(f^2)=\frac{1}{2e}\mathrm{ord}_{(z-z_0)}(f^2)=\frac{1}{e}\mathrm{ord}_{(z-z_0)}(f)$$

となるから（2）の合同式を $\boldsymbol{a}$ が cusp でない場合にも得る．次に（3）を示す．定義により

$$\frac{1}{2}\nu_{\boldsymbol{a}}(\omega_{f^2})=\nu_{\boldsymbol{a}}(f)-\frac{k}{2}\left(1-\frac{1}{e_{\boldsymbol{a}}}\right)$$

が成り立つから，$\boldsymbol{a}$ が楕円点以外であるならば（3）は（2）より明らかである．もし $\boldsymbol{a}$ が楕円点ならば，補題 1.5.6（2）によって $e_{\boldsymbol{a}}$ は常に奇数であり，$\nu_{\boldsymbol{a}}(\omega_{f^2})=u$ とすると（2）から $ue_{\boldsymbol{a}}+ke_{\boldsymbol{a}}-k$ が偶数でなければならぬから，u は偶数であることがわかる．よって

$$\frac{1}{2}\nu_{\boldsymbol{a}}(\omega_{f^2})\equiv 0 \qquad \mathrm{mod}(\boldsymbol{Z})$$

を得る． （証明終）

§2.4 $\Gamma\backslash H^*$ の測度

ここで $\Gamma\backslash H^*$ の測度を計算しよう．

補題 2.4.1 m を Γ の楕円点の位数の最小公倍数とすると，$A_{2m}(\Gamma)$ の元 $f(z)\,(\neq 0)$ で Γ の cusp および楕円点において零点も極も持たないものが存在する．

証明 $\nu_{\boldsymbol{a}}(f)$ の定義により，Γ の楕円点および cusp $\boldsymbol{a}$ において $\nu_{\boldsymbol{a}}(f)=0$ となる $A_{2m}(\Gamma)$ の元 $f(\neq 0)$ の存在を示せばよい．$A_{2m}(\Gamma)$ の 0 でない元 g をとると，m のとり方により $\mathrm{div}(g)$ は $D(\mathfrak{R}_\Gamma)$ に属することに注意する．$\boldsymbol{a}_1,\cdots,\boldsymbol{a}_r$ を $\mathfrak{R}_\Gamma$ の楕円点および cusp の全体とし，整数 n を

$$-\deg(\mathrm{div}(g))-r+n>2g-2$$

にとる．$\mathfrak{R}_\Gamma$ の楕円点および cusp 以外の点 $\boldsymbol{b}$ をとり

$$\mathfrak{a}=-\mathrm{div}(g)+n\boldsymbol{b}$$

$$\mathfrak{b}=-\mathrm{div}(g)-\sum_{\mu=1}^{r}\boldsymbol{a}_\mu+n\boldsymbol{b}$$

とおくと，系 2.2.2（3）により

$$\dim L(\mathfrak{a})-\dim L(\mathfrak{b})=r$$

であるから，$A_0(\Gamma)\,(\cong K(\mathfrak{R}_\Gamma))$ の 0 でない元 $h(z)$ で

$$\nu_{\boldsymbol{a}_\mu}(h)=-\nu_{\boldsymbol{a}_\mu}(g)$$

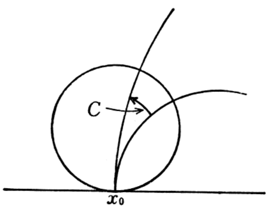
となるものが存在する．よって $f=hg$ とおくと f が求めるものである．

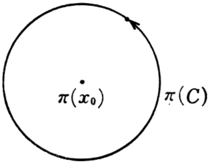
（証明終）

補題 2.4.2 k は偶数とし，$A_k(\Gamma)$ の 0 でない元 $f(z)$ が Γ の cusp $\boldsymbol{x}_0$ において零点も極も持たないものとする．C は $\boldsymbol{x}_0$ の近傍の微分可能な曲線で，（1）$\pi(C)$ が $\pi(\boldsymbol{x}_0)$ のまわりを正の向きに 1 周し，（2）C の終点と始点を除くと C と $\pi(C)$ は 1 対 1 に対応しているようなものとする．C を $\boldsymbol{x}_0$ に近づけると

$$\lim\int_C d\log f=\lim\int_C y^{-1}dz=0$$

である．





証明 $\boldsymbol{a}=\pi(x_0)$ とおき，x_0 の近傍 U^* を §1.8 と同様に $V=\pi(U^*)$ が座標近傍になるようにとり t を V における局所座標とする．C は x_0 に十分近くとると U^* に含まれるとして差支えない．$SL_2(\boldsymbol{R})$ の元 σ を $\sigma x_0=\infty$ なるものとすると

$$\int_C d\log f=\int_C d\log(f(z)j(\sigma,z)^k)-k\int_C d\log j(\sigma,z)$$

である．$f(z)j(\sigma,z)^k=(f|[\sigma^{-1}]_k)(\sigma z)$ は V 上の函数と考えられ（(2.1.13)参照），仮定により $\boldsymbol{a}$ において零点も極も持たないから右辺の第1項は C を x_0 に近づけると 0 に近づく．$w=\sigma z$, $\sigma^{-1}=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ とおくと

$$(2.4.1)\qquad \int_C d\log j(\sigma,z)=-\int_{\sigma(C)} d\log j(\sigma^{-1},w)=-\int_{w_0}^{w_0+h} d\log(cw+d)$$
$$=-\log\left|\frac{cw_0+d+h}{cw_0+d}\right|-i\arg\left(\frac{cw_0+d+h}{cw_0+d}\right)$$

である．ここで w_0, w_0+h $(h>0)$ は $\sigma(C)$ の始点と終点で，h は C に無関係に決まる．$C\longrightarrow x_0$ とすると $\sigma(C)\longrightarrow\infty$ となるから w_0 は ∞ に近づき，よって (2.4.1) の右辺の第2項も 0 に近づく．故に $\lim\int_C d\log f=0$ を得る．同様に，上と同じ記号を用いると (2.1.2) および (2.1.3) により

$$\left|\int_C y^{-1}dz\right|\leqq\int_{\sigma(C)}\mathrm{Im}(w)^{-1}|dw|$$

となるから，$C\longrightarrow x_0$ とすると $\sigma(C)\longrightarrow\infty$ となって $\lim\int_C y^{-1}dz=0$ を得る．　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　(証明終)

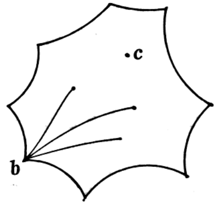
定理 2.4.3 Γ は第1種 Fuchs 群とし，$\mathfrak{R}_\Gamma$ の genus を g とする．$\mathfrak{R}_\Gamma$ の各点 $\boldsymbol{a}$ の分岐指数を $e_{\boldsymbol{a}}$ とすると

$$\frac{1}{2\pi}v(\Gamma\backslash H^*)=2g-2+\sum_{\boldsymbol{a}}\left(1-\frac{1}{e_{\boldsymbol{a}}}\right)$$

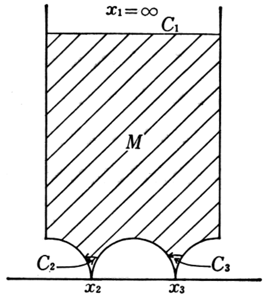
である．但し $\boldsymbol{a}$ が cusp なら $1/e_{\boldsymbol{a}}=0$ とする．

証明 m を補題 2.4.1 のようにとり，A_{2m} の元 $f(z)$ $(\neq 0)$ を Γ の楕円点および cusp では零点も極も持たないようにとる．$\mathfrak{R}_\Gamma$ は2次元の compact な実多様体であるから，適当な閉曲線で切り開いて単連結にできる．即ち $\mathfrak{R}_\Gamma$ 上の曲線 L_μ $(1\leqq\mu\leqq l)$ が存在して $\mathfrak{R}_\Gamma-\bigcup_\mu L_\mu$ は単連結である．この L_μ はその上に Γ の cusp を持たないようにとれる．更に $\bigcup_\mu L_\mu$ 上の1点 $\boldsymbol{b}$ をとり，この点と $\mathfrak{R}_\Gamma-\bigcup_\mu L_\mu$ 上にある楕円点および cusp とを互いに交わらない曲線 L_μ $(l+1\leqq\mu\leqq t)$ で結ぶ（次頁図1）．L_μ $(l+1\leqq\mu\leqq t)$ は少しずらすことにより $f(z)$ の零点および極をその上に持たないとしてよい．次に $\mathfrak{R}_\Gamma-\bigcup_{\mu=1}^{\nu}L_\mu$ 上の点 $\boldsymbol{c}$ と，$\pi(z_0)=\boldsymbol{c}$ となる H の点 z_0 をとる．z_0 を始点としその π による像が

$\mathfrak{R}_\Gamma-\bigcup_{\mu=1}^{\nu}L_\mu$ に含まれる曲線に沿って接続することにより，H 内の $\mathfrak{R}_\Gamma-\bigcup_{\mu=1}^{\nu}L_\mu$ と同相の開集合 U を得る．$F=\bar{U}$ とおくと明らかに F は Γ の基本領域である．さて F の頂点となる Γ の cusp を $x_1,\cdots,x_r$ とする．x_ν の近傍において F の境界を $\pi(C_\nu)$ が $\pi(x_\nu)$ を正の方向に1回転するような曲線 C_ν で結ぶ．このようにして F の境界と C_ν に囲まれた compact 集合を M とする（M, C_ν は例えば図2のようになる）．$\Gamma\backslash H^*$ の測度の定義により $z=x+iy$ とすると



（図1）



（図2）

$$v(\Gamma\backslash H^*)=v(F)=\lim_{\substack{C_\nu\to x_\nu\\1\leqq\nu\leqq r}}\int_M\frac{dx\wedge dy}{y^2}$$

であるが，∂M を M の境界に正の向きを付けたものとすると Stokes の定理により

$$\int_M\frac{dx\wedge dy}{y^2}=\int_{\partial M}\frac{dz}{y}=\int_{\partial M}\left(\frac{dz}{y}+\frac{i}{m}d\log f\right)-\frac{i}{m}\int_{\partial M}d\log f$$

となる．ところで γ が Γ の元ならば $f(\gamma z)=j(\gamma,z)^m f(z)$ であるから

$$(d\log f)\circ\gamma-d\log f=2m\,d\log j(\gamma,z)$$

となるので，補題 1.4.3 と比べると $y^{-1}dz+(i/m)d\log f$ は Γ の作用で不変である．境界 ∂M のうち C_ν $(1\leqq\nu\leqq r)$ 以外の部分は，作り方より Γ の元で向きが逆になるように移り合うような曲線の組からなるから，$\partial M-\bigcup_\nu C_\nu$ 上における $y^{-1}dz+(i/m)d\log f$ の積分は0である．よって

$$\int_{\partial M}\left(\frac{dz}{y}+\frac{i}{m}d\log f\right)=-\sum_{\nu=1}^{r}\int_{C_\nu}\left(\frac{dz}{y}+\frac{i}{m}d\log f\right)$$

となるが，$C_\nu\longrightarrow x_\nu$ とすると，この右辺は補題 2.4.2 により0に近づく．また C_ν が十分 x_ν に近いと $f(z)$ の零点および極はすべて M の内部にあるとしてよいから

$$-\frac{i}{m}\int_{\partial M}d\log f=\frac{2\pi}{m}\deg(\mathrm{div}(f))$$

である．よって補題 2.3.3 により定理を得る．　(証明終)

§2.5 $G_k(\boldsymbol{\Gamma}), S_k(\boldsymbol{\Gamma})$ の次元

$G_k(\Gamma), S_k(\Gamma)$ の次元を Riemann-Roch の定理を用いて計算しよう．weight k が奇数の場合には $-1\notin\Gamma$ であると仮定する．[　] を Gauss の記号，即ち実数 r に対し $[r]=\max\{n\in\boldsymbol{Z}\,|\,n\leqq r\}$ とし，$D(\mathfrak{R}_\Gamma)_{\boldsymbol{Q}}$ の元 $\mathfrak{a}=\sum c_{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{a}$ に対して $[\mathfrak{a}]=\sum[c_{\boldsymbol{a}}]\boldsymbol{a}$ とおく．Γ の cusp に対応する $\mathfrak{R}_\Gamma$ の点を $\boldsymbol{b}_1,\cdots,\boldsymbol{b}_r$ とする．k が奇数ならば，$\{\boldsymbol{b}_\nu\}_{\nu=1}^r$ には $\boldsymbol{b}_1,\cdots,\boldsymbol{b}_u$ が正則な cusp で $\boldsymbol{b}_{u+1},\cdots,\boldsymbol{b}_r$ が非正則な cusp となるように順番が付けられているものとする．$A_k(\Gamma)$ の 0 でない元 f_0 をとると（f_0 の存在は k が偶数ならば 定理 2.3.1 で示した．k が奇数の場合には定理 2.6.8 で示す）次の補題が成り立つ．

補題 2.5.1 上の記号を用いると，$\boldsymbol{C}$ 上の vector 空間として次の同型が成り立つ．

(1) $G_k(\Gamma)\cong L([\mathrm{div}(f_0)])$.

(2) k が偶数のときは，$S_k(\Gamma)\cong L\left(\left[\mathrm{div}(f_0)-\sum_{\nu=1}^{r}\boldsymbol{b}_\nu\right]\right)$.

k が奇数のときは，$S_k(\Gamma)\cong L\left(\left[\mathrm{div}(f_0)-\sum_{\nu=1}^{u}\boldsymbol{b}_\nu-\frac{1}{2}\sum_{\nu=u+1}^{r}\boldsymbol{b}_\nu\right]\right)$.

証明 $A_k(\Gamma)=\{ff_0\,|\,f\in A_0(\Gamma)\}$ であるから，定義により

$$\begin{aligned}G_k(\Gamma)&=\{ff_0\,|\,f\in A_0(\Gamma),\ f=0 \text{ または } \mathrm{div}(ff_0)\geqq 0\}\\&\cong\{f\,|\,f\in A_0(\Gamma),\ f=0 \text{ または } \mathrm{div}(f)+\mathrm{div}(f_0)\geqq 0\}\\&\cong\{\varphi\,|\,\varphi\in K(\mathfrak{R}_\Gamma),\ \varphi=0 \text{ または } \mathrm{div}(\varphi)+\mathrm{div}(f_0)\geqq 0\}\end{aligned}$$

となるが，$\mathrm{div}(\varphi)+\mathrm{div}(f_0)\geqq 0$ と $\mathrm{div}(\varphi)+[\mathrm{div}(f_0)]\geqq 0$ は同値であるので

$$=L([\mathrm{div}(f_0)])$$

を得る．次に ff_0 が $G_k(\Gamma)$ の 0 でない元とすると

$$ff_0\in S_k(\Gamma)\Longleftrightarrow \nu_{\boldsymbol{b}_\nu}(ff_0)>0\qquad(1\leqq\nu\leqq r)$$

である．k が偶数であるか或いは k が奇数で $1\leqq\nu\leqq u$ ならば，これは

$$\nu_{\boldsymbol{b}_\nu}(ff_0)>0\Longleftrightarrow\nu_{\boldsymbol{b}_\nu}(ff_0)\geqq 1\Longleftrightarrow\nu_{\boldsymbol{b}_\nu}(f)+\nu_{\boldsymbol{b}_\nu}(f_0)-1\geqq 0$$

となる．もし k が奇数で $u+1\leqq\nu\leqq r$ ならば

$$\nu_{b_\nu}(ff_0)>0 \iff \nu_{b_\nu}(ff_0)\geqq\frac{1}{2} \iff \nu_{b_\nu}(f)+\nu_{b_\nu}(f_0)-\frac{1}{2}\geqq 0$$

となる．よって$G_k(\Gamma)$の場合と全く同様にして（2）が示される．（証明終）

補題 2.5.1 の（1）および（2）の右辺の次元を計算しよう．$\mathfrak{R}_\Gamma$ の楕円元全体を $\{\boldsymbol{a}_1,\cdots,\boldsymbol{a}_m\}$ とし，$\boldsymbol{a}_\mu$ に対応する楕円点の位数（$\boldsymbol{a}_\mu$ の分岐指数）を e_μ とおく．$\mathfrak{R}_\Gamma$ の genus を g とし

$$d=2g-2+\sum_{\mu=1}^{m}\left(1-\frac{1}{e_\mu}\right)+r$$

とおくと，$A_k(\Gamma)$ の任意の0でない元 g に対して $\deg(\mathrm{div}(g))=kd/2$ であり，定理 2.4.3 により $d=(1/2\pi)v(\Gamma\backslash H^*)>0$ である．

1°　$k<0$ ならば，$\deg[\mathrm{div}(f_0)]\leqq\deg(\mathrm{div}(f_0))=(k/2)d<0$ であるから $\dim S_k(\Gamma)=\dim G_k(\Gamma)=0$ がわかる．

2°　$k=0$ のときには，f_0 は $K(\mathfrak{R}_\Gamma)^\times$ の元と考えられるから

$$\dim G_k(\Gamma)=\boldsymbol{l}(\mathrm{div}(f_0))=1,$$

$$\dim S_k(\Gamma)=l\left(\mathrm{div}(f_0)-\sum_{\nu=1}^{r}\boldsymbol{b}_\nu\right)=\begin{cases}1 & (r=0)\\ 0 & (r\geqq 1)\end{cases}$$

である．

3°　$k\geqq 3$ と仮定する．

$$\mathfrak{a}=\begin{cases}\left[\mathrm{div}(f_0)-\sum_{\nu=1}^{r}\boldsymbol{b}_\nu\right] & (k：偶数)\\ \left[\mathrm{div}(f_0)-\sum_{\nu=1}^{n}\boldsymbol{b}_\nu-\frac{1}{2}\sum_{\nu=n+1}^{r}\boldsymbol{b}_\nu\right] & (k：奇数)\end{cases}$$

とおくと $\dim S_k(\Gamma)=\boldsymbol{l}(\mathfrak{a})$ である．

$$\mathfrak{a}=\begin{cases}\mathrm{div}(\omega_{f_0})+\sum_{\mu=1}^{m}\left[\frac{k}{2}\left(1-\frac{1}{e_\mu}\right)\right]\boldsymbol{a}_\mu+\frac{k-2}{2}\sum_{\nu=1}^{r}\boldsymbol{b}_\nu & (k：偶数)\\ \frac{1}{2}\mathrm{div}(\omega_{f_0^2})+\sum_{\mu=1}^{m}\left[\frac{k}{2}\left(1-\frac{1}{e_\mu}\right)\right]\boldsymbol{a}_\mu+\frac{k-2}{2}\sum_{\nu=1}^{u}\boldsymbol{b}_\nu+\frac{k-1}{2}\sum_{\nu=u+1}^{r}\boldsymbol{b}_\nu & (k：奇数)\end{cases}$$

であるから

$$\deg(\mathfrak{a})\geqq\frac{k}{2}(2g-2)+\sum_{\mu=1}^{m}\left[\frac{k}{2}\left(1-\frac{1}{e_\mu}\right)\right]+\frac{k-2}{2}r$$

となる．k が奇数ならば $\frac{k}{2}(e_\mu-1)$ が整数となり

$$\left[\frac{k}{2}\left(1-\frac{1}{e_\mu}\right)\right] \geqq \frac{k-2}{2}\left(1-\frac{1}{e_\mu}\right)$$

が成り立つので

$$\deg(\mathfrak{a})-(2g-2) \geqq \frac{k-2}{2}\left\{(2g-2)+\sum_{\mu=1}^{m}\left(1-\frac{1}{e_\mu}\right)+r\right\}$$

$$=\frac{k-2}{2}d>0$$

である．また $\deg([\operatorname{div}(f_0)]) \geqq \deg(\mathfrak{a})$ であるから

$$\deg([\operatorname{div}(f_0)]-(2g-2))>0$$

となるから，補題 2.5.1 および系 2.2.2（3）により

$$\dim G_k(\Gamma)=\deg([\operatorname{div}(f_0)])-g+1,$$
$$\dim S_k(\Gamma)=\deg(\mathfrak{a})-g+1$$

である．更に $\deg([\operatorname{div}(f_0)])-\deg(\mathfrak{a})=r$ (k：偶数)，または u (k：奇数) であるから

$$\dim G_k(\Gamma)-\dim S_k(\Gamma)=\begin{cases} r & (k\text{：偶数}) \\ u & (k\text{：奇数}) \end{cases}$$

がわかる．

4° $k=2$ のときには，$S_2(\Gamma) \cong \mathcal{D}_0^1(\mathfrak{R}_\Gamma)$ であったから，(2.2.14) により

$$\dim S_k(\Gamma)=g$$

である．次に $[\operatorname{div}(f_0)]=\operatorname{div}(\omega_{f_0})+\sum_{\nu=1}^{r}\boldsymbol{b}_\nu$ であるから，(2.2.12) と (2.2.13) により

$$l(\operatorname{div}(\omega_{f_0})-[\operatorname{div}(f_0)])=l\left(-\sum_{\nu=1}^{r}\boldsymbol{b}_\nu\right)=\begin{cases} 0 & (r>0) \\ 1 & (r=0) \end{cases}$$

となるので定理 2.2.1 を適用すると

$$\dim G_k(\Gamma)=l([\operatorname{div}(f_0)])=\begin{cases} g+r-1 & (r>0) \\ g & (r=0) \end{cases}$$

を得る.

5° $k=1$ とする. 定理 2.2.1 により

$$l([\operatorname{div}(f_0)])-l(\operatorname{div}(\omega_{f_0^2})-[\operatorname{div}(f_0)])=\deg([\operatorname{div}(f_0)])-g+1$$

であるが, 定理 2.3.4 から

$$L(\operatorname{div}(\omega_{f_0^2})-[\operatorname{div}(f_0)])=L\left(\left[\operatorname{div}(f_0)-\sum_{\nu=1}^{u}\boldsymbol{b}_\nu-\frac{1}{2}\sum_{\nu=u+1}^{r}\boldsymbol{b}_\nu\right]\right)\cong S_1(\Gamma)$$

であり $\deg([\operatorname{div}(f_0)])=\deg(\operatorname{div}(f_0))-\frac{1}{2}\sum_{\mu=1}^{m}\left(1-\frac{1}{e_\mu}\right)-\frac{v}{2}=g-1+\frac{u}{2}$ なので

$$\dim G_1(\Gamma)-\dim S_1(\Gamma)=\frac{u}{2}$$

を得る. 但し $\dim G_1(\Gamma)$, $\dim S_1(\Gamma)$ の各々の次元を一般的に計算する方法は, 知られていない.

以上をまとめて次の定理を得る.

定理 2.5.2 k は偶数とする. g は $\mathfrak{R}_\Gamma$ の genus, $\{e_1,\cdots,e_m\}$ は Γ の同値でない楕円元の位数, r は Γ の cusp の同値類の個数とすると, 次の式を得る.

$$\dim S_k(\Gamma)=\begin{cases}(k-1)(g-1)+\sum_{\mu=1}^{m}\left[\frac{k}{2}\left(1-\frac{1}{e_\mu}\right)\right]+\left(\frac{k}{2}-1\right)r & (k>2)\\ g & (k=2)\\ 1 & (k=0,\ r=0)\\ 0 & (k=0,\ r>0)\\ 0 & (k>0).\end{cases}$$

$$\dim G_k(\Gamma)=\begin{cases}\dim S_k(\Gamma)+r & (k>2)\\ \dim S_k(\Gamma)+r-1=g+r-1 & (k=2,\ r>0)\\ \dim S_k(\Gamma)=g & (k=2,\ r=0)\\ 1 & (k=0)\\ 0 & (k<0).\end{cases}$$

定理 2.5.3 k は奇数とし, g および $\{e_\mu\}_{\mu=1}^{m}$ は定理 2.5.2 の通りとする. $-1\notin\Gamma$ とし, u,v を各々正則および非正則の cusp の同値類の個数とすると,

次の式を得る.

$$\dim S_k(\Gamma)=\begin{cases}(k-1)(g-1)+\sum_{\mu=1}^{m}\left[\frac{k}{2}\left(1-\frac{1}{e_\mu}\right)\right]+\frac{(k-2)}{2}u+\frac{(k-1)}{2}v & (k\geqq 3)\\ 0 & (k<0).\end{cases}$$

$$\dim G_k(\Gamma)=\begin{cases}\dim S_k(\Gamma)+u & (k\geqq 3)\\ \dim S_k(\Gamma)+\frac{u}{2} & (k=1)\\ 0 & (k<0).\end{cases}$$

§ 2.6 Poincaré 級数

H 上の有理型函数から，保型形式を級数の形で作る．正則函数に関する一般的な定理から始めよう．

定理 2.6.1 z_0 は H の点とし，正数 δ を $M=\{z\,|\,|z-z_0|\leqq 2\delta\}$ が H に含まれるように十分小さくとる．k は任意の実数で p は $p\geqq 1$ なる実数とすると，定数 C が存在して，M で連続で M の内部で正則な任意の函数 $f(z)$ に対して

$$|f(z_1)|\leqq C\left(\int_M |f(z)\operatorname{Im}(z)^{k/2}|^p dv(z)\right)^{1/p} \qquad (|z_1-z_0|\leqq\delta)$$

が成り立つ.

証明 $f(z)$ の z_1 における Taylor 展開を $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-z_1)^n$ とすると

$$\int_{|z-z_1|\leqq\delta}f(z)\,dxdy=\int_0^{2\pi}\int_0^{\delta}\sum_{n=0}^{\infty}a_n r^{n+1}e^{in\theta}drd\theta=\pi\delta^2 a_0$$

となるから，$C_1=\inf\{\operatorname{Im}(z)^{k/2-2}|z\in M\}$ とおくと

$$\begin{aligned}|f(z_1)|&\leqq(\pi\delta^2)^{-1}\int_M|f(z)|\,dxdy\\ &\leqq(\pi\delta^2C_1)^{-1}\int_M|f(z)\operatorname{Im}(z)^{k/2}|\,dv(z)\end{aligned}$$

である．q を $1<q\leqq\infty$ で $1/p+1/q=1$ ととると，Hörder の不等式により

$$(2.6.1)\qquad \leqq(\pi\delta^2C_1)^{-1}\left(\int_M dv(z)\right)^{1/q}\left(\int_M|f(z)\operatorname{Im}(z)^{k/2}|^p dv(z)\right)^{1/p}$$

となるから，$C=(\pi\delta^2 C_1)^{-1}\left(\int_M dv(z)\right)^{1/q}$ ととれば定理の定数を得る．

(証明終)

次の系は上の定理から直ちにわかる．

系 2.6.2 k, p は定理 2.6.1 と同じとし，U は H の開集合とすると，U の任意の点 z_0 に対して定数 $C(z_0)$ で，U 上の任意の正則な函数 $f(z)$ に対して

$$|f(z_0)|\leqq C(z_0)\left(\int_U |f(z)\mathrm{Im}(z)^{k/2}|^p dv(z)\right)^{1/p}$$

が成立するようなものが存在する．

次の系は第 6 章で用いる．

系 2.6.3 k, p は定理 2.6.1 と同じとする．$f(z)$ は H 上正則な函数であって $\int_H |f(z)\mathrm{Im}(z)^{k/2}|^p dv(z)<\infty$ となるものとし，a, b は $0<a<b$ なる実数とする．$z=x+iy$ とすると $a\leqq y\leqq b$ において y に関して一様に

$$\lim_{|x|\to\infty}|f(z)|=0$$

が成り立つ．

証明 $\delta>0$ を $a>2\delta>0$ にとり

$$U_n=\{z\in H \mid a-2\delta\leqq \mathrm{Im}(z)\leqq b+2\delta,\ n-2\delta\leqq \mathrm{Re}(z)\leqq n+1+2\delta\},$$

$$V_n=\{z\in H \mid a\leqq \mathrm{Im}(z)\leqq b,\ n\leqq \mathrm{Re}(z)\leqq n+1\}$$

とおく．$z_0\in V_n$ とすると，$\{z \mid |z-z_0|\leqq 2\delta\}\subset U_n$ であるから，q を $1<q\leqq\infty$ かつ $1/p+1/q=1$ にとると，(2.6.1) により

$$|f(z_0)|\leqq(\pi\delta^2 C_1)^{-1}v(U_n)^{1/q}\left(\int_{U_n}|f(z)\mathrm{Im}(z)^{k/2}|^p dv(z)\right)^{1/p}$$

となる．ここで $C_1=(a-2\delta)^{k/2-2}$ であり，dv は $SL_2(\boldsymbol{R})$ の作用で不変であるから，U_n の測度 $v(U_n)$ は n には無関係である．仮定により

$$\lim_{|n|\to\infty}\int_{U_n}|f(z)\mathrm{Im}(z)^{k/2}|^p dv(z)=0$$

であるから，$a\leqq y\leqq b$ において y に関して一様に

$$\lim_{|x|\to\infty}|f(z)|=0$$

となる． (証明終)

補題 2.6.4 $\{f_n(z)\}$ は $\boldsymbol{C}$ の領域 D で正則な函数の列とする．z_0 が D の1点であるとき，$\{f_n\}$ が $D-\{z_0\}$ で広義一様に $f(z)$ に収束するならば $f(z)$ は D 上の正則函数である．

証明 D の各点 z_1 において，近傍 $V(z_1)$ を $V(z_1)=\{z\,|\,|z-z_1|<r\}$ ととる．もし $z_1\neq z_0$ ならば，r は $z_0\notin\bar{V}(z_1)$ であるように十分小さくとる．$z\in V(z_1)$ ならば

$$f_n(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta-z_1|=r}\frac{f_n(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta$$

であるから，$z\neq z_0$ ならば $n\longrightarrow\infty$ とする事により

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta-z_1|=r}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta\qquad(z\in V(z_1))\tag{2.6.2}$$

を得る．特に $z_1\neq z_0$ ならば f は $V(z_1)$ で正則であり，z_1 は任意だから f は $D-\{z_0\}$ で正則である．$z_1=z_0$ にとると (2.6.2) は $V(z_0)-\{z_0\}$ の各点 z で成り立つから

$$f(z_0)=\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta-z_0|=r}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z_0}d\zeta$$

と定義してやると，f は z_0 においても正則である． (証明終)

系 2.6.5 k,p は定理 2.6.1 と同じとする．U は H の領域とし U で正則な函数 $f(z)$ に対し

$$\|f\|_U=\left(\int_U|f(z)\,\mathrm{Im}(z)^{k/2}|^p dv(z)\right)^{1/p}$$

とおく．U で正則な函数の列 $\{f_n\}$ が norm$\|\ \|_U$ に関して Cauchy 列をなすならば，$\{f_n\}$ は U 上の正則函数に広義一様に収束する．

証明 系 2.6.2 により，U の各点 z に対して複素数の列 $\{f_n(z)\}$ は Cauchy 列をなすから，U 上の函数 f を $f(z)=\lim_{n\to\infty}f_n(z)$ でもって定義する．$z_0\in U$ とし $\delta>0$ を $\{z\,|\,|z-z_0|\leqq 2\delta\}\subset U$ にとると，定理 2.6.1 により 定数 C が存在して，$|z-z_0|\leqq\delta$ となる任意の z に対し

$$|f_n(z)-f_m(z)|\leqq C\|f_m-f_n\|_U$$

が成立する．任意の $\varepsilon>0$ に対し，正数 N を $m,n>N$ ならば $\|f_m-f_n\|<\varepsilon/2C$ となるようにとる．また，$|z-z_0|\leqq\delta$ なる z に対し $n(z)>N$ を $|f(z)$

$-f_{n(z)}(z)|<\varepsilon/2$ にとる．さて $n>N$ ならば，$|z-z_0|\leqq\delta$ なる任意の z に対し

$$|f(z)-f_n(z)|\leqq|f(z)-f_{n(z)}(z)|+|f_{n(z)}(z)-f_n(z)|<\varepsilon$$

となるので，$\{f_n\}$ は $|z-z_0|\leqq\delta$ 上で f に一様に収束する．z_0 は任意であったから $\{f_n\}$ は f に広義一様に収束するので，f は U 上の正則函数である．

（証明終）

Γ は Fuchs 群とし χ は Γ の有限位数の指標とする．k は整数とし，もし $-1\in\Gamma$ ならば $\chi(-1)=(-1)^k$ と仮定する．Λ は Γ の部分群とし H 上の有理型函数 $f(z)$ が次の（i）(ii)(iii) を満たすとする．

（i） 任意の $\lambda\in\Lambda$ に対し，$f|[\lambda]_k=\chi(\lambda)f$ が成り立つ．

（ii） $f(z)$ の極で Λ 同値でないものは高々有限個である．

(iii) $\{z_1,\cdots,z_m\}$ を $f(z)$ の Λ 同値でない極とし，$\{x_1,\cdots,x_r\}$ を Γ の cusp の同値類の代表系とすると，z_μ の任意の近傍 U_μ と x_ν の任意の近傍 V_ν に対し

$$\int_{\Lambda\backslash H'}|f(z)\mathrm{Im}(z)^{k/2}|dv(z)<\infty\qquad\Big(H'=H-\bigcup_{\mu=1}^{m}\bigcup_{\lambda\in\Lambda}\lambda U_\mu-\bigcup_{\nu=1}^{r}\bigcup_{\gamma\in\Gamma}\gamma V_\nu\Big)$$

が成り立つ．

このような $f(z)$ が与えられたときに

$$F(z)=F_k(z;\ f,\ \Lambda)=\sum_{\gamma\in\Lambda\backslash\Gamma}\chi(\gamma)^{-1}(f|[\gamma]_k)(z)\qquad(z\in H)$$

と定義する．級数の形と（i）により $F(z)$ がもし収束すれば，$F|[\gamma]_k=\chi(\gamma)F$ が Γ の任意の元 γ に対して成り立つのは明らかである．この級数を **Poincaré 級数**と呼ぶ．

定理 2.6.6 上の記号と仮定の下に

（1） $F(z)$ は $H-\{\gamma z_\mu|\gamma\in\Gamma,\ 1\leqq\mu\leqq m\}$ において広義一様に絶対収束し，$F(z)\in\Omega_k(\Gamma,\chi)$ である．

（2） $f(z)$ が H の点 w で極を持ち，$\Gamma-\{\pm1\}\cdot\Lambda$ の任意の元 γ に対し γw では正則ならば，$F(z)$ は $f(z)$ と同じ位数の極を持つ．

証明 $z_0\in H-\{\gamma z_\mu|\gamma\in\Gamma,\ 1\leqq\mu\leqq m\}$ とする．U_μ, V_ν および z_0 の近傍 W を

(2.6.3) $\gamma W\cap U_\mu=\phi,\ \gamma W\cap V_\nu=\phi\qquad(\gamma\in\Gamma,\ 1\leqq\mu\leqq m,\ 1\leqq\nu\leqq n),$

(2.6.4) $$\{\gamma\in\Gamma \mid \gamma W\cap W\neq\phi\}\neq\Gamma_{z_0}$$

ととると

(2.6.5) $$\begin{aligned}&\int_W\sum_{\gamma\in\Lambda\backslash\Gamma}|f|[\gamma]_k(z)|\mathrm{Im}(z)^{k/2}dv(z)\\&=\sum_{\gamma\in\Lambda\backslash\Gamma}\int_W|f(\gamma z)\mathrm{Im}(\gamma z)^{k/2}|dv(z)\\&=\sum_{\gamma\in\Lambda\backslash\Gamma}\int_{\gamma W}|f(z)\mathrm{Im}(z)^{k/2}|dv(z)\end{aligned}$$

である．(2.6.3) により $\gamma W\subset H'$ であり，Γ の元 γ_1 を1つ固定すると (2.6.4) により

$$|\Lambda\backslash\{\gamma\in\Gamma \mid {}^{\exists}\lambda\in\Lambda,\ \lambda\gamma W\cap\gamma_1 W\neq\phi\}|\leqq|\Lambda\backslash\Lambda\gamma_1\Gamma_{z_0}|\leqq|\Gamma_{z_0}|$$

となるから，(2.6.5) は

$$\leqq|\Gamma_{z_0}|\int_{\Lambda\backslash H'}|f(z)\mathrm{Im}(z)^{k/2}|dv(z)<\infty$$

であることがわかる．系 2.6.5 を $p=1$ として適用すると，F が W で広義一様に収束し正則であることがわかる．z_0 は $H-\{\gamma z_\mu|\gamma\in\Gamma,\ 1\leqq\mu\leqq m\}$ の任意の点であったから，F は $H-\{\gamma z_\mu|\gamma\in\Gamma,\ 1\leqq\mu\leqq m\}$ で正則である．次に $z_0=\gamma_1 z_1$ ($\gamma_1\in\Gamma$) とし，$\Gamma_0=\{\gamma\in\Gamma\mid f(z)$ は γz_0 で極を持つ$\}$ とおくと，$\gamma_1{}^{-1}\Gamma_{z_0}\subset\Gamma_0$, $\Lambda\gamma_1{}^{-1}\subset\Gamma_0$ であり，$|\Lambda\backslash\Gamma_0/\Gamma_{z_0}|\leqq m$ がわかる．$\sum_1$, $\sum_2$ を各々 $\Lambda\gamma\subset\Gamma_0$, $\Lambda\gamma\not\subset\Gamma_0$ なる $\Lambda\backslash\Gamma$ の代表系に関する和とすると

$$F(z)=\sum\nolimits_1\chi(\gamma)^{-1}(f|[\gamma]_k)(z)+\sum\nolimits_2\chi(\gamma)^{-1}(f|[\gamma]_k)(z)$$

であるが，$\sum_1$ は有限和であり，$\sum_2$ は上と同様にして γ_1U_1 で正則であるから，$F(z)$ は $\gamma_1U_1-\{z_0\}$ で正則で z_0 では高々極しか持たない．$z_2,\cdots,z_m$ についても同様であるから，$F(z)$ は H 上の有理型函数である．特に $w=z_1=z_0$ が(2)の条件を満たすならば $\Gamma_0=\Lambda\cdot Z(\Gamma)$ であるから，$\sum_1\chi(\gamma)^{-1}(f|[\gamma])(z)=\dfrac{|Z(\Gamma)|}{|Z(\Lambda)|}f(z)$ となるので，$F(z)$ は w では $f(z)$ と同じ位数の極を持つ．保型性については上に述べた通りである． (証明終)

$F(z)$ が cusp で正則であるための $f(z)$ に関する十分条件を調べる．x は Γ の cusp とし，$SL_2(\boldsymbol{R})$ の元 σ を $\sigma x=\infty$ にとる．$f(z)$ に次の条件を課する．

(iv) x が Λ の cusp でなければ，M, l, ε (>0) が存在して

$$|(f|[\sigma^{-1}]_k)(z)|\leqq M|z|^{-1-\varepsilon}\qquad (\mathrm{Im}(z)>l)$$

が成り立つ．

（v）　x が Λ の cusp ならば，M, l （>0），ε （$\geqq 0$）が存在して

$$|(f|[\sigma^{-1}]_k)(z)|\leqq M|z|^{-\varepsilon}\qquad (\mathrm{Im}(z)>l)$$

が成り立つ．

定理 2.6.7　$\Gamma, \Lambda, f(z)$ は上の（i）〜(iii) を満たすとする．x_0 は Γ の cusp とする．x_0 と Γ-同値な Γ の任意の cusp x において上の（iv）または（v）が成り立つならば，$F(z)$ は x_0 において正則である．もしすべての x において $\varepsilon>0$ ととれるならば，$F(z)$ は x_0 において零点を持つ．

証明　先ず（iv),（v）の条件は σ のとり方によらないことに注意する（M, l, ε 等は σ のとり方によって変わり得る)．$\{\alpha\}$ を $\Lambda\backslash\Gamma/\Gamma_{x_0}$ の代表系とし，各 α に対し $\{\beta\}$ を $\alpha^{-1}\Lambda\alpha\cap\Gamma_{x_0}\backslash\Gamma_{x_0}$ の代表系とすると，$\Gamma=\coprod_{\alpha}\coprod_{\beta}\Lambda\alpha\beta$ である．よって，各 α に対して $f_\alpha(z)=\sum_{\beta}\chi(\alpha\beta)^{-1}(f|[\alpha\beta]_k)(z)$ とおくと

$$F(z)=\sum_{\alpha}\sum_{\beta}\chi(\alpha\beta)^{-1}(f|[\alpha\beta]_k)(z)\tag{2.6.6}$$
$$=\sum_{\alpha}f_\alpha(z)$$

である．$\{\beta\}$ は $\alpha^{-1}\Lambda\alpha\cap\Gamma_{x_0}\backslash\Gamma_{x_0}$ の代表系であるから

$$f_\alpha|[\gamma]_k=\chi(\gamma)f_\alpha\qquad (\gamma\in\Gamma_{x_0})$$

が成り立つ．$f(z)$ の Λ 同値でない極は高々有限であったから，$F(z)$ は x_0 の H おける十分小さい近傍において広義一様に収束する．即ち，$\sigma_0\in SL_2(\boldsymbol{R})$ を $\sigma_0x_0=\infty$ にとると

$$F|[\sigma_0^{-1}]_k=\sum_{\alpha}f_\alpha|[\sigma_0^{-1}]_k$$

となり，右辺は $b>0$ を十分大きくとると $\mathrm{Im}(z)>b$ で広義一様に収束しているので，補題 2.6.4 を用いるためには $f_\alpha|[\sigma_0^{-1}]_k$ が ∞ で正則である（$\varepsilon>0$ ならば零点を持つ）ことを示せばよい．

1°　αx_0 が Λ の cusp ではない場合．$\alpha^{-1}\Lambda\alpha\cap\Gamma_{x_0}=\{1\}$ または $\{\pm 1\}$ であるから，C を 1 または 1/2 とすると

$$f_\alpha|[\sigma_0^{-1}]_k=C\sum_{\beta\in\Gamma_{x_0}}\chi(\alpha\beta)^{-1}(f|[\alpha\sigma_0^{-1}\sigma_0\beta\sigma_0^{-1}]_k)$$

であるが, $x=\alpha x_0$, $\sigma=\sigma_0\alpha^{-1}$ に関する (iv) の条件により $M, l, \varepsilon>0$ が存在して

$$|(f|[\alpha\sigma_0^{-1}]_k)(z)|\leqq M|z|^{-1-\varepsilon} \qquad (\mathrm{Im}(z)>l)$$

となる. よって h を $\sigma_0\Gamma_{x_0}\sigma_0^{-1}\cdot\{\pm 1\}=\left\{\pm\begin{bmatrix}1 & mh\\ 0 & 1\end{bmatrix}\middle| m\in\boldsymbol{Z}\right\}$ なる正数とすると

$$|(f_\alpha|[\sigma_0^{-1}]_k)(z)|\leqq 2M\sum_{m\in\boldsymbol{Z}}|z+mh|^{-1-\varepsilon} \qquad (\mathrm{Im}(z)>l)$$

となる. この右辺は $\sum m^{-1-\varepsilon}$ と比較することにより $\mathrm{Im}(z)>l+h$ で一様に収束することがわかるので, $f_\alpha|[\sigma_0^{-1}]$ は ∞ において正則であるが, 更に z を虚軸に沿って ∞ に近づけると $f_\alpha|[\sigma_0^{-1}]$ は 0 に近づくから, $f_\alpha|[\sigma_0^{-1}]$ は ∞ において零点を持つことがわかる.

2° αx_0 が Λ の cusp の場合. $\alpha^{-1}\Lambda\alpha\cap\Gamma_{x_0}$ は Γ_{x_0} の指数有限の部分群であるから, $\sum_\beta$ は有限和で, 1 と同様に

$$f_\alpha|[\sigma_0^{-1}]_k=\sum_\beta\chi(\alpha\beta)^{-1}(f|[\alpha\sigma_0^{-1}\sigma_0\beta\sigma_0^{-1}]_k)$$

と書ける. $x=\alpha x_0$, $\sigma=\sigma_0\alpha^{-1}$ に対する (v) の条件により, $M, l>0$, $\varepsilon>0$ が存在して

$$(2.6.7) \qquad |(f|[\alpha\sigma_0^{-1}]_k)(z)|\leqq M|z|^{-\varepsilon}\leqq M \qquad (\mathrm{Im}(z)>l)$$

である. h を 1° と同様にとると, $\sigma_0\beta\sigma_0^{-1}=\pm\begin{bmatrix}1 & mh\\ 0 & 1\end{bmatrix}$ と書けるから, $f_\alpha|[\sigma_0^{-1}]_k$ は ∞ で正則である. 更に, もし $\varepsilon>0$ であるならば, (2.6.7) により $f_\alpha|[\sigma_0^{-1}]_k$ は ∞ において零点を持つことがわかる. (証明終)

Poincaré 級数を用いると, 0 でない保型形式の存在を示す事が出来る. ここで前に予告した, k が奇数で $-1\notin\Gamma$ の場合にも $A_k(\Gamma)\neq\{0\}$ となることを示そう.

定理 2.6.8 $-1\notin\Gamma$ ならば, 任意の整数 k に対して $A_k(\Gamma)\neq\{0\}$ である.

証明 $z_0\in H$ を Γ の楕円点ではないようにとる. $f(z)=(z-z_0)^{-2}$ とすると $f(z)$ は $k=3$, $\Lambda=\{1\}$ に対して (i)～(v) を満たすから, Poincaré 級数

$$F(z)=\sum_{\gamma\in\Gamma}f|[\gamma]_k$$

は $A_3(\Gamma)$ に属する．定理 2.6.6（2）より $F(z)$ は z_0 で位数 2 の極を持つので，$F(z)$ が恒等的に 0 となることはない．よって $A_3(\Gamma)\neq\{0\}$ である．次に k は任意の奇数とし，n を $k-2n=3$ なる整数とすると

$$A_k(\Gamma)=A_3(\Gamma)A_{2n}(\Gamma)\neq\{0\}$$

である．（証明終）

Γ が cusp を持つときに，Poincaré 級数は modular 形式を作る基本的な手段の 1 つである．話を簡単にするために，χ は単位指標（恒等的に 1）とする．x が Γ の cusp であるとする．$k\geqq 3$ とし，k が奇数ならば x は Γ の正則な cusp であることを仮定する．σ は $\sigma x=\infty$ なる $SL_2(\boldsymbol{R})$ の元とし，h は

$$\sigma\Gamma_x\sigma^{-1}\cdot\{\pm1\}=\left\{\pm\begin{bmatrix}1 & nh\\ 0 & 1\end{bmatrix}\middle|\, n\in\boldsymbol{Z}\right\}$$

なる正数とする．負でない整数 m に対して

$$f_m(z)=j(\sigma,z)^{-k}e^{2\pi i m\sigma z/h}$$

と定義する．$f_m(z)$ は $\Lambda=\Gamma_x$ に対して（i）〜（v）を満たすことは明らかであるから

$$(2.6.8)\qquad F_k(z)=F_k(z;f_m,\Gamma_x)=\sum_{\gamma\in\Gamma_x\backslash\Gamma}(f_m|[\gamma]_k)(z)$$

は意味を持ち，$F_k(z)\in G_k(\Gamma)$ であるが Γ_x の cusp は x のみであるから，定理 2.6.7 およびその証明により次の定理は容易にわかる．

定理 2.6.9 $k\geqq 3$ とする．

（1） $m\geqq 1$ ならば $F_k(z;f_m,\Gamma_x)\in S_k(\Gamma)$ である．

（2） $m=0$ ならば $F_k(z;f_0,\Gamma_x)\in G_k(\Gamma)$ であり，$F(z)=F_k(z;f_0,\Gamma_x)$ は x と同値でない cusp においては零点を持ち，x においては

$$(F|[\sigma^{-1}])(z)=1+\sum_{n=1}^{\infty}a_n e^{2\pi i n z/h}$$

と展開される．

Γ が cusp を持つならば Γ の cusp 形式は Poincaré 級数で尽されることを示そう．話を簡単にするために，∞ が Γ の cusp であるとし，更に $k\geqq 3$ が奇数ならば $-1\notin\Gamma$ で ∞ は Γ の正則 cusp であると仮定する．$\Gamma_\infty\cdot\{\pm1\}$

$=\left\{\pm\begin{bmatrix}1 & nh\\ 0 & 1\end{bmatrix}\middle| n\in\boldsymbol{Z}\right\}$ $(h>0)$ とし

(2.6.9) $$g_k^{(m)}(z)=F_k(z;\, e^{2\pi imz/h},\, \Gamma_\infty) \qquad (m\geqq 0)$$

と書く.

定理 2.6.10 $k\geqq 3$ とし, $f(z)\in S_k(\Gamma)$ とする.

(1) $\int_{\Gamma\backslash H}|f(z)\overline{g_k^{(m)}}(z)|\,\mathrm{Im}(z)^k dv(z)<\infty$ である.

(2) $f(z)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n e^{2\pi inz/h}$ とすると

$$\int_{\Gamma\backslash H}f(z)\overline{g_k^{(m)}}(z)\,\mathrm{Im}(z)^k dv(z)=\begin{cases}0 & (m=0)\\ a_m(4\pi m)^{1-k}h^k(k-2)\,! & (m\geqq 1)\end{cases}$$

が成り立つ.

証明 $g_k^{(m)}$ の定義により, $z=x+iy$ とおくと

$$\begin{aligned}\int_{\Gamma\backslash H}&|f(z)\overline{g_k^{(m)}}(z)|\,\mathrm{Im}(z)^k dv(z)\\ &\leqq \sum_{\gamma\in\Gamma_\infty\backslash\Gamma}\int_{\Gamma\backslash H}|f(z)e^{2\pi im\gamma z/h}j(\gamma,z)^{-k}|\,\mathrm{Im}(z)^k dv(z)\\ &=\int_{\Gamma_\infty\backslash H}|f(z)e^{2\pi imz/h}|\,\mathrm{Im}(z)^k dv(z)\\ &=\int_0^\infty\int_0^h|f(z)|e^{-2\pi my/h}y^{k-2}dx\,dy\end{aligned}$$

であるが, $|f(z)y^{k/2}|$ は全平面で有界であるから

$$|f(z)|e^{-2\pi my/h}y^{k-2}=O(y^{k/2-2}) \qquad (y\longrightarrow 0)$$

であり, $f(z)$ は x に関して一様に $f(z)=O(e^{-2\pi y/h})$ $(y\longrightarrow\infty)$ であるから (1) がわかる. よって

$$\int f(z)\overline{g_k^{(m)}}(z)\,\mathrm{Im}(z)^k dv(z)$$

においても積分と和の順の変更が可能で, 絶対値をとったときと同様にして

$$=\int_0^\infty\int_0^h f(z)e^{2\pi im\bar{z}/h}y^{k-2}dx\,dy$$

となる. $f(z)$ の cusp における Fourier 展開は H において広義一様に収束するから

$$=\sum_{n=1}^{\infty}a_n\int_0^{\infty}e^{-2\pi(m+n)y/h}y^{k-2}dy\int_0^h e^{2\pi i(n-m)x/h}dx$$

$$=\begin{cases} a_m\Gamma(k-1)h^k(4\pi m)^{1-k} & (m\geqq 1) \\ 0 & (m=0) \end{cases}$$

を得る. (証明終)

系 2.6.11 $k\geqq 3$ とすると, $g_k^{(m)}(z)$ $(m\geqq 1)$ は $S_k(\Gamma)$ を生成する.

証明 $S_k(\Gamma)$ の元 f および g に対して

$$(f,g)=\int_{\Gamma\backslash H}f(z)\bar{g}(z)\mathrm{Im}(z)^k dv(z)$$

と定義すると, $|f(z)g(z)|\mathrm{Im}(z)^k$ は H で有界であるから, この右辺の積分は有限の値を持ち $(\ ,\ )$ は $S_k(\Gamma)$ の Hermite 内積を与える. $\mathcal{M}$ を $g_k^{(m)}$ $(m\geqq 1)$ で生成される $S_k(\Gamma)$ の部分空間であるとする. $\mathcal{M}^{\perp}$ を $\mathcal{M}$ の直交補空間とし, $\mathcal{M}^{\perp}$ の元 $f(z)$ をとり, $f(z)=\sum a_n e^{2\pi i n z/h}$ を ∞ における Fourier 展開とする. 定理 2.6.10 を適用すると, $a_n=0$ $(n\geqq 1)$ であるから $f(z)=0$ となる. 従って $S_k(\Gamma)=\mathcal{M}$ を得る. (証明終)

§2.7 Hecke 環

群 G の 2 つの部分群 Γ および Γ' が

$$[\Gamma:\Gamma\cap\Gamma']<\infty,\quad [\Gamma':\Gamma\cap\Gamma']<\infty$$

を満たすときに, Γ と Γ' は commensurable であると言い, $\Gamma\approx\Gamma'$ と表わす. G の部分群 Γ に対して G の部分集合 $\tilde{\Gamma}$ を

$$\tilde{\Gamma}=\{g\in G\,|\,g\Gamma g^{-1}\approx\Gamma\}$$

と定義する.

補題 2.7.1 (1) $\approx$ は同値関係である.

(2) $\tilde{\Gamma}$ は G の部分群である.

(3) $\Gamma\approx\Gamma'$ ならば $\tilde{\Gamma}=\tilde{\Gamma}'$ である.

(4) $\Gamma\approx\Gamma'$ とする. $\alpha\in\tilde{\Gamma}$ ならば, 両側剰余類 $\Gamma\alpha\Gamma'$ は

$$\Gamma\alpha\Gamma'=\coprod_i\Gamma\alpha\gamma_i\qquad(\{\gamma_i\}\text{ は }\Gamma'\cap\alpha^{-1}\Gamma\alpha\backslash\Gamma'\text{ の代表系}),$$

$$\Gamma\alpha\Gamma'=\coprod_j\delta_j\alpha\Gamma\qquad(\{\delta_j\}\text{ は }\Gamma'/\Gamma\cap\alpha\Gamma\alpha^{-1}\text{ の代表系})$$

と左 Γ 剰余類，および右 Γ' 剰余類の直和に分解される．

証明 （1） 推移律のみ示せばよいことは明らかである．$\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$ が G の部分群で $\Gamma_1 \approx \Gamma_2$, $\Gamma_2 \approx \Gamma_3$ なるものとすると

$$[\Gamma_1 : \Gamma_1 \cap \Gamma_2 \cap \Gamma_3] = [\Gamma_1 : \Gamma_1 \cap \Gamma_2][\Gamma_1 \cap \Gamma_2 : \Gamma_1 \cap \Gamma_2 \cap \Gamma_3]$$
$$\leqq [\Gamma_1 : \Gamma_1 \cap \Gamma_2][\Gamma_2 : \Gamma_2 \cap \Gamma_3] < \infty$$

である．同様に $[\Gamma_3 : \Gamma_1 \cap \Gamma_2 \cap \Gamma_3] < \infty$ が示される．$\Gamma_1 \cap \Gamma_3 \supset \Gamma_1 \cap \Gamma_2 \cap \Gamma_3$ であるから，$[\Gamma_1 : \Gamma_1 \cap \Gamma_3] < \infty$, $[\Gamma_3 : \Gamma_1 \cap \Gamma_3] < \infty$ となり，$\Gamma_1 \approx \Gamma_3$ がわかる．（2） $g \in \tilde{\Gamma}$, $h \in \tilde{\Gamma}$ とすると

$$(h^{-1}g)\Gamma(h^{-1}g)^{-1} \approx h^{-1}\Gamma h \approx \Gamma$$

であるから，（1）により $h^{-1}g \in \tilde{\Gamma}$ である．よって $\tilde{\Gamma}$ は G の部分群である．（3） $g \in \tilde{\Gamma}$ とすると

$$g\Gamma' g^{-1} \approx g\Gamma g^{-1} \approx \Gamma \approx \Gamma'$$

となるから（1）により $g \in \tilde{\Gamma}'$ である．よって $\tilde{\Gamma} \subset \tilde{\Gamma}'$ を得る．Γ と $\tilde{\Gamma}'$ を取りかえると $\tilde{\Gamma} \supset \tilde{\Gamma}'$ を得るから，$\tilde{\Gamma} = \tilde{\Gamma}'$ である．（4） $\Gamma\alpha\Gamma'$ に含まれる右 Γ 剰余類は，$\Gamma\alpha\gamma$ $(\gamma \in \Gamma')$ と表わされる．$\Gamma\alpha\gamma$ および $\Gamma\alpha\gamma'$ を $\Gamma\alpha\Gamma'$ に含まれる2つの左 Γ-剰余類とすると

$$\Gamma\alpha\gamma = \Gamma\alpha\gamma' \iff \gamma'\gamma^{-1} \in \Gamma' \cap \alpha^{-1}\Gamma\alpha \tag{2.7.1}$$

である．$\alpha^{-1}\Gamma\alpha \approx \Gamma \approx \Gamma'$ であるから，$[\Gamma' : \Gamma' \cap \alpha^{-1}\Gamma\alpha] < \infty$ であり，$\gamma_1, \cdots, \gamma_d$ を Γ' の左 $\Gamma' \cap \alpha^{-1}\Gamma\alpha$ 剰余類の代表系とすると，(2.7.1) により

$$\Gamma\alpha\Gamma' = \coprod_{i=1}^{d} \Gamma\alpha\gamma_i$$

と分解される．右剰余類についても同様である． (証明終)

G の部分群の集合 Ξ と G の部分半群 Δ の組で次の（i）(ii）をみたすものを固定する．

（i） Ξ に属する群は互いに commensurable である．

（ii） $\tilde{\Gamma} \supset \Delta \supset \Gamma$ が任意の Γ $(\in \Xi)$ に対して成り立つ．

以下，Γ, Γ', Γ_i 等は断わらない限り Ξ に属する G の部分群であるとする．

定義 K を単位元を持つ可換環とする．$\Gamma, \Gamma' \in \Xi$ に対し，両側剰余類 $\Gamma\alpha\Gamma'$ $(\alpha \in \Delta)$ で生成される自由 K 加群を $R_K(\Gamma, \Gamma'; \Delta)$ と書く．即ち

$$R_K(\Gamma,\Gamma';\ \Delta)=\{\sum_\alpha a_\alpha(\Gamma\alpha\Gamma')\,|\,\alpha\in\Delta,\ a_\alpha\in K,\ a_\alpha \text{は有限個の}\ \Gamma\alpha\Gamma'\ \text{を除き}\ 0\}$$

とする．また $\Gamma=\Gamma'$ のときには

$$R_K(\Gamma,\ \Delta)=R_K(\Gamma,\ \Gamma;\ \Delta)$$

と書き表わし，更に $K=\boldsymbol{Z}$ ならば

$$R(\Gamma,\ \Gamma';\ \Delta)=R_{\boldsymbol{Z}}(\Gamma,\ \Gamma';\ \Delta),\qquad R(\Gamma,\ \Delta)=R_{\boldsymbol{Z}}(\Gamma,\ \Delta)$$

と $\boldsymbol{Z}$ を省略することにする．

Δ が K 加群 M に右から作用しているとし，Δ の M への作用を

$$M\times\Delta\ni(m,\ \delta)\longmapsto m^\delta\in M$$

と書き表わす*．M の Γ 不変な元全体のなす部分加群を M^Γ で表わす．即ち

$$M^\Gamma=\{m\in M\,|\,m^\gamma=m,\ \forall\gamma\in\Gamma\}$$

とする．$R_K(\Gamma,\ \Gamma';\ \Delta)$ の元 $\Gamma\alpha\Gamma'$ を $\Gamma\alpha\Gamma'=\coprod_i\Gamma\alpha_i$ と分解し，M^Γ の元 m に対して

$$m|\Gamma\alpha\Gamma'=\sum_i m^{\alpha_i}$$

とおく．更に $\xi=\sum a_\alpha(\Gamma\alpha\Gamma')$ $(\in R_K(\Gamma,\ \Gamma';\ \Delta))$ の M^Γ への作用を

$$m|\xi=\sum_\alpha a_\alpha(m|\Gamma\alpha\Gamma')$$

と定義する．

補題 2.7.2 （1） $m|\Gamma\alpha\Gamma'$ は $\Gamma\alpha\Gamma'$ の左剰余類の代表系 $\{\alpha_\nu\}$ のとり方によらない．

（2） “$m\longmapsto m|\xi$” は M^Γ から $M^{\Gamma'}$ への K 準同型写像である．

証明 $\Gamma\alpha\Gamma'$ の元 $\alpha_i,\ \alpha_i'$ が $\Gamma\alpha_i=\Gamma\alpha_i'$ を満たすとすると，Γ の元 γ が存在して $\alpha_i'=\gamma\alpha_i$ が成り立つから，$m^{\alpha_i'}=m^{\gamma\alpha_i}=m^{\alpha_i}$ となり（1）がわかる．（2）を示すには $m|\Gamma\alpha\Gamma'\in M^{\Gamma'}$ を示せば K 準同型は明らかである．$\gamma'\in\Gamma'$ とすると $\Gamma\alpha\Gamma'=\coprod_i\Gamma\alpha_i=\coprod_i\Gamma\alpha_i\gamma'$ であり，（1）により $m|\Gamma\alpha\Gamma'$ は代表系のとり方によらないから

---

* 半群 Δ が K 加群 M に右から作用しているとは
（i） $m\longmapsto m^\delta$ は M の K-準同型，（ii） $m^{\delta\gamma}=(m^\delta)^\gamma$ $(\delta,\ \gamma\in\Delta)$，
（iii） $m^1=m$ （1：単位元）
のときに言う．

$$(m|\Gamma\alpha\Gamma')^{\gamma'}=\sum m^{\alpha_i\gamma'}=(m|\Gamma\alpha\Gamma')$$

となり $m|\Gamma\alpha\Gamma'$ は $M^{\Gamma'}$ の元である．

$\alpha, \beta\in\Delta$ のときに，$\Gamma_1\alpha\Gamma_2=\coprod\Gamma_1\alpha_i$, $\Gamma_2\beta\Gamma_3=\coprod\Gamma_2\beta_j$ と分解し $R_K(\Gamma_1, \Gamma_2;\ \Delta)$ の元 $(\Gamma_1\alpha\Gamma_2)$ と $(\Gamma_2\beta\Gamma_3)$ の積を

(2.7.2)
$$(\Gamma_1\alpha\Gamma_2)(\Gamma_2\beta\Gamma_3)=\sum_{\gamma}c_{\gamma}(\Gamma_1\gamma\Gamma_3),$$
$$c_{\gamma}=\#\{(i,\ j)\,|\,\Gamma_1\alpha_i\beta_j=\Gamma_1\gamma\}$$

でもって定義する．ここで $\Gamma_1\gamma\Gamma_3$ は Δ に含まれる両側剰余類のすべてを動く．有限個の $\Gamma_1\gamma\Gamma_3$ を除き $c_{\gamma}=0$ であるから，この定義は意味を持つ．次に $\xi=\sum a_{\alpha}(\Gamma_1\alpha\Gamma_2)\in R_K(\Gamma_1,\ \Gamma_2;\ \Delta)$，$\eta=\sum b_{\beta}(\Gamma_2\beta\Gamma_3)\in R_K(\Gamma_2,\ \Gamma_3;\ \Delta)$ に対しては

(2.7.3)
$$\xi\eta=\sum a_{\alpha}b_{\beta}(\Gamma_1\alpha\Gamma_2)(\Gamma_2\beta\Gamma_3)$$

とおき，ξ と η の積と言う．

補題 2.7.3 上の定義 (2.7.2) は α_i, β_j, γ のとり方によらない．

証明 $K[\Gamma_1\backslash\Delta]$ を Δ に含まれる左 Γ_1 剰余類 $\Gamma_1\alpha$ $(\alpha\in\Delta)$ で生成される K 自由加群とする．$K[\Gamma_1\backslash\Delta]$ は Δ の元の右からの乗法により右 Δ 加群である．さて $R_K(\Gamma_1, \Gamma_2;\ \Delta)$ の元 $\Gamma_1\alpha\Gamma_2$ $(=\coprod\Gamma_1\alpha_i)$ に $K[\Gamma_1\backslash\Delta]$ の元 $\sum_i\Gamma_1\alpha_i$ を対応させる写像は，$R_K(\Gamma_1,\ \Gamma_2;\ \Delta)$ から $K[\Gamma_1\backslash\Delta]$ の中への1対1の K 準同型写像を引き起こす．$R_K(\Gamma_1,\ \Gamma_2;\ \Delta)$ をこの写像によって $K[\Gamma_1\backslash\Delta]$ の K 部分加群と同一視すると

(2.7.4)
$$R_K(\Gamma_1,\ \Gamma_2;\ \Delta)=K[\Gamma_1\backslash\Delta]^{\Gamma_2}$$

である．$\Gamma_1\alpha\Gamma_2=\coprod_i\Gamma_1\alpha_i$, $\Gamma_2\beta\Gamma_3=\coprod_j\Gamma_2\beta_j$ と分解すると

(2.7.5)
$$(\sum_i\Gamma_1\alpha_i)\,|\,\Gamma_2\beta\Gamma_3=\sum_i\sum_j\Gamma_1\alpha_i\beta_j$$

であるが，この右辺は (2.7.2) の右辺を $K[\Gamma_1\backslash\Delta]$ の元とみたものに他ならない．即ち

(2.7.6) $R_K(\Gamma_2,\ \Gamma_3;\ \Delta)$ の $R_K(\Gamma_1,\ \Gamma_2;\ \Delta)=K[\Gamma_1\backslash\Delta]^{\Gamma_2}$ への右からの作用は (2.7.3) で定義した積に一致する． (証明終)

このことから次の補題を得る．

補題 2.7.4 上の記号と仮定を用いる．$m\in M^{\Gamma_1}$, $\xi_1\in R_K(\Gamma_1, \Gamma_2;\ \Delta)$, $\xi_2\in R_K(\Gamma_2, \Gamma_3;\ \Delta)$, $\xi_3\in R_K(\Gamma_3, \Gamma_4;\ \Delta)$ とすると，次に（1）～（4）が成り立つ．

（1） $(m|\xi_1)|\xi_2=m|(\xi_1\xi_2)$

（2） $(\xi_1\xi_2)\xi_3=\xi_1(\xi_2\xi_3)$

（3） $R_K(\Gamma, \Delta)$ は，単位元 $\Gamma 1\Gamma$ $(=\Gamma)$ を持つ K 上の多元環である．

（4） M を右 Δ 加群とすると，M^Γ は右 $R_K(\Gamma, \Delta)$ 加群である．

証明 （1）は定義により明らかである．（2）は (2.7.6) および（1）からわかる．（3）および（4）は各々（2）および（1）からわかる．

定義 $R(\Gamma, \Delta)(R_K(\Gamma, \Delta))$ を Γ の Δ に関する **Hecke 環**（K 上の Hecke 環）と言う．

補題 2.7.5 $\Delta\subset\Delta'$ ならば，自然な対応で $R_K(\Gamma, \Delta)$ は $R_K(\Gamma, \Delta')$ の部分環である．特に $R_K(\Gamma, \Delta)$ は $R_K(\Gamma, \tilde{\Gamma})$ の部分環である．

証明 $R_K(\Gamma, \Delta)$ は自然に $R_K(\Gamma, \Delta')$ の部分加群であるから，両方の積が一致しておればよい．$R_K(\Gamma, \Delta)$ の2元 $\Gamma\alpha\Gamma$, $\Gamma\beta\Gamma$ の $R_K(\Gamma, \Delta')$ の元としての積を

$$(\Gamma\alpha\Gamma)(\Gamma\beta\Gamma)=\sum_{\gamma} c_\gamma(\Gamma\gamma\Gamma)$$

と書く．$c_\gamma\neq 0$ とすると $\Gamma\gamma\Gamma\subset\Gamma\alpha\Gamma\beta\Gamma\subset\Delta$ であるから，この積は定義により $R_K(\Gamma, \Delta)$ の元としての積に一致する． （証明終）

定理 2.7.6 （1） 群 G の（commensurable とは限らぬ）部分群 Γ と U に対し，G の部分半群 Δ, D を $\tilde{\Gamma}\supset\Delta\supset\Gamma$, $\tilde{U}\supset D\supset U$ にとる．Δ および D が

（i） $D=U\Delta$,（ii） $U\alpha U=U\alpha\Gamma$ $({}^\forall\alpha\in\Delta)$,（iii） $U\alpha\cap\Delta=\Gamma\alpha$ $({}^\forall\alpha\in\Delta)$

の3条件を満たすならば，$\Gamma\alpha\Gamma\longmapsto U\alpha U$ は $R_K(\Gamma, \Delta)$ と $R_K(U, D)$ の同型を引き起こす．

（2） K 加群 M が右 D 加群であるとすると，上の同型は M^U および M^Γ への作用と両立している．即ち $m\in M^U$, $\alpha\in\Delta$ ならば $m|U\alpha U=m|\Gamma\alpha\Gamma$ が成り立つ．

証明 $\Gamma\alpha\Gamma\longmapsto U\alpha U$ の引き起こす $R_K(\Gamma, \Delta)$ から $R_K(U, D)$ への写像を Φ とする．条件（i）により Φ は全射である．$\alpha, \beta\in\Delta$ を $U\alpha U=U\beta U$ な

る元とする.（ii）より $u(\in U)$, $\gamma(\in\Gamma)$ が存在して $\beta\gamma=u\alpha$ が成り立つから

$$\beta\gamma=u\alpha\in U\alpha\cap\Delta=\Gamma\alpha$$

となるので $\Gamma\alpha\Gamma=\Gamma\beta\Gamma$ を得る. $R_K(U, D)$ は $\{U\alpha U\}$ を基底に持つ自由 K 加群であるから Φ は1対1である. 環としての同型写像であることおよび（2）を確かめるためには, 積の定義と M^Γ および M^U への作用の定義から, 任意の $\alpha\in\Delta$ に対して $\Gamma\alpha\Gamma=\coprod\Gamma\alpha_i$ ならば $U\alpha U=\coprod U\alpha_i$ となることを見ればよい.（ii）により $U\alpha U=\bigcup_i U\alpha_i$ であるが, もし $U\alpha_i=U\alpha_j$ と仮定すると, $\alpha_j\in U\alpha_i\cap\Delta=\Gamma\alpha_i$ であるので $\Gamma\alpha_i=\Gamma\alpha_j$ がわかる. よって $U\alpha U=\coprod U\alpha_i$ でなければならないことがわかる. (証明終)

定義 $R(\Gamma, \Delta)$ の元 $\xi=\sum a_\alpha(\Gamma\alpha\Gamma)$ に対して $\deg(\xi)=\sum a_\alpha|\Gamma\backslash\Gamma\alpha\Gamma|$ と定義し, その次数と言う. ここで $|\Gamma\backslash\Gamma\alpha\Gamma|$ は $\Gamma\alpha\Gamma$ に含まれる左 Γ 剰余類の個数である. (2.7.5) と (2.7.6) により

$$\deg(\xi\eta)=\deg(\xi)\deg(\eta)\qquad(\xi,\eta\in R(\Gamma, \Delta))\tag{2.7.7}$$

が成り立つのは容易にわかる.

補題 2.7.7 $\alpha\in\tilde{\Gamma}$ とする. $\Gamma\alpha\Gamma$ の左, 右 Γ 剰余類の個数が等しければ, 左および右 Γ 剰余類は共通の代表系を持つ.

証明 $\Gamma\alpha\Gamma=\coprod_{i=1}^{d}\Gamma\alpha_i=\coprod_{i=1}^{d}\beta_i\Gamma$ とする. 任意の i, j に対し $\Gamma\alpha_i\cap\beta_j\Gamma\neq\phi$ を示そう. ある i と j に対して $\Gamma\alpha_i\cap\beta_j\Gamma=\phi$ であると仮定すると, $\Gamma\alpha_i\subset\bigcup_{k\neq j}\beta_k\Gamma$ である. よって $\Gamma\alpha\Gamma=\Gamma\alpha_i\Gamma\subset\bigcup_{k\neq j}\beta_k\Gamma$ となり矛盾である. 特に $\Gamma\alpha_i\cap\beta_i\Gamma\neq\phi$ であるから, $\delta_i\in\Gamma\alpha_i\cap\beta_i\Gamma$ ととると, $\Gamma\alpha_i=\Gamma\delta_i$, $\beta_i\Gamma=\delta_i\Gamma$ である. よって

$$\Gamma\alpha\Gamma=\coprod_{i=1}^{d}\Gamma\delta_i=\coprod_{i=1}^{d}\delta_i\Gamma$$

となる. (証明終)

定理 2.7.8 Δ から自分自身への写像 ι で,（i）$(\alpha\beta)^\iota=\beta^\iota\alpha^\iota$ $(\alpha,\beta\in\Delta)$, $1^\iota=1$,（ii）$\Gamma^\iota=\Gamma$,（iii）$\Gamma\alpha^\iota\Gamma=\Gamma\alpha\Gamma$, となるものが存在すれば, $\Gamma\alpha\Gamma$ $(\alpha\in\Delta)$ の左, 右 Γ 剰余類の代表系として共通のものがとれ, $R_K(\Gamma, \Delta)$ は可換である.

証明 $R_K(\Gamma, \varDelta)\ni\Gamma\alpha\Gamma$ とし $\Gamma\alpha\Gamma=\coprod_i\Gamma\alpha_i$ とすると $\Gamma\alpha\Gamma=\Gamma\alpha^\iota\Gamma=\coprod\alpha_i^\iota\Gamma$ が成り立つから，補題 2.7.7 により $\Gamma\alpha\Gamma$ の左および右 Γ 剰余類は共通の代表系を持つ．$\Gamma\alpha\Gamma$, $\Gamma\beta\Gamma\in R(\Gamma, \varDelta)$ とし $\Gamma\alpha\Gamma=\coprod_i\Gamma\alpha_i=\coprod_i\alpha_i\Gamma$, $\Gamma\beta\Gamma=\coprod_j\Gamma\beta_j=\coprod_j\beta_j\Gamma$ とする．さて

$$(\Gamma\alpha\Gamma)(\Gamma\beta\Gamma)=\sum_\gamma c_\gamma\Gamma\gamma\Gamma,\quad (\Gamma\beta\Gamma)(\Gamma\alpha\Gamma)=\sum_\gamma c'_\gamma\Gamma\gamma\Gamma$$

とすると

$$\begin{aligned}c_\gamma&=\#\{(i,j)\,|\,\Gamma\alpha_i\beta_j=\Gamma\gamma\}\\&=\#\{(i,j)\,|\,\Gamma\alpha_i\beta_j\Gamma=\Gamma\gamma\Gamma\}/|\Gamma\backslash\Gamma\gamma\Gamma|\\&=\#\{(i,j)\,|\,\Gamma\beta_j^\iota\alpha_i^\iota\Gamma=\Gamma\gamma^\iota\Gamma\}/|\Gamma\backslash\Gamma\gamma\Gamma|\\&=\#\{(i,j)\,|\,\Gamma\beta_j^\iota\alpha_i^\iota=\Gamma\gamma^\iota\}=c'_\gamma\end{aligned}$$

となるから $(\Gamma\alpha\Gamma)(\Gamma\beta\Gamma)=(\Gamma\beta\Gamma)(\Gamma\alpha\Gamma)$ が成り立つ． (証明終)

§2.8 Hecke 作用素と Petersson 内積

前節で定義した Hecke 環を Γ が第1種の Fuchs 群の場合に保型形式の空間に作用させよう．以下 Γ は第1種の Fuchs 群とし，χ は Γ の位数有限の指標とする．Γ を $GL_2^+(\boldsymbol{R})$ の部分群と考えて

$$\tilde{\Gamma}=\{g\in GL_2^+(\boldsymbol{R})\,|\,g\Gamma g^{-1}\approx\Gamma\}$$

と定義する．$\varDelta$ を $\tilde{\Gamma}\supset\varDelta\supset\Gamma$ となるような $\tilde{\Gamma}$ の部分半群とする．Γ の指標 χ は $\varDelta$ の指標に拡張されるとし，更にこの拡張された $\varDelta$ の指標も χ でもって表わしたときに，次の (2.8.1) が満たされているものと仮定する．

(2.8.1) $\alpha\in\varDelta$ とする．$\Gamma\cap\alpha^{-1}\Gamma\alpha$ の元 γ を $\gamma=\alpha^{-1}\gamma'\alpha$ $(\gamma'\in\Gamma)$ と表わすと，常に $\chi(\gamma)=\chi(\gamma')$ が成り立つ．

χ は $\varDelta$ の生成する群の指標にまで拡張されるとは限らないから，いつも (2.8.1) が成り立つとは限らないことに注意する．さて $\varXi$ を Γ の指数有限の部分群全体のなす集合とする．$\Gamma_1,\Gamma_2\in\varXi$ とし $\alpha\in\varDelta$ とする．$\Gamma_1\alpha\Gamma_2=\coprod_{\nu=1}^{d}\Gamma_1\alpha_\nu$ とするときに，$A_k(\Gamma_1,\chi)$ の元 f に対して

(2.8.2) $$(f|\Gamma_1\alpha\Gamma_2)(z)=\det(\alpha)^{k/2-1}\sum_{\nu=1}^{d}\chi(\alpha_\nu)^{-1}f|[\alpha_\nu]_k$$

と定義する.

定理 2.8.1 (1) 上の定義は $\{\alpha_\nu\}$ のとり方によらずに決まり

$$f|\Gamma_1\alpha\Gamma_2\in A_k(\Gamma_2,\chi)$$

である. 特に $f\in G_k(\Gamma_1,\chi)$ または $S_k(\Gamma_1,\chi)$ ならば, $f|\Gamma_1\alpha\Gamma_2\in G_k(\Gamma_2,\chi)$ または $S_k(\Gamma_2,\chi)$ である.

(2) $\Gamma_1,\Gamma_2,\Gamma_3\in\Xi$, $\alpha,\beta\in\Delta$ ならば

$$(f|\Gamma_1\alpha\Gamma_2)|\Gamma_2\beta\Gamma_3=f|(\Gamma_1\alpha\Gamma_2)(\Gamma_2\beta\Gamma_3)$$

が成り立つ.

(3) $A_k(\Gamma,\chi)$ は上の作用で右 $R(\Gamma,\Delta)$ 加群であり, $G_k(\Gamma,\chi)$ および $S_k(\Gamma,\chi)$ は $A_k(\Gamma,\chi)$ の $R(\Gamma,\Delta)$ 部分加群である.

証明 保型形式の集合 $\mathscr{A}_k$, $\mathscr{G}_k$, $\mathscr{S}_k$ を

$$\mathscr{A}_k=\bigcup_{\Gamma'\in\Xi}A_k(\Gamma',\chi),\quad \mathscr{G}_k=\bigcup_{\Gamma'\in\Xi}G_k(\Gamma',\chi),\quad \mathscr{S}_k=\bigcup_{\Gamma'\in\Xi}S_k(\Gamma',\chi)$$

と定義する. $\Gamma_1,\Gamma_2\in\Xi$ とすると

$$A_k(\Gamma_1,\chi)\cup A_k(\Gamma_2,\chi)\subset A_k(\Gamma_1\cap\Gamma_2,\chi)$$

であるから $\mathscr{A}_k$ は $\boldsymbol{C}$ 上の vector 空間であり, $\mathscr{G}_k$, $\mathscr{S}_k$ はその部分空間である. $\mathscr{A}_k$ の元 f に対し, Δ の元 α の作用を

$$f^\alpha=\det(\alpha)^{k/2-1}\chi(\alpha)^{-1}f|[\alpha]_k$$

と定義する. (2.8.1) により $f\in A_k(\Gamma_1,\chi)\,(\Gamma_1\in\Xi)$ ならば $f^\alpha\in A_k(\Gamma_1\cap\alpha^{-1}\Gamma_1\alpha,\chi)$ であるから, $f\longmapsto f^\alpha$ は $\mathscr{A}_k$ の一次変換である. $(f^\alpha)^\beta=f^{\alpha\beta}$ $(\alpha,\beta\in\Delta)$ は明らかであるから, Δ は $\mathscr{A}_k$ に右から作用しており $\mathscr{A}_k^\Gamma=A_k(\Gamma,\chi)$ である. $f\in A_k(\Gamma,\chi)$, $\alpha\in\Delta$ ならば

$$f|\Gamma\alpha\Gamma=\sum_\nu f^{\alpha_\nu}\qquad(\Gamma\alpha\Gamma=\coprod\Gamma\alpha_\nu)$$

であるから, 補題 2.7.2 により上の定義は $\{\alpha_\nu\}$ のとり方によらずに決まり, $f|\Gamma_1\alpha\Gamma_2\in A_k(\Gamma_2,\chi)$ がわかる. (1) の後半は $\mathscr{A}_k$ のかわりに $\mathscr{G}_k$ および $\mathscr{S}_k$ を考えれば同様である. (2), (3) は補題 2.7.4 (1) および (4) の特別な場合である. (証明終)

$\Gamma_1\alpha\Gamma_2$ を $A_k(\Gamma_1,\chi)$ から $A_k(\Gamma_2,\chi)$ への一次写像と考えたものを **Hecke 作用素**と言う.

注意 1　$\Gamma_1\alpha\Gamma_2$ の作用は定義からわかるように k, χ によって異なるから $R(\Gamma_1, \Delta)$ の元と作用素を区別して $[\Gamma_1\alpha\Gamma_2]_{k,\chi}$ とでも書くべきであるが，作用する空間によって $\Gamma_1\alpha\Gamma_2$ の作用は一意的に決まるので，煩雑さを避けるために Hecke 環の元と Hecke 作用素を同じ記号で表わす.

注意 2　$\Gamma_1\alpha\Gamma_2$ の作用における $\det(\alpha)^{k/2-1}$ は，後で Hecke 作用素の固有値と保型形式の Fourier 展開の係数を合わせるための便宜的なものである.

注意 3　特に χ が単位指標であるならば，Δ として $\tilde{\Gamma}\supset\Delta\supset\Gamma$ なる任意の半群がとれる. 特に $R(\Gamma, \tilde{\Gamma})$ は $A_k(\Gamma)$, $G_k(\Gamma)$, $S_k(\Gamma)$ に右から作用する.

Γ_1, Γ_2 は commensurable な第1種の Fuchs 群とし，χ_1 および χ_2 は Γ_1 および Γ_2 の位数が有限な指標とする. 第1種の Fuchs 群 Γ' を $\Gamma'\subset\mathrm{Ker}(\chi_1)\cap\mathrm{Ker}(\chi_2)$ にとり，$f\in S_k(\Gamma_1, \chi_1)$，$g\in S_k(\Gamma_2, \chi_2)$ に対して

$$(f, g)=v(\Gamma'\backslash H)^{-1}\int_{\Gamma'\backslash H}f(z)\bar{g}(z)\mathrm{Im}(z)^k dv(z) \tag{2.8.3}$$

と定義する. $f(z)\bar{g}(z)\mathrm{Im}(z)^k$ は Γ' で不変な函数であり，定理 2.1.5 により

$$|f(z)\bar{g}(z)\mathrm{Im}(z)^k|=|f(z)\mathrm{Im}(z)^{k/2}||g(z)\mathrm{Im}(z)^{k/2}|$$

は H 上で有界であるから，(2.8.3) の右辺の積分は意味を持ち有限の値をとる. 定義から明らかなように (f, g) は Γ のとり方にはよらずに決まる. 特に $\Gamma=\Gamma_1=\Gamma_2$, $\chi=\chi_1=\chi_2$ とすると，$f\neq 0$ ならば

$$(f, f)>0$$

であるから $(\ ,\ )$ は $S_k(\Gamma, \chi)$ の Hermite 内積を与える. この内積を $S_k(\Gamma, \chi)$ の **Petersson 内積**と言う. 今 Γ' を Γ の指数有限の部分群とし χ を Γ' に制限したものも χ で表わすと，$S_k(\Gamma', \chi)$ はこの Petersson 内積に関して $S_k(\Gamma, \chi)$ の Hermite 部分空間である. また $f, g\in S_k(\Gamma, \chi)$ とすると Petersson 内積は

$$(f, g)=v(\Gamma\backslash H)^{-1}\int_{\Gamma\backslash H}f(z)\bar{g}(z)\mathrm{Im}(z)^k dv(z)$$

と表わされることは明らかである. 特に χ が単位指標であるならば，Petersson 内積に関して次の定理が成り立つ.

定理 2.8.2　(1)　$\Gamma_1\approx\Gamma_2$ とし，$\alpha\in\tilde{\Gamma}_1(=\tilde{\Gamma}_2)$ とする. $\alpha'=\det(\alpha)\alpha^{-1}$ とおくと，$f\in S_k(\Gamma_1)$，$g\in S_k(\Gamma_2)$ に対して

$$(f|[\alpha]_k,\ g)=(f,\ g|[\alpha']_k)$$

である.

（2） $f,\ g\in S_k(\Gamma)$，$\alpha\in\tilde{\Gamma}$ ならば $\alpha'=\det(\alpha)\alpha^{-1}$ とおくと

$$(f|\Gamma\alpha\Gamma,\ g)=(f,\ g|\Gamma\alpha'\Gamma)$$

が成り立つ.

証明 （1） $f|[\alpha]_k\in S_k(\alpha^{-1}\Gamma_1\alpha)$ であるから，$\Gamma=\alpha^{-1}\Gamma_1\alpha\cap\Gamma_2$ とおくと

$$(f|[\alpha]_k,\ g)=v(\Gamma\backslash H)^{-1}\int_{\Gamma\backslash H}\det(\alpha)^{k/2}j(\alpha,z)^{-k}f(\alpha z)\bar{g}(z)\,\mathrm{Im}(z)^k dv(z)$$

$$=v(\Gamma\backslash H)^{-1}\int_{\alpha\Gamma\alpha^{-1}\backslash H}\det(\alpha)^{k/2}f(z)\overline{g(\alpha^{-1}z)}\cdot$$

$$j(\alpha,\ \alpha^{-1}z)^{-k}\,\mathrm{Im}(\alpha^{-1}z)^k dv(z)$$

である. $\alpha^{-1}z=\alpha'z$, $j(\alpha,\ \alpha^{-1}z)=j(\alpha,\ \alpha'z)=\det(\alpha)j(\alpha',\ z)^{-1}$, $\mathrm{Im}(\alpha^{-1}z)=\mathrm{Im}(\alpha'z)=\det(\alpha')|j(\alpha',z)|^{-2}\mathrm{Im}(z)$, $\det(\alpha)=\det(\alpha')$, $v(\Gamma\backslash H)=v(\alpha\Gamma\alpha^{-1}\backslash H)$ であるから

$$=v(\alpha\Gamma\alpha^{-1}\backslash H)^{-1}\int_{\alpha\Gamma\alpha^{-1}\backslash H}f(z)\det(\alpha')^{k/2}\overline{j(\alpha',z)^{-k}g(\alpha'z)}\,\mathrm{Im}(z)^k dv(z)$$

$$=(f,\ g|[\alpha']_k)$$

を得る.（2）“$-1\in\Gamma\Longleftrightarrow -1\in\alpha^{-1}\Gamma\alpha$” となることに注意すると

$$[\Gamma:\Gamma\cap\alpha^{-1}\Gamma\alpha]=v(\Gamma\cap\alpha^{-1}\Gamma\alpha\backslash H)/v(\Gamma\backslash H)$$

$$=v(\alpha\Gamma\alpha^{-1}\cap\Gamma\backslash H)/v(\Gamma\backslash H)$$

$$=[\Gamma:\Gamma\cap\alpha\Gamma\alpha^{-1}]$$

であるから，補題 2.7.1（4）により $\Gamma\alpha\Gamma$ の左，右の Γ 剰余類の個数は等しい. よって補題 2.7.7 により $\Gamma\alpha\Gamma$ の左右の剰余類は共通の代表系を持つ. 即ち $\{\alpha_\nu\}$ が存在して $\Gamma\alpha\Gamma=\coprod\Gamma\alpha_\nu=\coprod\alpha_\nu\Gamma$ と書けるから，$\Gamma\alpha^{-1}\Gamma=\coprod\Gamma\alpha_\nu^{-1}$ であり $\Gamma\alpha'\Gamma=\coprod\Gamma\alpha_\nu'$ （$\alpha_\nu'=\det(\alpha_\nu)\alpha_\nu^{-1}$）となるので

$$(f|\Gamma\alpha\Gamma,\ g)=\det(\alpha)^{k/2-1}\sum_\nu(f|[\alpha_\nu]_k,\ g)$$

$$=\det(\alpha)^{k/2-1}\sum_\nu(f,\ g|[\alpha_\nu']_k)$$

$$=(f,\ g|\Gamma\alpha'\Gamma)$$

を得る. （証明終）

Hecke 作用素の幾何学的な意味を述べる．以下，代数幾何学の初等的な知識は仮定する．$\mathfrak{R}$ を compact な Riemann 面とすると，$\mathfrak{R}$ は特異点を持たない代数曲線と複素多様体として同型である．$\mathfrak{R}$ の因子群の部分群 $D_0(\mathfrak{R})$

$$D_0(\mathfrak{R})=\{\mathfrak{a}\in D(\mathfrak{R})\,|\,\deg(\mathfrak{a})=0\}$$

と定義すると，(2.2.8) により $D_l(\mathfrak{R})\subset D_0(\mathfrak{R})$ である．剰余群

$$J=D_0(\mathfrak{R})/D_l(\mathfrak{R})$$

には自然に複素多様体の構造が入り，更に J は abel 多様体であることが示される．J を abel 多様体と考えたものを jacobi 多様体と言う．$\mathscr{D}^1_0(J)$ で J の正則な微分形式の空間を表わすと

$$\mathscr{D}^1_0(\mathfrak{R})\cong\mathscr{D}^1_0(J)$$

が成り立つ．さて Γ を第1種の Fuchs 群とし，$\alpha\in\tilde{\Gamma}$ とすると

$$H^*\ni z\longmapsto(z,\alpha z)\in H^*\times H^*$$

は $\mathfrak{R}_{\Gamma\cap\alpha\Gamma\alpha^{-1}}$ の $\mathfrak{R}_\Gamma\times\mathfrak{R}_\Gamma$ へのうめ込みを引き起こす．$\mathfrak{R}_{\Gamma\cap\alpha\Gamma\alpha^{-1}}$ の $\mathfrak{R}_\Gamma\times\mathfrak{R}_\Gamma$ における像を $\mathscr{T}(\Gamma\alpha\Gamma)$ と表わす．$\mathscr{T}(\Gamma\alpha\Gamma)$ は $\mathfrak{R}_\Gamma$ から $\mathfrak{R}_\Gamma$ への代数的対応であり，$\alpha,\ \beta\in\tilde{\Gamma}$ のときに，$\Gamma\alpha\Gamma$ と $\Gamma\beta\Gamma$ の $R(\Gamma,\tilde{\Gamma})$ の元としての積を $(\Gamma\alpha\Gamma)(\Gamma\beta\Gamma)=\sum c_\delta\Gamma\delta\Gamma$ とすると代数的対応として

$$\mathscr{T}(\Gamma\alpha\Gamma)\mathscr{T}(\Gamma\beta\Gamma)=\sum_\delta c_\delta\mathscr{T}(\Gamma\delta\Gamma)$$

が成り立つ．更に $\pi: H^*\longrightarrow\mathfrak{R}_\Gamma$ を自然な写像とし，$\Gamma\alpha\Gamma$ を $\Gamma\alpha\Gamma=\coprod\Gamma\alpha_\nu$ と左 Γ 剰余類に分解すると

(2.8.4)
$$\mathscr{T}(\Gamma\alpha\Gamma)(\pi(z))=\sum_\nu\pi(\alpha_\nu z)$$

が成り立つ．この代数的対応 $\mathscr{T}(\Gamma\alpha\Gamma)$ を modular 対応と言う．(2.8.4) により $\mathscr{T}(\Gamma\alpha\Gamma)$ は $\mathfrak{R}_\Gamma$ の jacobi 多様体 J_Γ の自己準同型を引き起こす．この J_Γ の自己準同型を $\tau(\Gamma\alpha\Gamma)$ と表わすと，

$$\begin{array}{ccc} S_2(\Gamma) & \xrightarrow{\Gamma\alpha\Gamma} & S_2(\Gamma)\\ \wr\| & & \wr\| \\ \mathscr{D}^1_0(\mathfrak{R}_\Gamma) & & \mathscr{D}^1_0(\mathfrak{R}_\Gamma) \\ \wr\| & & \wr\| \\ \mathscr{D}^1_0(J_\Gamma) & \xrightarrow{\circ\,\tau(\Gamma\alpha\Gamma)} & \mathscr{D}^1_0(J_\Gamma)\end{array}$$

は可換である．さて特に Γ として第4章で述べる合同 modular 群をとると，$\mathfrak{R}_\Gamma$ および J_Γ は有理数体または円分体で定義される．$\mathfrak{R}_\Gamma$ および J_Γ を調べる上で，特に $\mathfrak{R}_\Gamma$ および J_Γ の整数論的な事柄，例えば Hasse の ζ 函数と呼ばれる Dirichlet 級数や J_Γ の等分点を付け加えて得られる拡大体等を調べるのに上の $\mathscr{T}(\Gamma\alpha\Gamma)$ および $(\Gamma\alpha\Gamma)$ は重要な役割を果たす．これらの事実は保型函数および保型形式と整数論の繋りにおい

て最も重要な事柄の1つであるが，本書では紙数の都合と代数幾何学の知識を仮定しなかったために述べることが出来ない．これらの非常に興味深い理論については［志村 2, 3, 4, 6］等を参照されたい．第4章で modular 群に関する Hecke 環を調べたり，第6章において Hecke 作用素の cusp 形式の空間における trace を計算することは，それ自身も重要であるがこれらの代数幾何学的な整数論への応用を念頭においているのは言うまでもないことである．

第3章 L 函数

§3.1 Dirichlet の指標

N は自然数とし χ は $(\boldsymbol{Z}/N\boldsymbol{Z})^\times$ の指標，即ち $(\boldsymbol{Z}/N\boldsymbol{Z})^\times$ から $\boldsymbol{C}^1=\{z\,|\,|z|=1\}$ への準同型写像とする．任意の整数 $\boldsymbol{n}$ に対し

$$(3.1.1)\qquad \chi^*(n)=\begin{cases}\chi(n\,(\mathrm{mod}\,N)) & ((n,\ N)=1)\\ 0 & ((n,\ N)\neq 1)\end{cases}$$

と定義すると，χ^* は $\boldsymbol{Z}$ から $\boldsymbol{C}$ への写像で

(ｉ) $\chi^*(mn)=\chi^*(m)\chi^*(n)$， (ii) $n\equiv m\,(\mathrm{mod}\,N)$ なら $\chi^*(n)=\chi^*(m)$，

(iii) $\chi^*(n)\neq 0 \Longleftrightarrow (n,\ N)=1$

を満たす．$(\boldsymbol{Z}/N\boldsymbol{Z})^\times$ の指標 χ と (ｉ),(ii),(iii) を満たす $\boldsymbol{Z}$ から $\boldsymbol{C}$ への写像 χ^* は，(3.1.1) により 1対1に対しているから同一視して

$$\chi(n)=\chi^*(n)$$

と書き表わし，mod$N$ で定義される **Dirichlet の指標** (Dirichlet character) または単に mod$N$ の指標と言う．特に χ が $(\boldsymbol{Z}/N\boldsymbol{Z})^\times$ の単位指標に対応する場合，即ち

$$\chi(n)=\begin{cases}1 & ((n,\ N)=1)\\ 0 & ((n,\ N)\neq 1)\end{cases}$$

のときに，χ を mod$N$ の単位指標という．さて χ が mod$N$ の指標ならば

$$(3.1.2)\qquad \bar{\chi}(n)=\overline{\chi(n)}$$

と定義すると $\bar{\chi}$ も mod$N$ の指標である．また N の倍数 M に対して

$$\chi'(n)=\begin{cases}\chi(n) & ((n,\ M)=1)\\ 0 & ((n,\ M)\neq 1)\end{cases}$$

とおくと，χ' は $\bmod M$ で定義される指標である．χ' を χ の引き起こす指標であると言い，混乱の恐れのない限り χ の引き起こす指標も χ で表わすことにする．

$\bmod N$ で定義される指標 χ に対して，$\mathfrak{M}_\chi$ を次の条件 (3.1.3) を満たす自然数 m 全体のなす集合とする．

(3.1.3) $(n, N)=1$ 且つ $n\equiv 1 \pmod m$ ならば $\chi(n)=1$ である．

N は $\mathfrak{M}_\chi$ に含まれるから，$\mathfrak{M}_\chi$ は空集合ではない．$m_1, m_2\in\mathfrak{M}_\chi$ とすると，明らかに m_1 と m_2 の最大公約数 (m_1, m_2) は $\mathfrak{M}_\chi$ に含まれるから，$\mathfrak{M}_\chi$ に含まれる最小の数を m_χ とすると m_χ は $\mathfrak{M}_\chi$ に含まれるすべての数を割り切る．この m_χ を χ の conductor と言う．もし $n\in\boldsymbol{Z}$ が $(n, m_\chi)=1$ ならば，$n'\in\boldsymbol{Z}$ を $(n', N)=1$ で $n'\equiv n \bmod m_\chi$ にとり

$$\chi_1(n)=\begin{cases}\chi(n'), & ((n, m_\chi)=1)\\ 0 & ((n, m_\chi)\neq 1)\end{cases}$$

と定義すると，χ_1 は $\bmod m_\chi$ の指標で χ は χ_1 から引き起こされる．特に $N=m_\chi$ のときに，χ は $\bmod N$ で定義される**原始的** (primitive) な Dirichlet の指標であると言う．このときは，明らかに $\chi=\chi_1$ である．

χ および ψ が各々 $\bmod N$ および $\bmod M$ で定義される Dirichlet の指標ならば，$n(\in\boldsymbol{Z})$ に対して

$$(\chi\psi)(n)=\chi(n)\psi(n)$$

と定義する．L を N, M の最小公倍数とすると $\chi\psi$ は $\bmod L$ の指標である．次に χ は $\bmod N$ の指標とし，$N=\prod_p p^e$ を N の素因子分解とする．n を p と互いに素な自然数とする．自然数 m を

$$m\equiv\begin{cases}n & (\bmod p^e)\\ 1 & \left(\bmod \dfrac{N}{p^e}\right)\end{cases}$$

にとり

(3.1.4) $$\chi_p(n)=\chi(m)$$

とおく．$\chi_p(n)$ は m のとり方によらずに決まり，$\bmod p^e$ の指標となり，

更に

$$\chi(n)=\prod_{p|N}\chi_p(n)$$

が成り立つ.

原始的な Dirichlet の指標 χ に対し

$$W(\chi)=\sum_{a=0}^{m-1}\chi(a)e^{2\pi ai/m}\qquad(m=m_\chi)$$

と定義し, **Gauss の和**と呼ぶ. 次の補題は基本的である.

補題 3.1.1 χ が $\bmod m$ で定義される原始的な Dirichlet の 指標であれば

(1) 任意の $b\in\boldsymbol{Z}$ に対し, $\sum_{a=0}^{m-1}\chi(a)e^{2\pi abi/m}=\bar{\chi}(b)W(\chi)$ である.

(2) $W(\chi)W(\bar{\chi})=\chi(-1)m$.

(3) $\overline{W(\chi)}=\chi(-1)W(\bar{\chi})$.

(4) $|W(\chi)|^2=m$.

証明 (1) 先ず $(b,m)=1$ とすると $\chi(a)=\chi(ab)\bar{\chi}(b)$ であるから

$$\sum_{a=0}^{m-1}\chi(a)e^{2\pi abi/m}=\bar{\chi}(b)\sum_{a=0}^{m-1}\chi(ab)e^{2\pi abi/m}=\bar{\chi}(b)W(\chi)$$

である. $(b,m)\neq1$ とする. $n=m/(b,m)$ とおき, $(\boldsymbol{Z}/m\boldsymbol{Z})^\times$ の部分群 H を

$$H=\{d\in(\boldsymbol{Z}/m\boldsymbol{Z})^\times\mid d\equiv1\pmod n\}$$

と定義し, $(\boldsymbol{Z}/m\boldsymbol{Z})^\times=\coprod_c Hc$ と剰余類に分解する. χ は原始的であるから, χ を H に制限したものは単位指標ではない. よって

$$\begin{aligned}\sum_a\chi(a)e^{2\pi abi/m}&=\sum_c\sum_{d\in H}\chi(dc)e^{2\pi bci/m}\\&=\sum_c\chi(c)e^{2\pi bci/m}\Big(\sum_{d\in H}\chi(d)\Big)=0\end{aligned}$$

となる. (2) を示そう. (1) により

$$\begin{aligned}W(\chi)W(\bar{\chi})&=\sum_{b=0}^{m-1}W(\chi)\bar{\chi}(b)e^{2\pi bi/m}\\&=\sum_{b=0}^{m-1}\sum_{a=0}^{m-1}\chi(a)e^{2\pi abi/m}e^{2\pi bi/m}\\&=\sum_{a=0}^{m-1}\chi(a)\sum_{b=0}^{m-1}e^{2\pi b(a+1)i/m}\end{aligned}$$

である．$\sum_b e^{2\pi b(a+1)i/m}$ は $a+1\equiv 0 \pmod{m}$ か $a+1\not\equiv 0 \pmod{m}$ に従って m または 0 であるから

$$=\chi(-1)m$$

を得る．$\chi(-1)=\pm 1$ であるから

$$\overline{W(\chi)}=\sum_a \bar{\chi}(a)e^{-2\pi ai/m}=\bar{\chi}(-1)W(\bar{\chi})=\chi(-1)W(\bar{\chi})$$

である．よって

$$W(\chi)\overline{W(\chi)}=W(\chi)W(\bar{\chi})\chi(-1)=m$$

となり（3），（4）が得られた． （証明終）

補題 3.1.2 χ, ψ は原始的な Dirichlet の指標とし，m_χ, m_ψ は各々 χ および ψ の conductor とする．$(m_\chi, m_\psi)=1$ ならば

$$W(\chi\psi)=\chi(m_\psi)\psi(m_\chi)W(\chi)W(\psi)$$

である．

証明 $m=m_\chi,\ n=m_\psi$ とおく．仮定により任意の $a\in \boldsymbol{Z}$ に対して

$$a=bn+cm$$

なる $b, c\in\boldsymbol{Z}$ が存在する．b, c は各々 $\bmod m, \bmod n$ で一意的に存在し，a が $\boldsymbol{Z}/mn\boldsymbol{Z}$ の代表系を動くときに (b, c) は $\boldsymbol{Z}/m\boldsymbol{Z}\times\boldsymbol{Z}/n\boldsymbol{Z}$ の代表系を尽くす．よって

$$\begin{aligned}W(\chi\psi)&=\sum_{a=0}^{mn-1}(\chi\psi)(a)e^{2\pi ia/mn}\\&=\left(\sum_{b=0}^{m-1}\chi(bn)e^{2\pi ib/m}\right)\left(\sum_{c=0}^{n-1}\psi(cm)e^{2\pi ic/n}\right)\\&=\chi(n)\psi(m)W(\chi)W(\psi)\end{aligned}$$

となり補題を得る． （証明終）

p を奇素数とする．整数 n に対して

$$(3.1.5)\quad \left(\frac{n}{p}\right)=\begin{cases}1 & (p\nmid n \text{ で } x^2\equiv n \pmod{p} \text{ が整数解を持つ})\\ -1 & (p\nmid n \text{ で } x^2\equiv n \pmod{p} \text{ が整数解を持たない})\\ 0 & (p\mid n)\end{cases}$$

と定義する．$\left(\frac{n}{p}\right)$ を**2次剰余記号** (quadratic residue symbol) または

Legendre の記号と言う．$n\longmapsto\left(\frac{n}{p}\right)$ は mod p で定義される Dirichlet の指標である．

2次剰余記号を拡張し，整数 a, b に対して $\left(\frac{a}{b}\right)$ を定義しよう．先ず b が 2, -1, 1 のときに各々

$$\left(\frac{a}{2}\right)=\begin{cases} 1 & (a\equiv 1 \pmod 8) \\ -1 & (a\equiv 5 \pmod 8) \\ 0 & (\text{その他}), \end{cases} \qquad \left(\frac{a}{-1}\right)=\begin{cases} 1 & (a\geqq 0) \\ -1 & (a<0), \end{cases}$$

$$\left(\frac{a}{1}\right)=1, \qquad \left(\frac{a}{0}\right)=0$$

と定義する．p が奇素数の時には $\left(\frac{a}{p}\right)$ は (3.1.5) で定義した通りとする．$b\neq 0$ とし，$b=\varepsilon\prod_p p$ (p：素数，$\varepsilon=\pm 1$) とおいたときに

$$\left(\frac{a}{b}\right)=\left(\frac{a}{\varepsilon}\right)\prod_p\left(\frac{a}{p}\right) \tag{3.1.6}$$

と定義する．次の定理は古典的な2次体の平方剰余の定理と呼ばれるものである．証明は [高木], [Borevich-Shafarevich] 等を見られたい．

定理 3.1.3 $F=\boldsymbol{Q}(\sqrt{m})$ を2次体とする．ここで m は平方因子を含まない整数とする．p を素数とすると次の (1)(2)(3) が成り立つ．

(1) $\left(\frac{m}{p}\right)=1$ ならば p は F で分解する．

(2) $\left(\frac{m}{p}\right)=-1$ ならば p は F で分解も分岐もしない．

(3) $\left(\frac{m}{p}\right)=0$ ならば p は F で分岐する．

さて $F=\boldsymbol{Q}(\sqrt{m})$ を定理のように2次体とし，d を F の判別式* とすると

$$d=\begin{cases} m & (m\equiv 1 \pmod 4) \\ 4m & (m\not\equiv 1 \pmod 4) \end{cases}$$

であるから．$\left(\frac{m}{p}\right)=\left(\frac{d}{p}\right)$ が成り立つ．d が2次体の判別式であるときに，

* 定義は §3.3 参照．

$\left(\frac{d}{a}\right)$ は特に **Kronecker の記号**と呼ばれる．次に挙げる2次剰余記号の性質は実際に計算をする上で便利である．

(3.1.7) 任意の整数 m に対し $\left(\frac{m}{\cdot}\right)$ は Dirichlet の指標である．特に d が2次体の判別式ならば，$\left(\frac{d}{\cdot}\right)$ は $\mathrm{mod}(|d|)$ で定義される原始的な Dirichlet の指標である．

(3.1.8) p が素数または -1, -2 のときに

$$p^*=\begin{cases} p & (p\equiv 1 \pmod 4) \\ -p & (p\equiv -1 \pmod 4),\ p\neq -1) \\ -4 & (p=-1) \\ 8 & (p=2) \\ -8 & (p=-2) \end{cases}$$

と定義する．整数 d が2次体の判別式となり得る必要十分条件は，d が相異なる p^* の積になることである．更に $d=\prod p^*$ とすると

$$\left(\frac{d}{a}\right)=\prod\left(\frac{p^*}{a}\right)$$

が任意の $a(\in \boldsymbol{Z})$ に対して成り立つ．

(3.1.9) p が奇素数ならば，$\left(\frac{p^*}{a}\right)=\left(\frac{a}{p}\right)$ が任意の a について成立する．この最後の式は **Legendre の平方剰余の相互律**と呼ばれる．

§3.2 Riemann の ζ 函数

$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ を複素数列とする．複素数 s に対し

(3.2.1) $$\varphi(s)=\sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s}$$

とおく．ここで $n^{-s}=e^{-\log(n)s}$ である．このようにして定義される級数を **Dirichlet 級数**と言う．特に $a_n=1$ $(n\geqq 1)$ としたときには

$$\zeta(s)=\sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}$$

とかき，**Riemann の ζ 函数**と呼ぶ．任意の $\varepsilon>0$ に対し $\mathrm{Re}(s)\geqq 1+\varepsilon$ ならば

$$\sum_{n=1}^{\infty}|n^{-s}|\leqq 1+\int_1^{\infty}x^{-(1+\varepsilon)}dx<\infty$$

であるから Riemann の ζ 函数は $\mathrm{Re}(s)\geqq 1+\varepsilon$ において一様に絶対収束する．従って，$\zeta(s)$ は $\mathrm{Re}(s)>1$ において正則な函数を与える．$\zeta(s)$ は

(3.2.2) $$\zeta(s)=\prod_p(1-p^{-s})^{-1}$$

なる無限積に展開されることをみよう．ここで p はすべての素数の上を動く．これが形式的に等号が成立するのは明らかであるが，$\mathrm{Re}(s)\geqq 1+\varepsilon$ ならば $\sum_p|p^{-s}|\leqq\sum n^{-(1+\varepsilon)}<\infty$ であるから，(3.2.2) の右辺は $\mathrm{Re}(s)\geqq 1+\varepsilon$ で一様に絶対収束し，任意の自然数 m に対して

$$\left|\sum_{n<m}n^{-s}-\prod_{p<m}(1-p^{-s})^{-1}\right|\leqq\sum_{n\geqq m}n^{-(1+\varepsilon)}$$

となるが，右辺は $m\longrightarrow\infty$ とするときに0に近づくので，$\mathrm{Re}(s)>1$ において実際に等号が成り立つ．一般に (3.2.1) で定義される Dirichlet 級数 $\varphi(s)$ が，複素領域で収束し

$$\varphi(s)=\prod_p\varphi_p(s)\qquad(\varphi_p(s)\text{ は }p^{-s}\text{ の有理函数})$$

と無限積に展開されるときに，$\varphi(s)$ は（素数に関する）**Euler 積**を持つと言う．

補題 3.2.1 $\sum_{n=1}^{\infty}a_nn^{-s}$ および $\sum_{n=1}^{\infty}b_nn^{-s}$ が $s=\sigma_0$ (>0) において絶対収束するとする．$\sum_{n=1}^{\infty}a_nn^{-s}=\sum_{n=1}^{\infty}b_nn^{-s}$ ならば $a_n=b_n$ である．

証明 両者の差をとることにより $\sum_{n=1}^{\infty}a_nn^{-s}=0$ ならば $a_n=0$ となることを示せば十分である．$\sum a_nn^{-s}$ は $s=\sigma_0$ で絶対収束するから $\mathrm{Re}(s)\geqq\sigma_0$ で一様に絶対収束する．さて m を $a_m\neq 0$ となる最小の自然数とする．$n>m^2$ ならば，任意の正の実数 σ に対して $(n/m)^{-\sigma}\leqq m^{-\sigma}$ であるから，$\sigma\geqq\sigma_0$ ならば

$$|a_m|\leqq\sum_{n=m+1}^{\infty}|a_n|\left(\frac{n}{m}\right)^{-\sigma}\leqq\sum_{n=m+1}^{m^2}|a_n|\left(\frac{n}{m}\right)^{-\sigma}+\sum_{n=m^2+1}^{\infty}|a_n|n^{-\sigma/2}$$

となる．N を十分大きくとると，任意の σ ($\geqq 2\sigma_0$) に対して $\sum_{n=N+1}^{\infty}|a_n|n^{-\sigma/2}\leqq|a_m|/3$ であるから

$$|a_m|\leqq\sum_{n=m+1}^{m^2}|a_n|\left(\frac{n}{m}\right)^{-\sigma}+\sum_{n=m^2+1}^{N}|a_n|n^{-\sigma/2}+|a_m|/3$$

であるが，σ を十分大きくとると $\sum_{n=m+1}^{m^2}|a_n|(n/m)^{-\sigma}+\sum_{n=m^2+1}^{N}|a_n|n^{-\sigma/2}\leqq|a_m|/3$ となるから $|a_m|\leqq\frac{2}{3}|a_m|$ となり矛盾である． (証明終)

さて K を任意の可換環とし，$\tilde{K}$ を K 上の $u(p)$ (p：は素数を動く) を変数とする形式的な巾級数環，即ち

$$\tilde{K}=K[[u(p)\,|\,p：素数]]$$

とする．$\tilde{K}$ の元を形式的な Dirichlet 級数と言う．$n=\prod_p p^e$ を自然数 n の素因子分解とするときに

$$n^{-s}=\prod_p u(p^e),\qquad 1^{-s}=1$$

とおいてやることにすると，$\tilde{K}$ の元は K の数列 $\{a_n\}$ を用いて

$$\varphi(s)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n n^{-s}$$

と書き表わされる．形式的な Dirichlet 級数 $\varphi(s)$ が $\tilde{K}$ の元として

$$\varphi(s)=\prod_n \varphi_p(s)\qquad(\varphi_p(s)\in K[[p^{-s}]])$$

と書き表わされるときに，$\varphi(s)$ は形式的な Euler 積を持つと言う．形式的な Dirichlet 級数および Euler 積は，数列 $\{a_n\}$ の間の関係を述べるのに便利なことが多い．

さて整数論に現われる Dirichlet 級数の特徴は，一般に全平面に有理型函数として拡張されて，函数等式を満たすことである．これを Riemann の ζ 函数についてみてみよう．そのために，$\mathrm{Re}(s)>0$ なる複素数に対して

$$\Gamma(s)=\int_0^{\infty}e^{-t}t^s\frac{dt}{t}$$

と定義する．$\varepsilon>0$ とすると $\mathrm{Re}(s)\geqq\varepsilon$ ならば

$$e^{-t}t^s=\begin{cases}O(e^{-t}) & (t\longrightarrow\infty)\\ O(e^{\varepsilon}) & (t\longrightarrow 0)\end{cases}$$

であるから $\Gamma(s)$ は $\mathrm{Re}(s)\geqq\varepsilon$ で一様に絶対収束する．よって $\Gamma(s)$ は $\mathrm{Re}(s)>0$ において正則な函数を与える．定義により $\mathrm{Re}(s)>0$ においては $\Gamma(s+1)=s\Gamma(s)$ が成り立っているから，この関係式を用いて更に $\mathrm{Re}(s)>-1$ のときにも $\Gamma(s)=s^{-1}\Gamma(s+1)$ とおいてやると，$\Gamma(s)$ は $\mathrm{Re}(s)>-1$ で定義される

有理型函数である．これを繰り返して $\Gamma(s)$ を全 s 平面で定義される有理型函数に拡張することが出来る．こうして定義された函数 $\Gamma(s)$ を **Γ 函数**と言う．Γ 函数の次のようなよく知られた性質を持っている.*

(3.2.3)　$\Gamma(s+1)=s\Gamma(s),\quad \Gamma(1)=1,\quad \Gamma(n)=(n-1)!\quad (n=1, 2, \cdots)$.

(3.2.4)　$\Gamma(s)$ は零点を持たない．$\Gamma(s)$ の極は $s=-n$ $(n=0, 1, 2, \cdots)$ で $s=-n$ における $\Gamma(s)$ の留数は $\dfrac{(-1)^n}{n!}$ である．

(3.2.5)　$\Gamma(s)\Gamma(1-s)=\dfrac{\pi}{\sin(\pi s)},\quad \Gamma\left(\dfrac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}$.

(3.2.6)　(Legendre の関係式)　$2^{2s-1}\Gamma(s)\Gamma\left(s+\dfrac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}\,\Gamma(2s)$

(3.2.7)　(Stirling の公式)　$\Gamma(s)=\sqrt{2\pi}\,s^{s-1/2}e^{-s+\mu(s)}$, ここで $\mu(s)$ は $\mathrm{Re}(s)\geqq\varepsilon>0$ において $|s|\longrightarrow\infty$ とするときに一様に $\mu(s)\longrightarrow 0$ となる函数である．

さて $s=\sigma+i\tau$ とおくと

$$|s^{s-1/2}|=|s|^{\sigma-1/2}e^{-\tau\arg(s)}$$

である．ν_1, ν_2 を $\nu_1<\nu_2$ なる実数とすると $\nu_1\leqq\sigma\leqq\nu_2$ ならば，$|\tau|\longrightarrow\infty$ とすると $-\tau\arg(s)\longrightarrow-\dfrac{\pi}{2}|\tau|$ であるから，(3.2.3) と (3.2.7) により $|\mathrm{Im}(s)|\longrightarrow\infty$ としたときに $\Gamma(s)$ の次のような評価式を得る．

(3.2.8)　(Stirling の評価式)　ν_1, ν_2 を $\nu_1<\nu_2$ なる実数とする．$s=\sigma+i\tau$ とすると $\nu_1\leqq\sigma\leqq\nu_2$ において σ に関して一様に

$$\Gamma(s)\sim\sqrt{2\pi}\,\tau^{\sigma-1/2}e^{-\pi|\tau|/2}\qquad(|\tau|\longrightarrow\infty)$$

が成り立つ．

以上の準備の下に次の定理が証明される．

定理 3.2.2　(1)　$\Lambda(s)=\pi^{-s/2}\Gamma\left(\dfrac{s}{2}\right)\zeta(s)$ とおくと，$\Lambda(s)+\dfrac{1}{s}+\dfrac{1}{1-s}$ は全平面の正則函数に解析接続され

$$\Lambda(s)=\Lambda(1-s)$$

を満たす．

---

*　証明は例えば Ahlfors, Complex analysis, second edition, McGraw-Hill 1966 参照.

（2） $\zeta(s)-\dfrac{1}{s-1}$ は全平面で正則である．

証明 $\Gamma(s)$ の定義により $\mathrm{Re}(s)>1$ のときに

$$\Lambda(2s)=\sum_{n=1}^{\infty}(\pi n^2)^{-s}\int_0^{\infty}e^{-t}t^s\frac{dt}{t} \tag{3.2.9}$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^{\infty}e^{-\pi n^2 t}t^s\frac{dt}{t}=\int_0^{\infty}\Big(\sum_{n=1}^{\infty}e^{-\pi n^2 t}\Big)t^s\frac{dt}{t}$$

である．ここで積分と和の順序の交換は $\sum_{n=1}^{\infty}|e^{-\pi n^2 t}t^{s-1}|$ が可積分であるので可能であった．$f(x)=e^{-\pi x^2 t}$ とすると，$\sum_{n=-\infty}^{\infty}f(x+n)$ は一様収束するから Poisson の和公式により

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}e^{-\pi n^2 t}=\frac{1}{\sqrt{t}}\sum_{n=-\infty}^{\infty}e^{-\pi n^2 t^{-1}}$$

が成り立つ．$\omega(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}e^{-\pi n^2 t}$ とおくと $\omega(t)=\dfrac{1}{\sqrt{t}}\omega\Big(\dfrac{1}{t}\Big)$ であるから

$$\Lambda(2s)=\int_0^{\infty}\frac{1}{2}(\omega(t)-1)t^s\frac{dt}{t}$$

$$=\int_0^{1}\frac{1}{2}\Big(\frac{1}{\sqrt{t}}\omega\Big(\frac{1}{t}\Big)-1\Big)t^s\frac{dt}{t}+\int_1^{\infty}\frac{1}{2}(\omega(t)-1)t^s\frac{dt}{t}$$

$$=\int_1^{\infty}\frac{1}{2}(t^{1/2-s}+t^s)(\omega(t)-1)\frac{dt}{t}-\frac{1}{2s}-\frac{1}{1-2s}$$

である．$\omega(t)-1=O(e^{-\pi t})$ $(t\longrightarrow\infty)$ がわかるから最終の式の積分は s に関して広義一様に収束し s の正則函数を与える．よって任意の s に対し $\Lambda(2s)$ を最終の式で定義することにより $\Lambda(s)$ の解析接続を得る．従って $\Lambda(s)+\dfrac{1}{s}+\dfrac{1}{1-s}$ は全平面で正則である．この式は $s\longmapsto\dfrac{1}{2}-s$ に関して不変であるから函数等式を得る．（2）は（1）と (3.2.4) により容易にわかる．

（証明終）

一般に $\boldsymbol{R}_+=\{x\in\boldsymbol{R}\,|\,x>0\}$ 上の函数 $f(t)$ に対し

$$\lambda(s)=\int_0^{\infty}f(t)t^s\frac{dt}{t}$$

が複素領域で意味を持つときに，$\lambda(s)$ を $f(t)$ の **Mellin 変換**と言う．(3.2.9)

により $\Lambda(2s)$ は $\frac{1}{2}(\omega(t)-1)$ の Mellin 変換である．今 $t=e^x$, $s=\sigma+i\tau$ とおくと上の式は

$$\lambda(\sigma+i\tau)=\int_{-\infty}^{\infty} f(e^x)e^{sx}dx$$

と変形される．即ち $\lambda(\sigma+i\tau)$ は σ を固定したときに，$f(e^x)e^{\sigma x}$ を Fourier 変換したものにほかならない．よって $f(e^x)e^{\sigma x}$ が x に関して Schwarz の函数（$\pm\infty$ における急減少函数*）となるような σ に対しては，f の Mellin 変換は意味を持ち，逆変換（Mellin の逆変換と呼ばれる）は

$$f(t)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathrm{Re}(s)=\sigma}\lambda(s)t^{-s}ds$$

で与えられる．特に $f(t)=e^{-t}$ とすると，$\sigma>0$ において

$$e^{-t}=\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathrm{Re}(s)=\sigma}\Gamma(s)t^{-s}ds \tag{3.2.10}$$

である．また (3.2.9) と Stirling の公式 (3.2.7) により，$\sigma>1$ のときに

$$\frac{1}{2}(\omega(t)-1)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathrm{Re}(s)=\sigma}\Lambda(2s)t^{-s}ds$$

と表わされる．即ち $\frac{1}{2}(\omega(t)-1)$ と $\Lambda(2s)$ は Mellin 変換によって互いに移りあう．今 $z\in H$ に対して

$$\theta(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}e^{2\pi i n^2 z} \tag{3.2.11}$$

と定義する．明らかに右辺は広義一様に収束し H 上の正則函数を与える．$\omega(t)=\theta\left(\frac{it}{2}\right)$ であるから，$\theta(z)$ と $\Lambda(s)$ は Mellin 変換により本質的には同じものと考えられる．また $\omega(t)=\frac{1}{\sqrt{t}}\omega\left(\frac{1}{t}\right)$ であったから，$\theta(z)$ は

$$\theta\left(-\frac{1}{4z}\right)=\left(\frac{2z}{i}\right)^{1/2}\theta(z) \tag{3.2.12}$$

なる変換公式を持つ．この変換公式によって Riemann の ζ 函数の函数等式が導けたのであるが，実は逆に Riemann の ζ 函数の函数等式からこの式が得ら

---

* $F(x)$ が $\pm\infty$ で急減少であるとは，$F(x)$ は無限回微分可能で，任意の自然数の組 m, n に対して $\sup_x\left|x^n\frac{d^m}{dx^m}f(x)\right|<\infty$ であるときに言う．

れるのである．Hecke は Dirichlet 級数と上半平面上の正則函数とのこのような対応を更に拡張した．或る決まった形の函数等式を満たす Dirichlet 級数と保型形式とは実は本質的には同一のものと言うことが示されるのである．このことについては第 4 章で詳しく述べる．

最後に，次章以下に度々現われる $\zeta(s)$ の偶数点における値

$$\zeta(k)=\sum_{n=1}^{\infty} n^{-k} \qquad (k：偶数,\ k>0)$$

を調べておこう．まず $te^t/(e^t-1)$ の原点における Taylor 展開

$$\frac{te^t}{e^t-1}=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{B_m}{m!}t^m$$

の係数 B_m を m 番目の **Bernoulli 数** (m-th Bernoulli number) と呼ぶ．明らかに

$$B_m\in \boldsymbol{Q}, \qquad B_0=1$$

である．また $F(-t)=F(t)-t$ であるから，$B_1=\frac{1}{2}$ で且つ

$$B_m=0 \qquad (m：奇数,\ m>1)$$

がわかる．さて

$$z\cot(z)=iz\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{e^{iz}-e^{-iz}}=iz+\frac{2ize^{-2iz}}{1-e^{-2iz}}$$

であり，$\cot(z)$ は $z=n\pi$ ($n\in\boldsymbol{Z}$) を含まない compact 集合上で，一様に収束する部分分数に

$$\cot(z)=\frac{1}{z}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2z}{z^2-n^2\pi^2}$$

と展開されるから，$-2iz=t$ とおくと

$$F(t)=1+\frac{t}{2}+2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{t^2}{t^2+(2\pi n)^2} \qquad (t\neq 2n\pi i,\ n\in\boldsymbol{Z})$$

であるが，

$$\frac{t^2}{t^2+(2\pi n)^2}=\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^{m-1}\left(\frac{t}{2\pi n}\right)^{2m}$$

であるから

$$F(t)=1+\frac{t}{2}+2\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^{m-1}\frac{t^{2m}}{(2\pi n)^{2m}}$$

となる．右辺は絶対収束するから，和の順序が交換出来て

$$=1+\frac{t}{2}+\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^{m-1}\frac{2\zeta(2m)}{(2\pi)^{2m}}t^{2m}$$

となる．よって $B_{2m}/(2m)!=2(-1)^{m-1}\zeta(2m)(2\pi)^{-2m}$ を得る．即ち

定理 3.2.3　m を自然数とすると

$$\zeta(2m)=\frac{-(2\pi i)^{2m}}{2(2m)!}B_{2m}$$

が成り立つ．

§3.3　Hecke の L 函数

この節では，代数体および Hecke の L 函数について，後で必要な知識をまとめておく．F は g 次の代数体とする．$\tau_1, \cdots, \tau_g$ を F から $\boldsymbol{C}$ への同型写像の全体とし，$F_\nu=F^{\tau_\nu}$, $a_\nu=a^{\tau_\nu}$ $(a\in F)$ とおく．τ_ν は $F_\nu\subset\boldsymbol{R}$ または $F_\nu\not\subset\boldsymbol{R}$ であるに従って実または虚であると呼ばれる．以下 $\{\tau_\nu\}_{\nu=1}^{g}$ は

$$\nu\leqq r_1 \text{ ならば } \tau_\alpha \text{ は実,}$$

$$r_1+1\leqq\nu \text{ ならば } \tau_\alpha \text{ は虚であって } a_\nu=\bar{a}_{\nu+r_2}\ (a\in F)$$

である様に順序付けられているものとする．特に $r_1=g$ ならば F を総実な体と言い，$r_1=0$ ならば F を総虚な体であると言う．$\mathfrak{r}_F\subset F$ を F の整数環とする．I を F の ideal 群，P を $\mathfrak{r}_F$ の単項（分数）ideal 全体のなす I の部分群とする．I/P は有限群で，ideal 類群 (ideal class group) と呼ばれる．I/P の位数を $h(F)$ で表わし，F の**類数** (class number) と言う．また P_+ を $\{(a)\,|\,a^{(\nu)}>0,\ 1\leqq\nu\leqq r_1\}$ で生成される I の部分群としたときに I/P_+ の位数を狭義の類数と言う．さて $\mathfrak{m}$ を $\mathfrak{r}_F$ の整 ideal とするときに

$$I(\mathfrak{m})=\{\mathfrak{a}\in I\,|\,(\mathfrak{a},\mathfrak{m})=1\},$$

$$P(\mathfrak{m})=\{(a)\in P\,|\,((a),\mathfrak{m})=1\}$$

とおく．さて群 $I(\mathfrak{m})$ の指標 $\xi: I(\mathfrak{m})\longrightarrow\boldsymbol{C}^1$ に対して，実数 $u_\nu, v_\nu\,(1\leqq\nu\leqq r_1+r_2)$ で

$$u_\nu\in\begin{cases}\{0,1\} & (\tau_\nu:\text{実})\\ \boldsymbol{Z} & (\tau_\nu:\text{虚}),\end{cases}\qquad \sum_{\nu=1}^{r_1+r_2}v_\nu=0$$

となるものが存在して

$$\xi((a))=\prod_{\nu=1}^{r_1+r_2}\left(\frac{a_\nu}{|a_\nu|}\right)^{u_\nu}|a_\nu|^{iv_\nu} \tag{3.3.1}$$

と表わされるときに，ξ を mod $\mathfrak{m}$ で定義される F の**量指標**(grössen character) または **Hecke の指標** (Hecke character) と言う．mod $\mathfrak{m}$ で定義される Hecke の指標 ξ に対して

$$\mathfrak{M}=\{\mathfrak{n}: F \text{ の整 ideal} \mid (3.3.1) \text{ が } P(\mathfrak{n})\cap I(\mathfrak{m}) \text{ の元 } (a) \text{ に成り立つ}\}$$

とする．$\mathfrak{m}\in\mathfrak{M}$ であるから $\mathfrak{M}$ は空ではない．$\mathfrak{M}$ に含まれる ideal の最大公約 ideal を ξ の **conductor** と言う．特に $\mathfrak{m}$ がその conductor に一致するならば，ξ は**原始的** (primitive) であると言う．F の Hecke の指標 ξ は上の条件における u_ν, v_ν が

$$u_\nu=0\ \ (r_1+1\leqq\nu\leqq r_1+r_2)\ \text{且つ}\ v_\nu=0\ \ (1\leqq\nu\leqq r_1+r_2)$$

となるときには，特に**類指標** (class character) と呼ばれる．さて mod $\mathfrak{m}$ で定義される Hecke の指標 ξ に対して

$$\xi(\mathfrak{a})=\begin{cases}\xi(\mathfrak{a}) & (\mathfrak{a}\in I(\mathfrak{m}))\\ 0 & (\mathfrak{a}\notin I(\mathfrak{m}))\end{cases}$$

とおくことにより，ξ を I から $C^1\cup\{0\}$ への写像に拡張し，これを用いて Dirichlet 級数を

$$L(s,\xi)=\sum_{\mathfrak{a}\subset\mathfrak{r}}\xi(\mathfrak{a})\mathrm{N}(\mathfrak{a})^{-s}$$

と定義し，**Hecke の L 函数**と言う．ここで $\mathrm{N}(\mathfrak{a})=\mathrm{N}_F(\mathfrak{a})$ は $\mathfrak{a}$ の（絶対）norm，即ち $\mathrm{N}_F(\mathfrak{a})=|\mathfrak{r}_F/\mathfrak{a}|$ である．今 $\varepsilon>0$ とすると，$\mathrm{Re}(s)\geqq1+\varepsilon$ ならば

$$\sum_{\mathfrak{p}}\mathrm{N}(\mathfrak{p})^{-s}\leqq g\sum_{p}p^{-1-\varepsilon} \qquad (\text{左辺は } \mathfrak{r} \text{ の素 ideal，右辺は素数を動く})$$

であるから無限積 $\prod_{\mathfrak{p}}(1-\xi(\mathfrak{p})\mathrm{N}(\mathfrak{p})^{-s})^{-1}$ は $\mathrm{Re}(s)\geqq1+\varepsilon$ で一様に収束する．$\mathrm{Re}(s)\geqq1+\varepsilon$ ならば，任意の $x>0$ に対し

$$\sum_{\mathrm{N}(\mathfrak{a})\leqq x}|\mathrm{N}(\mathfrak{a})^{-s}|\leqq\prod_{\mathfrak{p}}(1-\mathrm{N}(\mathfrak{p})^{-1-\varepsilon})^{-1}$$

であるから，$L(s,\xi)$ は $\mathrm{Re}(s)>1$ で広義一様に絶対収束し

$$L(s,\xi)=\prod_{\mathfrak{p}}(1-\xi(\mathfrak{p})\mathrm{N}(\mathfrak{p})^{-s})^{-1}$$

なる Euler 積を持つ.

特に ξ が単位指標, 即ち $\xi(\mathfrak{a})=1$ $(\mathfrak{a}\in I)$ のときには

$$\zeta_F(s)=\sum_{\mathfrak{a}\subset\mathfrak{r}}\mathrm{N}(\mathfrak{a})^{-s}=\prod_{\mathfrak{p}}(1-\mathrm{N}(\mathfrak{p})^{-s})^{-1}$$

と書き **Dedekind の ζ 函数**と言う. $F=\boldsymbol{Q}$ の場合が Riemann の ζ 函数である. Hecke は一般に Hecke の L 函数に対し, 前節での $\zeta(s)$ の函数等式の証明を拡張して函数等式を得た ([Hecke]). これを述べるために Gauss の和を Hecke の指標 ξ について定義する必要がある. tr_F を F の $\boldsymbol{Q}$ 上の trace とし

$$\mathfrak{D}^{-1}=\{a\in F\,|\,\mathrm{tr}_F(ab)\in\boldsymbol{Z},\ {}^\forall b\in\mathfrak{r}_F\}$$

とおくと, $\mathfrak{D}^{-1}$ は F の分数 ideal で $\mathfrak{D}(F)$ を $\mathfrak{D}^{-1}$ の逆元とすると $\mathfrak{D}(F)$ は F の整 ideal である. $\mathfrak{D}(F)$ を F の共役差積 (differente) と言う. また $\alpha_1,\cdots,\alpha_g$ が $\mathfrak{r}_F$ の $\boldsymbol{Z}$ 上の基底であるときに

$$d_F=\det[\mathrm{tr}_F(\alpha_\nu\alpha_\mu)]\qquad(\in\boldsymbol{Z})$$

とおき, F の**判別式** (discriminant) と言う.

さて, ξ は $\mathrm{mod}\,\mathfrak{m}$ で定義される原始的な Hecke の指標とすると, $a\in\mathfrak{r}_F$ に対し

$$\xi_\infty(a)=\prod_{\nu=1}^{r_1+r_2}\left(\frac{a_\nu}{|a_\nu|}\right)^{u_\nu}|a_\nu|^{iv_\nu}$$

$$\xi_0(a)=\xi((a))\xi_\infty(a)^{-1}$$

と定義する. $a\equiv b\ \mathrm{mod}\,\mathfrak{m}$ ならば $\xi_0(a)=\xi_0(b)$ である. $\mathfrak{D}=\mathfrak{D}(F)$ とし, $\mathfrak{c}$ を $\mathfrak{D}\mathfrak{m}\mathfrak{c}$ が単項 ideal となる様な $\mathfrak{r}_F$ の ideal で $(\mathfrak{m},\mathfrak{c})=1$ なるものとする. $b\in\mathfrak{r}_F$ を $\mathfrak{D}\mathfrak{m}\mathfrak{c}=(b)$ なる元とし

$$W(\xi)=\frac{\xi_\infty(b)}{\xi(\mathfrak{c})}\sum_{a\in\mathfrak{c}\ \mathrm{mod}\ (\mathfrak{m}\mathfrak{c})}\xi_0(a)e^{2\pi i\,\mathrm{tr}(a/b)}\qquad(\mathrm{tr}=\mathrm{tr}_{F/\boldsymbol{Q}})$$

と定義する. $W(\xi)$ は $\mathfrak{c}$ および b のとり方によらずに決まる. $W(\xi)$ を ξ の **Gauss の和**と言う. 補題 3.1.1 と同様の議論によって

(3.3.2) $|W(\xi)|^2=\mathrm{N}_F(\mathfrak{m})$,

(3.3.3) ξ,η を $\mathfrak{m},\mathfrak{n}$ を conductor とする Hecke の指標とする. $(\mathfrak{m},\mathfrak{n})$

$=1$ ならば，$W(\xi\eta)=\xi(\mathfrak{n})\eta(\mathfrak{m})W(\xi)W(\eta)$ である

がわかる．また ξ を $\mathrm{mod}\,\mathfrak{m}$ で定義される Hecke の指標とするときに

$$\bar{\xi}(\mathfrak{a})=\overline{\xi(\mathfrak{a})} \qquad (\mathfrak{a}\in I(\mathfrak{m}))$$

と定義すれば，$\bar{\xi}$ は $\mathrm{mod}\,\mathfrak{m}$ で定義される Hecke の指標である．以上の準備の下に，Hecke の L 函数の函数等式は次のように表わされる．

定理 3.3.1 ξ は代数体 F の原始的な Hecke の指標とし，ξ の conductor は $\mathfrak{m}$ とする．

（1） $L(s,\xi)$ は全平面の有理型函数に解析接続され

$$\Lambda(s,\xi)=\left(\frac{2^{r_1}|d|\mathrm{N}(m)}{(2\pi)^g}\right)^{s/2}\prod_{\nu=1}^{r_1+r_2}\Gamma\left(\frac{n_\nu(s+iv_\nu)+|u_\nu|}{2}\right)L(s,\xi)$$

とおくと，任意の垂直な帯領域* において $|\mathrm{Im}(s)|\longrightarrow\infty$ とするときに $\Lambda(s,\xi)$ は一様に有界で

$$\Lambda(1-s,\xi)=T(\xi)\Lambda(s,\bar{\xi})$$

なる函数等式を満たす．定数 $T(\xi)$ は

$$T(\xi)=2^{iv}i^{-u}\frac{W(\xi)}{\mathrm{N}(m)^{1/2}}$$

である．ここで $d=d_F$ は F の判別式であり，u_ν, v_ν は ξ の定義で用いたもので，また

$$n_\nu=\begin{cases}1 & (\tau_\nu:\text{実})\\ 2 & (\tau_\nu:\text{虚}),\end{cases} \qquad u=\sum_{\nu=1}^{r_1+r_2}u_\nu, \quad v=\sum_{\nu=r_1+1}^{r_1+r_2}v_\nu$$

である．

（2） $L(s,\xi)$ は，$\xi\neq$単位指標 ならば全平面で正則であり，$\xi=$単位指標ならば $s=1$ でのみ1位の極を持ち，$s=1$ における留数は

$$\frac{2^{r_1+r_2}\cdot\pi^{r_2}\cdot R\cdot h(F)}{w\sqrt{|d|}}$$

である．ここで w は F に含まれる1の巾根の個数，R は F の単数規準** である．

---

* 垂直な帯領域とは，a, b を $a<b$ なる実数とするときに $\{z\in \boldsymbol{C}\,|\,a<\mathrm{Re}(z)<b\}$ と表わされる領域を言う．

** 定義は [高木] 参照．（2）の後半は後で用いることはない．

最後に，特に $F=\boldsymbol{Q}$ の場合を考える．χ を $\mathrm{mod}\, m$ で定義される Dirichlet の指標とし，自然数 a, b が m と互いに素であるときに $\chi\left(\left(\frac{a}{b}\right)\right)=\chi(a)\chi(b)^{-1}$ と定義すると，χ は Hecke の指標，特に類指標である．逆に $\boldsymbol{Q}$ のすべての Hecke の指標はすべて Dirichlet の指標から得られる．χ が Dirichlet の指標であるときに，Hecke の L 函数

$$L(s, \chi)=\sum_{n=1}^{\infty}\chi(n)n^{-s}=\prod_{p}(1-\chi(p)p^{-s})^{-1}$$

を **Dirichlet の L 函数**と言う．この場合は特に後で用いるので，函数等式を改めて述べておく．

系 3.3.2 χ が $\mathrm{mod}\, m$ で定義される原始的な Dirichlet の指標ならば

$$\Lambda(s, \chi)=\left(\frac{\pi}{m}\right)^{-s/2}\Gamma\left(\frac{s+\delta}{2}\right)L(s, \chi)$$

とおくと，$\Lambda(s, \chi)$ は全平面で有理型で，任意の垂直な帯領域で $|\mathrm{Im}(z)|\longrightarrow\infty$ とするときに一様に有界となる函数に解析接続され

$$\Lambda(1-s, \chi)=\frac{W(\chi)}{i^{\delta}\sqrt{m}}\Lambda(s, \bar{\chi})$$

が成り立つ．ここで $\delta=\delta_{\chi}$ は $\delta=0$ $(\chi(-1)=1)$，$\delta=1$ $(\chi(-1)=-1)$ である．もし χ が単位指標でなければ $\Lambda(s, \chi)$ は全平面で正則である．

Dirichlet の L 函数と Dedekind の ζ 函数を用いると，素数の2次体における分解法則（定理 3.1.3）は次の形に述べることが出来る．

定理 3.3.3 $F=\boldsymbol{Q}(\sqrt{d})$ を2次体とする．ここで d は F の判別式とする．$\chi_d=\left(\frac{d}{\quad}\right)$ を2次剰余記号（Kronecker の記号）とすると

$$\zeta_F(s)=\zeta(s)L(s, \chi_d)$$

が成り立つ．

前節で Riemann の ζ 函数の偶数点における値を Bernoulli 数を用いて与えたが，これは [Leopoldt] によって Dirichlet の L 函数に拡張された．χ が $\mathrm{mod}\, m$ で定義される原始的な Dirichlet の指標であるときに

$$F_{\chi}(t)=\sum_{a=1}^{f}\frac{\chi(a)te^{at}}{e^{ft}-1}$$

を t の巾級数に展開して

$$=\sum_{n=0}^{\infty} B_{n,\chi}\frac{t^n}{n!}$$

とするとき，係数 $B_{n,\chi}(n\geqq 0)$ を χ に関する n 番目の**一般化された Bernoulli 数** (generalized Bernoulli number) と呼ぶ．明らかに $B_{n,\chi}\in \boldsymbol{Q}\ (\chi(a)\,|\,a\in\boldsymbol{Z})$ である．χ が単位指標の場合が前述の Bernoulli 数である．

定理 3.3.4 χ は $\bmod m$ で定義される原始的な Dirichlet の指標とし，δ を $\delta=0$ $(\chi(-1)=1)$，$\delta=1$ $(\chi(-1)=-1)$ で定義すると，$k\equiv\delta \pmod 2$ なる自然数 k に対して

$$L(k,\chi)=(-1)^{1+(k-\delta)/2}\frac{W(\chi)}{2i^{\delta}}\left(\frac{2\pi}{m}\right)^{k}\frac{B_{k,\bar{\chi}}}{k!}$$

が成り立つ．

この証明および更に発展する理論については [岩澤 2] を参照されたい．

第4章　modular 群と modular 形式

§4.1　$SL_2(\boldsymbol{Z})$

$SL_2(\boldsymbol{Z})$ およびその指数有限の部分群は modular 群と呼ばれる．modular 群は楕円曲線や整数論のいろいろな問題と関係して古くから調べられている．この節では第2章で述べた一般論に例を与え，次節以下への見通しを良くするために，特に $SL_2(\boldsymbol{Z})$ に限って，その保型形式について詳しく調べることにする．

定理 4.1.1　$SL_2(\boldsymbol{Z})$ は $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ および $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ で生成される．

証明　$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ および $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ で生成される $SL_2(\boldsymbol{Z})$ の部分群を Λ とおき，$SL_2(\boldsymbol{Z})\neq\Lambda$ と仮定して矛盾を導く．$\tau=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$，$\omega=\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ と書くと

$$\omega\tau^{-1}\omega^{-1}=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \qquad \omega^2=-1$$

であるから，$SL_2(\boldsymbol{Z})$ の元 γ を $\gamma=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ と書いたときに $b=0$ ならば γ は Λ に属する．よって

$$b_0=\mathrm{Min}\left\{|b|\,\middle|\,\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\in SL_2(\boldsymbol{Z})-\Lambda\right\}$$

とおくと $b_0\neq 0$ である．$SL_2(\boldsymbol{Z})-\Lambda$ の元 γ_0 を $\gamma_0=\begin{bmatrix} a_0 & b_0 \\ c_0 & d_0 \end{bmatrix}$ ととる．整数 n を $|a_0-nb_0|<b_0$ となるようにとると

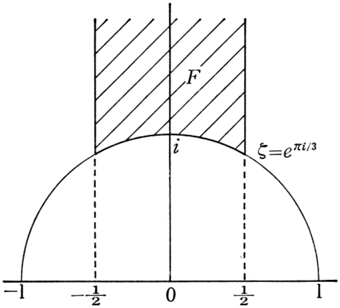
$$\gamma_0\omega^{-1}\tau^n=\begin{bmatrix} -b_0 & a_0-nb_0 \\ -d_0 & c_0-nd_0 \end{bmatrix}$$

であるから，b_0 のとり方により $\gamma_0\omega^{-1}\tau^n\in\Lambda$ となる．$\omega^{-1}\tau^n\in\Lambda$ だから $\gamma_0\in\Lambda$ となり γ_0 のとり方に矛盾する．よって $SL_2(\boldsymbol{Z})=\Lambda$ である．　(証明終)

定理 4.1.2　$\Gamma=SL_2(\boldsymbol{Z})$ とする．

（1） Γ の基本領域として，$F=\{z\in H\,|\,|z|\geqq 1,\ \mathrm{Re}(z)\leqq 1/2\}$ がとれる．(下図参照)

（2） $v(\Gamma\backslash H)=\pi/3$ である．よって Γ は第1種の Fuchs 群である．



証明　（1）z は H の任意の点とする．z を固定したときに，$L=\{cz+d\,|\,c,d\in\boldsymbol{Z}\}$ とおくと L は $\boldsymbol{C}$ の中の格子 (lattice) であるから，L の O を含まない任意の空でない部分集合には絶対値が最小となる元が存在する．特に

$$\{|j(\gamma,z)|\,|\,\gamma\in\Gamma\}$$

には最小なものが存在する．$\gamma\in\Gamma$ ならば $\mathrm{Im}(\gamma z)=\mathrm{Im}(z)/|j(\gamma,z)|^2$ であるから，z と Γ 同値な H の点の中には虚数部分が最大になるものが存在する．その1つを z_0 とすると，定義により

(4.1.1)　Γ の任意の元 γ に対して $\mathrm{Im}(z_0)\geqq\mathrm{Im}(\gamma z_0)$ である．

$\tau=\begin{bmatrix}1&1\\0&1\end{bmatrix}$ とおくと，整数 m に対して $\tau^m z=z+m$ が成り立つから，もし必要ならば z_0 を $\tau^m z_0$ ととり替えることにより，z_0 は更に $-1/2\leqq\mathrm{Re}(z_0)\leqq 1/2$ と言う条件を満たしているとして差支えない．次に (4.1.1) において，γ とし

て特に $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ をとれば

$$\mathrm{Im}(z_0) \geqq \mathrm{Im}(-1/z_0) = \mathrm{Im}(z_0)/|z_0|^2$$

であるから $|z_0| \geqq 1$ である．よって $z_0 \in F$ がわかった．z は H の任意の点であったから，H の任意の点が F の点に Γ 同値であることがわかり，よって $H = \cup \gamma F$ である．次に $U = \{z \in H \mid |z| > 1,\ |\mathrm{Re}(z)| \leqq 1/2\}$ とおくと明らかに $\bar{U} = F$ である．γ を $\gamma U \cap U \neq \phi$ となる Γ の元とし，U の元 z を $\gamma z \in U$ となるようにとる．もし $\mathrm{Im}(\gamma z) \geqq \mathrm{Im}(z)$ ならば $\gamma = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ とおくときに $|cz+d| < 1$ だから

$$(4.1.2) \qquad |c|\mathrm{Im}(z) = |\mathrm{Im}(cz)| \leqq |cz+d| \leqq 1$$

がわかる．z は U の元だから $\mathrm{Im}(z) > \sqrt{3}/2$ であるが，c は整数なので $|c| \leqq 1$ である．もし $|c| = 1$ であるとすると (4.1.2) により $|z \pm d| \leqq 1$ であるが，図から明らかなように整数 d に対しては $|z \pm d| > 1$ であるので矛盾が生じる．よって $c = 0$ でなければならない．$c = 0$ ならば $\gamma = \pm\begin{bmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ で $\gamma z = z + b$ となるが，b は整数だから z および $z+b$ が共に U に含まれるのは $b = 0$ のときに限る．故に $\gamma = \pm 1$ でなければならない．$\mathrm{Im}(\gamma z) \leqq \mathrm{Im}(z)$ の場合は γ の替わりに γ^{-1} をとれば上の場合に帰着される．よって $\gamma U \cap U \neq \phi$ となるのは $\gamma = \pm 1$ のときに限ることが示された．よって F は Γ の基本領域である．

(2) を示すには $v(\Gamma \backslash H) = v(F)$ であるから，$v(F)$ を計算すればよいが，$v(F)$ は補題 1.4.4 により $\pi/3$ である． (証明終)

定理 4.1.3 $\Gamma = SL_2(\boldsymbol{Z})$ とする．

(1) Γ の楕円点は $i = \sqrt{-1}$ または $\zeta = e^{\pi i/3}$ に同値である．i は位数 2 の楕円点で固定部分群は $\Gamma_i = \left\{\pm\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},\ \pm\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\right\}$ であり，ζ は位数 3 の楕円点で固定群は $\Gamma_\zeta = \left\{\pm\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},\ \pm\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},\ \pm\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\right\}$ である．

(2) Γ の cusp は $\boldsymbol{Q} \cup \{\infty\}$ で，すべて同値である．

(3) $\mathfrak{R}_\Gamma$ の genus は 0 である．

証明 基本領域の内点は明らかに通常点であるから，Γ の楕円点は（存在すれば）定理 4.1.2 で求めた基本領域 F の境界上の点に同値である．F の形と Γ が $\tau=\begin{bmatrix}1&1\\0&1\end{bmatrix}$ および $\omega=\begin{bmatrix}0&-1\\1&0\end{bmatrix}$ を含むことにより，F の境界上の点のうちで，i, ζ, $\zeta^2(=e^{2\pi i/3})$ を除いた点は通常点である．i の位数は F の形から高々 2 であるが，実際 $\omega i=i$, $\omega^2=-1$ となるから，i は位数 2 の楕円点である．$\tau\zeta^2=\zeta$ であるから ζ および ζ^2 における F の内角を調べると，ζ の位数は高々 3 であるが $\tau\omega=\begin{bmatrix}1&-1\\1&0\end{bmatrix}$ は ζ を固定し $(\tau\omega)^3=-1$ であるから ζ は位数 3 の楕円点である．次に ∞ が Γ の cusp となることは明らかである．x が ∞ 以外の Γ の cusp であるとすると，x は有理係数の 2 次方程式の重根であるから有理数である．逆に任意の有理数 x を $x=a/c$ と互いに素な整数 a と c の商として表わすとき，a と c に対して整数 b と d を $ad-bc=1$ ととることが出来る．この b と d を用いて $\gamma=\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}$ と定義すると $\gamma\in\Gamma$ であって $\gamma\infty=x$ である．即ち x は ∞ と Γ 同値である．よって Γ の cusp 全体は $\boldsymbol{Q}\cup\{\infty\}$ であり，これらはすべて同値であることがわかった．（3）を示すために，$\mathfrak{R}_\Gamma$ の genus を g とおいて，定理 2.4.3 に定理 4.1.2（2）および上の（1），（2）で得た値を代入すると

$$\frac{1}{6}=2g-2+\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(1-\frac{1}{3}\right)+1$$

であるから，$g=0$ を得る． （証明終）

この定理と定理 2.5.2 により直ちに $G_k(\Gamma)$, $S_k(\Gamma)$ $(\Gamma=SL_2(\boldsymbol{Z}))$ の次元が計算できる．以下 $k>0$ とする．

系 4.1.4 $\Gamma=SL_2(\boldsymbol{Z})$ とする．偶数 k $(\geqq 2)$ に対して

$$\dim S_k(\Gamma)=\begin{cases}0 & (k=2)\\ [k/12]-1 & (k\equiv 2\ (\mathrm{mod}\ 12),\ k>2)\\ [k/12] & (k\not\equiv 2\ (\mathrm{mod}\ 12)),\end{cases}$$

$$\dim G_k(\Gamma)=\begin{cases}[k/12] & (k\equiv 2\ (\mathrm{mod}\ 12))\\ [k/12]+1 & (k\not\equiv 2\ (\mathrm{mod}\ 12))\end{cases}$$

が成り立つ．ここで [ ] は Gauss の記号である．

$G_k(\Gamma)$ の元を具体的に求めてみよう．偶数 k に対し

(4.1.3) $$E_k(z)=\sum_{\substack{m,n=-\infty\\(m,n)\neq(0,0)}}^{\infty}(mz+n)^{-k}\qquad(z\in H)$$

と定義する．$k\geqq 4$ ならば次に見るように $E_k(z)$ は広義一様に絶対収束して，$\Gamma=SL_2(\boldsymbol{Z})$ に関する weight k の保型形式である．$g_k^{(1)}(z)=F_k(z;\ 1,\Gamma_\infty)$ を $\Gamma=SL_2(\boldsymbol{Z})$ に対して (2.6.8) で定義した Poincaré 級数とすると

(4.1.4) $$E_k(z)=2\zeta(k)g_k^{(1)}(z)$$

が成り立っている．ここで $\zeta(s)$ は Riemann の ζ 函数である．$E_k(z)$ は **Eisenstein 級数**と呼ばれる．

補題 4.1.5 $\Gamma=SL_2(\boldsymbol{Z})$ とし，$k\geqq 4$ とする．

（1） $E_k(z)$ は上半平面で広義一様に絶対収束し，$E_k(z)\in G_k(\Gamma)$ である．

（2） $E_k(z)$ は ∞ において Fourier 展開

$$E_k(z)=2\zeta(k)+2\frac{(2\pi i)^k}{(k-1)!}\sum_{n=1}^{\infty}\sigma_{k-1}(n)e^{2\pi inz},\quad \sigma_{k-1}(n)=\sum_{\substack{d|n\\d>0}}d^{k-1}$$

を持つ．ここで $\zeta(s)$ は Riemann の ζ 函数である．

証明 （1）は (4.1.4) により明らかであるが，直接の証明を与えておく．z は H の点とし，$L=\{cz+d\,|\,c,\ d\in\boldsymbol{Z}\}$ とおく．自然数 n に対して L の点 $\{\pm nz\pm n\}$ を頂点とする平行四辺形の周を M_n と書き，$r(z)$ で原点 0 から M_1 までの距離を表わす．$r(z)$ は z の連続函数である．M_n 上にある L の点の個数は $8n$ であるから

$$\sum_{\substack{m,n=0\\(m,n)\neq(0,0)}}^{\infty}|mz+n|^{-k}=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{w\in L\cap M_n}|w|^{-k}\leqq 8\zeta(k-1)r(z)^{-k}$$

となり，$E_k(z)$ は上半平面上の任意の compact 集合上で一様に絶対収束する．また Γ の元 γ を $\gamma=\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}$ と書くと

$$m(\gamma z)+n=((am+cn)z+(bm+dn))(cz+d)^{-1}$$

であり，$(m,\ n)$ が $\boldsymbol{Z}\times\boldsymbol{Z}-\{(0,\ 0)\}$ を動くときに $(am+cn,\ bm+dn)$ は $\boldsymbol{Z}\times\boldsymbol{Z}-\{(0,\ 0)\}$ を動くから $E_k(z)$ の保型性は明らかである．次に（2）を示し同時に $E_k(z)$ が Γ の cusp で正則であることを示す．§3.2 でも用い

た次の公式はよく知られている．

(4.1.5) $$\pi\cot(\pi z)=z^{-1}+\sum_{m=1}^{\infty}[(z+n)^{-1}+(z-n)^{-1}]$$

ところで，一方

(4.1.6) $$\pi\cot(\pi z)=\pi\frac{\cos(\pi z)}{\sin(\pi z)}=\pi i\frac{e^{\pi iz}+e^{-\pi iz}}{e^{\pi iz}-e^{-\pi iz}}$$
$$=\pi i\left(1-2\sum_{n=0}^{\infty}e^{2\pi inz}\right)$$

であるから，(4.1.5) と (4.1.6) の右辺を z に関して $(k-1)$ 回微分することにより

(4.1.7) $$(-1)^k(k-1)!\left\{z^{-k}+\sum_{n=1}^{\infty}[(z+n)^{-k}+(z-n)^{-k}]\right\}$$
$$=(2\pi i)^k\sum_{n=1}^{\infty}n^{k-1}e^{2\pi inz}$$

を得る．（1）により $\sum_{n=-\infty}^{\infty}(z+n)^{-k}$ は絶対収束するので，左辺は和の順序の変更が可能であるから，(4.1.7) は

(4.1.8) $$(-1)^k(k-1)!\sum_{n=-\infty}^{\infty}(z+n)^{-k}=(2\pi i)^k\sum_{n=1}^{\infty}n^{k-1}e^{2\pi inz}$$

と変形される．これを用いると

$$E_k(z)=2\sum_{n=1}^{\infty}n^{-k}+2\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=-\infty}^{\infty}(mz+n)^{-k}$$
$$=2\zeta(k)+(2(2\pi i)^k/(k-1)!)\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}n^{k-1}e^{2\pi imnz}$$

となり（2）を得る． （証明終）

補題の（2）により $E_k(z)\notin S_k(\Gamma)$ であるから，$\mathcal{E}_k(\Gamma)=\{cE_k(z)\,|\,c\in\boldsymbol{C}\}$ とおくと，系 4.1.4 により $G_k(\Gamma)=\mathcal{E}_k(\Gamma)\oplus S_k(\Gamma)$ がわかる．更に $G_k(\Gamma)$ を調べるためには

(4.1.9) $$G_4(z)=\frac{1}{2\zeta(4)}E_4(z),\qquad G_6(z)=\frac{1}{2\zeta(6)}E_6(z)$$

とおき，

(4.1.10) $$\Delta(z)=12^{-3}(G_4(z)^3-G_6(z)^2),\qquad J(z)=G_4(z)^3/\Delta(z)$$

と定義するのが便利である*. $\Delta(z)\in G_{12}(\Gamma)$ および $J(z)\in A_0(\Gamma)$ は明らかである.

定理 4.1.6 $\Gamma=SL_2(\boldsymbol{Z})$ とする.

(1) $\Delta(z)$ は $S_{12}(\Gamma)$ の元であり, $\Delta(z)=\sum_{n=1}^{\infty}\tau_n e^{2\pi inz}$ とすると $\tau_1=1$ である.

(2) $\Delta(z)$ は上半平面に零点を持たない.

(3) $\boldsymbol{C}(J)=A_0(\Gamma)$ (Γ に関する保型函数体 $A_0(\Gamma)$) であり, ∞ において $J(z)=e^{-2\pi iz}+\sum_{n=0}^{\infty}c_n e^{2\pi inz}$ と展開される.

証明 (1) $\Delta(z)\in G_k(\Gamma)$ は明らかであるから, $\Delta(z)$ が cusp 形式であることを示す. B_r を r 番目の Bernoulli 数とすると, 偶数 $r>0$ に対して

$$\zeta(k)=\frac{-(2\pi i)^k}{2k!}B_k \qquad (k\equiv 0\,(\mathrm{mod}\,2),\ k>0)$$

であり, $B_4=\frac{1}{30}$, $B_6=\frac{1}{42}$ であったから

$$\begin{aligned} G_4(z)&=1+240e^{2\pi iz}+\cdots \\ G_6(z)&=1-504e^{2\pi iz}+\cdots \end{aligned} \tag{4.1.11}$$

がわかる. よって $\Delta(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\tau_n e^{2\pi inz}$ とすると, $12^3\tau_0=1-1=0$, $12^3\tau_1=3\cdot 240+2\cdot 504=1728=12^3$ となる. (2) は定理 4.4.2 において示す. (1) と (4.1.11) により J の展開は明らかである. (2) により $\Delta(z)$ は上半平面で零点を持たないから, J は $\mathfrak{R}_\Gamma$ 上の函数と考えて cusp にのみ1位の極を持つ. $K(\mathfrak{R}_\Gamma)$ と $A_0(\Gamma)$ は自然な対応で同型であるから, (1.8.4) により, $[A_0(\Gamma):\boldsymbol{C}(J)]=n_\infty(J)=1$ がわかる. (証明終)

定理 4.1.7 $\Gamma=SL_2(\boldsymbol{Z})$ とする. 偶数 k ($\geqq 4$) に対し $G_k(\Gamma)$ は

$$G_4^m G_6^n \qquad (4m+6n=k;\ m,\ n\geqq 0)$$

を基底に持つ.

証明 $4m+6n=k$ ならば $G_4^m G_6^n\in G_k(\Gamma)$ は明らかである. また容易な計

---

* 楕円函数, 楕円曲線との関係においては $g_2(z)=60E_4(z)$, $g_3(z)=140E_6(z)$ とおくのが便利である. このときには $\Delta(z)=g_2(z)^3-27g_3(z)^2$, $J(z)=12^3g_2(z)^3/\Delta(z)$ となる.

算で

$$\#\{(m,\ n)\,|\,4m+6n=k\}=\begin{cases}[k/12] & (k\equiv 2\ (\mathrm{mod}\ 12))\\ [k/12]+1 & (k\not\equiv 2\ (\mathrm{mod}\ 12))\end{cases}$$
$$=\dim G_k(\Gamma)$$

がわかるから，$G_4^m G_6^n\ (4m+6n=k)$ が1次独立であることを示せばよい．$\{G_4^m G_6^n\}$ が1次独立ではないと仮定し

$$\sum_{4m+6n=k} c_{mn} G_4^m G_6^n = 0 \qquad (c_{mn}\in \boldsymbol{C})$$

とおく．ここで c_{mn} の少なくとも1つは0でない．c_{mn} を用いて2変数の多項式 $F(X,Y)$ を

$$F(X,\ Y)=\sum_{4m+6n=k} c_{mn} X^m Y^n$$

と定義する．仮定により $F(G_4,\ G_6)=0$ である．次に複素数 $b_4,\ b_6$ を $F(b_4,\ b_6)\neq 0$，$b_4^3-b_6^2\neq 0$ を満たすようにとる．(1.8.4) により任意の複素数 a に対して $J(z)-a=0$ は零点を持つから，H の点 z_0 で

$$J(z_0)=\frac{12^3 b_4^3}{b_4^3-b_6^2} \qquad (4.1.12)$$

となるものが存在する．もし $b_4=0$ ならば $b_6\neq 0$ であるから，複素数 c を $c^3 b_6=G_6(z)$ であるようにとれ，(4.1.12) と $\varDelta(z_0)\neq 0$ により $G_4(z_0)=0$ である．次に $b_4\neq 0$ と仮定し，c を $c^2 b_4=G_4(z_0)$ ととると，(4.1.12) により $c^3 b_6 =\pm G_6(z_0)$ となる．もし必要があれば c を $-c$ ととり替えると，いずれの場合にも

$$c^2 b_4=G_4(z_0)\ \text{かつ}\ c^3 b_6=G_6(z_0)$$

となる．$\varDelta(z_0)\neq 0$ であるから $c\neq 0$ でなければならないが，$c\neq 0$ なら

$$F(G_4(z_0),\ G_6(z_0))=c^{k/2}F(b_4,\ b_6)\neq 0$$

となり矛盾である．よって $\{G_4^m G_6^n\}$ が1次独立であることが示された．

(証明終)

$\varDelta(z)$ については §4.4 で再び述べることにして，$E_k(z)$ について次のような注意をしておく．$c=(k-1)!/2(2\pi i)^k$ とおくと

$$cE_k(z)=\frac{(k-1)!}{(2\pi i)^k}\zeta(k)+\sum_{n=1}^{\infty}\sigma_{k-1}(n)e^{2\pi i n z}$$

であるから，$cE_k(z)$ の係数を用いて Dirichlet 級数を

$$L_k(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\sigma_{k-1}(n)n^{-s}$$

と定義すると，$L_k(s)$ は Riemann の ζ 函数 $\zeta(s)$ を用いて

$$L_k(\mathrm{s})=\zeta(s)\zeta(s-k+1) \tag{4.1.13}$$

と書けるから，$\mathrm{Re}(s)>k$ で意味を持ち，更に Euler 積

$$L_k(s)=\prod_p[(1-p^{-s})(1-p^{k-1-s})]^{-1}$$

を持つ．また ζ 函数が全平面に解析接続されて函数等式を持つことから，$L_k(s)$ も全平面に解析接続されて函数等式を持っていることがわかる．

§4.2　合同 modular 群

自然数 N に対して，$SL_2(\boldsymbol{Z})$ の部分集合 $\Gamma_0(N)$, $\Gamma_1(N)$, $\Gamma(N)$ を

$$\Gamma_0(N)=\left\{\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\in SL_2(\boldsymbol{Z})\,\middle|\, c\equiv 0 \pmod N\right\},$$

$$\Gamma_1(N)=\left\{\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\in SL_2(\boldsymbol{Z})\,\middle|\, c\equiv 0 \pmod N,\ a\equiv d\equiv 1 \pmod N\right\},$$

$$\Gamma(N)=\left\{\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\in SL_2(\boldsymbol{Z})\,\middle|\, b\equiv c\equiv 0 \pmod N,\ a\equiv d\equiv 1 \pmod N\right\}$$

と定義する．$\Gamma_0(N)$, $\Gamma_1(N)$, $\Gamma(N)$ が群をなすことは定義により容易に確められる．また

$$SL_2(\boldsymbol{Z})=\Gamma_0(1)=\Gamma_1(1)=\Gamma(1),\quad SL_2(\boldsymbol{Z})\supset\Gamma_0(N),$$
$$SL_2(\boldsymbol{Z})\supset\Gamma_0(N)\supset\Gamma_1(N)\supset\Gamma(N)$$

が成り立っており，また $M|N$ ならば

$$\Gamma_0(M)\supset\Gamma_0(N),\quad \Gamma_1(M)\supset\Gamma_1(N),\quad \Gamma(M)\supset\Gamma(M)$$

である．次に見るように $[\Gamma(1):\Gamma(N)]<\infty$ であるから，これらは modular 群である．$\Gamma(N)$ を**主合同群** (principal modular group) と言い，$\Gamma_0(N)$, $\Gamma_1(N)$ を **Hecke 型の modular 群**と言う．自然数 N を $\Gamma_0(N)$, $\Gamma_1(N)$, $\Gamma(N)$ の **level** と言う．一般に主合同群を含む modular 群を**合同 modular 群** (con-

gruence modular group）と言う．以下 N は自然数とする．$M_2(\boldsymbol{Z})$ の元 γ を $\gamma=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ と書いたときに $M_2(\boldsymbol{Z}/N\boldsymbol{Z})$ の元 $\gamma(\mathrm{mod}\,N)$ を

$$\gamma(\mathrm{mod}\,N)=\begin{bmatrix} \bar{a} & \bar{b} \\ \bar{c} & \bar{d} \end{bmatrix} \tag{4.2.1}$$

でもって定義する．ここで $\bar{a}=a(\mathrm{mod}\,N)$，$\bar{b}=b(\mathrm{mod}\,N)$，$\bar{c}=c(\mathrm{mod}\,N)$，$\bar{d}=d(\mathrm{mod}\,N)$ である．更に $M_2(\boldsymbol{Z})$ の元 γ, γ' が $\gamma(\mathrm{mod}\,N)=\gamma'(\mathrm{mod}\,N)$ ならば，γ と γ' は $\mathrm{mod}\,N$ で合同であると言い

$$\gamma\equiv\gamma' \quad (\mathrm{mod}\,N)$$

と書き表わす．$\gamma\in SL_2(\boldsymbol{Z})$ ならば $\gamma(\mathrm{mod}\,N)$ は $SL_2(\boldsymbol{Z}/N\boldsymbol{Z})$ の元であり

$$\lambda(\gamma)=\gamma(\mathrm{mod}\,N)$$

とおくと，λ は $SL_2(\boldsymbol{Z})$ から $SL_2(\boldsymbol{Z}/N\boldsymbol{Z})$ への準同型写像である．

定理 4.2.1 N は自然数とし，λ は上で定義した $SL_2(\boldsymbol{Z})$ より $SL_2(\boldsymbol{Z}/N\boldsymbol{Z})$ への自然な写像とすると，（1）λ は全射であり，（2）$\mathrm{Ker}(\lambda)=\Gamma(N)$ である．

特に $\Gamma(N)$ は $\Gamma(1)$ の正規部分群である．

証明 （2）は定義により明らかであるから（1）を示そう．$\begin{bmatrix} \bar{a} & \bar{b} \\ \bar{c} & \bar{d} \end{bmatrix}\in SL_2(\boldsymbol{Z}/N\boldsymbol{Z})$ とする．$a_1, b_1, c_1, d_1\in\boldsymbol{Z}$ を $\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{bmatrix}(\mathrm{mod}\,N)=\begin{bmatrix} \bar{a} & \bar{b} \\ \bar{c} & \bar{d} \end{bmatrix}$ であるようにとると，$a_1d_1-b_1c_1\equiv1\ (\mathrm{mod}\,N)$ だから，$(c_1, d_1, N)=1$ となるので，必要があれば d_1 を d_1+mN $(m\in\boldsymbol{Z})$ ととり替えることにより $(c_1, d_1)=1$ であるとして差支えない．次に n を

$$a_1d_1-b_1c_1=1+nN$$

となる整数とする．$(c_1, d_1)=1$ であるから，整数 a_2, b_2 を $a_2d_1-b_2c_1=-n$ ととれる．そこで $a=a_1+a_2N$，$b=b_1+b_2N$，$c=c_1$，$d=d_1$ とおくと $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\in SL_2(\boldsymbol{Z})$ で $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}(\mathrm{mod}\,N)=\begin{bmatrix} \bar{a} & \bar{b} \\ \bar{c} & \bar{d} \end{bmatrix}$ である．（証明終）

系 4.2.2 $\Gamma_0(N)$ の元 $\gamma=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ に対して，$\mu(\gamma)=d(\mathrm{mod}\,N)$ と定義す

ると，μ は $\Gamma_0(N)$ から $(\boldsymbol{Z}/N\boldsymbol{Z})^\times$ の上への準同型で $\mathrm{Ker}(\mu)=\Gamma_1(N)$ である．

証明 $\gamma=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ および $\gamma'=\begin{bmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{bmatrix}$ が $\Gamma_0(N)$ の元ならば

$$\gamma\gamma'=\begin{bmatrix} * & * \\ * & cb'+dd' \end{bmatrix}$$

であるから $\mu(\gamma\gamma')=dd'\,(\mathrm{mod}\,N)=\mu(\gamma)\mu(\gamma')$ となり，φ は準同型である．φ が全射であることを示す．$(\boldsymbol{Z}/N\boldsymbol{Z})^\times$ の任意の元 $\bar{d}$ に対して $\bar{a}=\bar{d}^{-1}$, $\bar{b}=\bar{c}=0$ とおくと，$\begin{bmatrix} \bar{a} & \bar{b} \\ \bar{c} & \bar{d} \end{bmatrix}\in SL_2(\boldsymbol{Z}/N\boldsymbol{Z})$ だから定理 4.2.1 により，$\gamma\in SL_2(\boldsymbol{Z})$ が存在して

$$\lambda(\gamma)=\begin{bmatrix} \bar{a} & \bar{b} \\ \bar{c} & \bar{d} \end{bmatrix}$$

である．$\bar{c}=0$ だから $\gamma\in\Gamma_0(N)$ で，$\mu(\gamma)=\bar{d}$ である． （証明終）

この系により $\Gamma_1(N)$ は $\Gamma_0(N)$ の正規部分群である．M を任意の自然数とすると，定理 4.2.1 により $\Gamma_0(N)/\Gamma_1(N)$ の代表系は

$$\gamma\,(\mathrm{mod}\,M)=\begin{bmatrix} * & 0 \\ 0 & * \end{bmatrix}$$

となるような元のうちからとれることを注意しておく．さて自然数 N を $N=\prod_p p^e$ と素因数分解すると，$\boldsymbol{Z}/N\boldsymbol{Z}$ と $\prod_p(\boldsymbol{Z}/p^e\boldsymbol{Z})$ は $a\longmapsto\prod_p a\,(\mathrm{mod}\,p^e)$ によって同型であるから

$$M_2(\boldsymbol{Z}/N\boldsymbol{Z})\cong\prod_p M_2(\boldsymbol{Z}/p^e\boldsymbol{Z})$$

が，対応

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\longmapsto\prod_p\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}(\mathrm{mod}\,p^e) \tag{4.2.2}$$

により成り立つ．もし $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\in SL_2(\boldsymbol{Z}/N\boldsymbol{Z})$ ならば $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}(\mathrm{mod}\,p^e)\in SL_2(\boldsymbol{Z}/p^e\boldsymbol{Z})$ は明らかであるが，逆に $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}(\mathrm{mod}\,p^e)\in SL_2(\boldsymbol{Z}/p^e\boldsymbol{Z})$ が N のす

べての素因子 p について成り立つなら，$ad-bc\equiv 1 \pmod{p^e}$ が N のすべての素因子 p について成り立つから $ad-bc\equiv 1 \pmod{N}$ である．よって次の補題が示された．

補題 4.2.3 N は自然数とし，$N=\prod_p p^e$ と N を素因数分解すると，(4.2.2) により

$$SL_2(\boldsymbol{Z}/N\boldsymbol{Z})\cong\prod_p SL_2(\boldsymbol{Z}/p^e\boldsymbol{Z})$$

が成り立つ．

定理 4.2.4 φ を Euler の函数* とすると，自然数 N に対して

（1） $|GL_2(\boldsymbol{Z}/N\boldsymbol{Z})|=\varphi(N)|SL_2(\boldsymbol{Z}/N\boldsymbol{Z})|$,

（2） $|SL_2(\boldsymbol{Z}/N\boldsymbol{Z})|=N^3\prod_{p|N}\left(1-\frac{1}{p^2}\right)$

が成り立つ．

証明 （1）は明らかである．（2）を示すには，補題 4.2.3 により N が素数の巾の場合にのみ示せばよい．p を素数とし $N=p^e$ とおく．先ず $e=1$ ならば $\boldsymbol{Z}/p\boldsymbol{Z}$ は体であるから，$|GL_2(\boldsymbol{Z}/p\boldsymbol{Z})|$ は $\boldsymbol{Z}/p\boldsymbol{Z}$ 上の vector 空間 $(\boldsymbol{Z}/p\boldsymbol{Z})\times(\boldsymbol{Z}/p\boldsymbol{Z})$ の順序づけられた基底の数に等しく，容易にわかるように $p(p^2-1)(p-1)$ である．よって（1）により $|SL_2(\boldsymbol{Z}/p\boldsymbol{Z})|=p(p^2-1)$ である．次に $e>1$ とする．$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\in SL_2(\boldsymbol{Z}/p^e\boldsymbol{Z})$ のときに

$$\lambda'\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \pmod{p}$$

と定義すると，$\lambda: SL_2(\boldsymbol{Z})\longrightarrow SL_2(\boldsymbol{Z}/p\boldsymbol{Z})$ が全射であるから，λ' も全射であり

$$\mathrm{Ker}(\lambda')=\left\{\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\in SL_2(\boldsymbol{Z}/p^e\boldsymbol{Z})\,\middle|\,\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\equiv\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \pmod{p}\right\}$$

がわかる．$b, c, d\in\boldsymbol{Z}/p^e\boldsymbol{Z}$ を $b\equiv 0 \pmod{p}$, $c\equiv 0 \pmod{p}$, $d\equiv 1 \pmod{p}$ の条件の下に任意にとり，$\boldsymbol{Z}/p^e\boldsymbol{Z}$ の元 a を $ad-bc=1$ で与えると，a は一意

* 自然数 N に対し $\varphi(N)=|(\boldsymbol{Z}/N\boldsymbol{Z})^\times|$ である．但し $\varphi(1)=1$ とする．

的に決まり，$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathrm{Ker}(\lambda')$ であるから $|\mathrm{Ker}(\lambda')| = p^{3(e-1)}$ である．よって

$$|SL_2(\boldsymbol{Z}/p^e\boldsymbol{Z})| = p^{3e-2}(p^2-1)$$

を得る． (証明終)

さて modular 群 Γ に対して

$$\bar{\Gamma} = \iota(\Gamma) \subset \mathrm{Aut}(H)$$

と書き表わす．$\bar{\Gamma} \cong \bar{\Gamma}/Z(\Gamma)$ である．Γ の部分群 Γ_z, Γ_x についても

$$\bar{\Gamma}_z = \iota(\Gamma_z)(\cong \Gamma_z/Z(\Gamma)), \quad \bar{\Gamma}_x = \iota(\Gamma_x)(\cong \Gamma_x/Z(\Gamma))$$

と書くことにする．

定理 4.2.5 N を自然数 ($N \geqq 2$) とすると

(1) $$[\bar{\Gamma}(1) : \bar{\Gamma}(N)] = \begin{cases} \dfrac{1}{2}[\Gamma(1) : \Gamma(N)] = \dfrac{1}{2}N^3 \prod_{p|N}\left(1 - \dfrac{1}{p^2}\right) & (N>2) \\ [\Gamma(1) : \Gamma(2)] = 6, \end{cases}$$

(2) $$[\bar{\Gamma}(1) : \bar{\Gamma}_0(N)] = [\Gamma(1) : \Gamma(N)] = N \prod_{p|N}\left(1 + \frac{1}{p}\right),$$

(3) $$[\bar{\Gamma}_0(N) : \bar{\Gamma}_1(N)] = \begin{cases} \dfrac{1}{2}[\Gamma_0(N) : \Gamma_1(N)] = \dfrac{\varphi(N)}{2} & (N>2) \\ [\Gamma_0(2) : \Gamma_1(2)] = 1 \end{cases}$$

である．ここで φ は Euler の函数である．

証明 $\Gamma(2) \ni -1$ であり，$\Gamma(N) \not\ni -1$ ($N>2$) であるから

$$[\bar{\Gamma}(1) : \bar{\Gamma}(N)] = \begin{cases} \dfrac{1}{2}[\Gamma(1) : \Gamma(N)] & (N>2) \\ [\Gamma(1) : \Gamma(2)] \end{cases}$$

となるので，定理 4.2.1 と定理 4.2.4 により (1) を得る．λ が $SL_2(\boldsymbol{Z})$ から $SL_2(\boldsymbol{Z}/N\boldsymbol{Z})$ への自然な写像ならば，$\mathrm{Ker}(\lambda) = \Gamma(N) \subset \Gamma_1(N)$ であるから $[\Gamma(1) : \Gamma_0(N)] = [SL_2(\boldsymbol{Z}/N\boldsymbol{Z}) : \lambda(\Gamma_0(N))]$，および $[\Gamma_0(N), \Gamma_1(N)] = [\lambda(\Gamma_0(N)) : \lambda(\Gamma_1(N))]$ である．明らかに

$$\lambda(\Gamma_0(N)) = \left\{\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & a^{-1} \end{bmatrix} \in SL_2(\boldsymbol{Z}/N\boldsymbol{Z}) \,\middle|\, a \in (\boldsymbol{Z}/N\boldsymbol{Z})^{\times},\ b \in \boldsymbol{Z}/N\boldsymbol{Z}\right\},$$

$$\lambda(\Gamma_1(N))=\left\{\begin{bmatrix}1 & b\\ 0 & 1\end{bmatrix}\in SL_2(\boldsymbol{Z}/N\boldsymbol{Z})\,|\,b\in\boldsymbol{Z}/N\boldsymbol{Z}\right\}$$

であるので，$|\lambda(\Gamma_0(N))|=N\cdot\varphi(N)$，$|\lambda(\Gamma_1(N))|=\varphi(N)$ がわかる．$-1\in\Gamma_0(N)$ および $-1\in\Gamma_1(2)$ であり，また $-1\notin\Gamma_1(N)$ $(N>2)$ であることに注意すると（2）および（3）がわかる．（証明終）

補題 4.2.6 modular 群 Γ の楕円元の位数は（存在するならば）2 または 3 である．

証明 定理 4.1.3 より明らかであるが，基本領域を用いない証明を与えておく．$\Gamma\not\ni-1$ ならば Γ の替わりに $\Gamma\cdot\{\pm1\}$ を考えることにより $\Gamma\ni-1$ と仮定して差支えない．さて γ を Γ の楕円元とし $\gamma=\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}$ とおく．z を γ の上半平面上の固定点とすると定義より $|a+d|<2$ であるから γ の最小多項式は $X^2+1=0$ または $X^2\pm X+1$ である．よって $\gamma^4=1$ または $\gamma^6=1$ である．定理 1.5.4 により Γ_z は巡回群で $\Gamma_z\ni-1$ であるから，$\bar{\Gamma}_z$ は位数 2 または 3 の巡回群である．（証明終）

次に modular 群の cusp を調べよう．Γ を modular 群とし，Γ の cusp 全体の集合を P_Γ とする．系 1.5.5 と定理 4.1.3 により

$$P_\Gamma=P_{\Gamma(1)}=\boldsymbol{Q}\cup\{\infty\}$$

であるが，$\boldsymbol{Q}\cup\{\infty\}$ の元は，すべて $\Gamma(1)$ に関して同値であったから，$\Gamma(1)\ni\alpha\longmapsto\alpha\infty\in P_\Gamma$ は $\Gamma\backslash\Gamma(1)/\Gamma(1)_\infty$ と $\Gamma\backslash P_\Gamma$ の 1 対 1 の対応を引き起こす．よって

$$|\Gamma\backslash P_\Gamma|=|\Gamma\backslash\Gamma(1)/\Gamma(1)_\infty| \tag{4.2.3}$$

となる．次に $-1\notin\Gamma$ と仮定し Γ の正則および非正則な cusp を調べよう．そのために便宜上

$$\Gamma(1)_\infty^{+}=\left\{\begin{bmatrix}1 & n\\ 0 & 1\end{bmatrix}\middle|\, n\in\boldsymbol{Z}\right\}\subset\Gamma(1)_\infty \tag{4.2.4}$$

とおき，η を

$$\begin{array}{rccc}\eta: & \Gamma\backslash\Gamma(1)/\Gamma(1)_\infty^{+} & \longrightarrow & \Gamma\backslash\Gamma(1)/\Gamma(1)_\infty\\ & \Cup & & \Cup\\ & \Gamma\alpha\Gamma(1)_\infty^{+} & \longmapsto & \Gamma\alpha\Gamma(1)_\infty\end{array} \tag{4.2.5}$$

と定義する．明らかに η は全射であるが，$[\Gamma(1)_\infty : \Gamma(1)_\infty^\pm]=2$ であるから，$\Gamma\backslash\Gamma(1)/\Gamma(1)_\infty$ の各元 $\Gamma\gamma\Gamma(1)_\infty$ の η による逆像の位数は，1 または 2 である．$\gamma\in\Gamma$ とすると

$$\text{(4.2.6)} \qquad |\eta^{-1}(\Gamma\gamma\Gamma(1)_\infty)|=1 \iff \Gamma\gamma\Gamma(1)_\infty=\Gamma\gamma\Gamma(1)_\infty^\pm$$
$$\iff (\gamma^{-1}\Gamma\gamma)\cdot\Gamma(1)_\infty^\pm\supset\Gamma(1)_\infty$$
$$\iff \gamma^{-1}\Gamma\gamma \text{ は } \begin{bmatrix} -1 & h \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \text{ なる元を含む}$$
$$\iff \gamma\infty \text{ は非正則な cusp である}$$

ことがわかる．

定理 4.2.7 $\Gamma_0(N)$ の位数 n（$n=2$ または 3）の同値でない楕円点の個数を ν_n とし，$\Gamma_0(N)$ の同値でない cusp の個数を ν_∞ で表わすと

$$\nu_2=\begin{cases} 0 & (4|N) \\ \prod_{p|N}\left(1+\left(\dfrac{-1}{p}\right)\right) & (4\nmid N) \end{cases}$$

$$\nu_3=\begin{cases} 0 & (9|N) \\ \prod_{p|N}\left(1+\left(\dfrac{-3}{p}\right)\right) & (9\nmid N) \end{cases}$$

$$\nu_\infty=\sum_{d|N}\varphi((d,\ N/d))=\prod_{p|N}\left\{\sum_{p=0}^{e}\varphi(p^{\min(f,e-f)})\right\} \qquad \left(N=\prod_p p^e\right)$$

である．ここで φ は Euler の函数であり，p は N の素因子を，d は N の正の約数を動く．$\left(\dfrac{-1}{\ }\right),\left(\dfrac{-3}{\ }\right)$ は2次剰余記号* である．

証明 z_0 を $\Gamma_0(N)$ の位数3の楕円元とする．$-1\in\Gamma_0(N)$ であるから，$\Gamma_0(N)_{z_0}$ は位数6の巡回群である．よって z_0 を固定する位数6の $\Gamma_0(N)$ の元は2つあり，系 1.3.5 により，それらは $\Gamma_0(N)$ の元によって共役ではないから

---

* §3.1 参照．今の場合には

$$\left(\frac{-1}{p}\right)=\begin{cases} 1 & (p\equiv1 \pmod 4) \\ -1 & (p\equiv-1 \pmod 4), \\ 0 & (p=2) \end{cases} \qquad \left(\frac{-3}{p}\right)=\begin{cases} 1 & (p\equiv1 \pmod 3) \\ -1 & (p\equiv-1 \pmod 3) \\ 0 & (p=3) \end{cases}$$

である．

$$\#\{\Gamma_0(N) \text{ の位数 3 の楕円点の同値類}\}$$
$$=\frac{1}{2}\#\{\Gamma_0(N) \text{ の位数 6 の元の } \Gamma_0(N) \text{ 共役類}\}$$

であるが，$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ & 0 & 1 \end{bmatrix}$ は $\Gamma_0(N)$ を正規化し，$\Gamma_0(N)$ の楕円元の $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ & 0 & 1 \end{bmatrix}$ による共役は同じ位数の楕円元である．$\Gamma_0^{\pm}(N)=\Gamma_0(N)\cup\Gamma_0(N)\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ とおくと系 1.3.5 (2) により

$$=\#\{\Gamma_0(N) \text{ の位数 6 の元の } \Gamma_0^{\pm}(N) \text{ の元による共役類}\}$$

となる．さて $\zeta=e^{\pi i/3}$ とし，α は $\Gamma_0(N)$ の位数 6 の元とする．$L=\left\{\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \middle| a, b\in \boldsymbol{Z}\right\} (\cong \boldsymbol{Z}^2)$ とおき，$\boldsymbol{Z}[\zeta]$ の L への作用を

$$(a+b\zeta)\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}=a\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}+b\alpha\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}$$

でもって定義する．この作用で L が左 $\boldsymbol{Z}[\zeta]$ 加群となっていることは，容易に確かめられる．$\alpha\in\Gamma_0(N)$ であるから，$\boldsymbol{Z}[\zeta]$ は L の部分群

$$L_0=\left\{\begin{bmatrix} a \\ Nb \end{bmatrix} \middle| a,\ b\in \boldsymbol{Z}\right\}$$

を L_0 に写像する．よって L_0 は L の $\boldsymbol{Z}[\zeta]$ 部分加群である．さて $\boldsymbol{Z}[\zeta]$ は単項 ideal 整域であるから，L は $\boldsymbol{Z}[\zeta]$ 加群として $\boldsymbol{Z}[\zeta]$ の幾つかの直和と同型であるが，$\boldsymbol{Z}$ 上の rank を調べることにより L は $\boldsymbol{Z}[\zeta]$ 加群として $\boldsymbol{Z}[\zeta]$ に同型であることがわかる．この同型を $\rho:\boldsymbol{Z}[\zeta]\xrightarrow{\sim}L$ とし，$I_\alpha=\rho^{-1}(L_0)$ とおく．L_0 が $\boldsymbol{Z}[\zeta]$ 部分加群であることから，I_α は $\boldsymbol{Z}[\zeta]$ の ideal であり，$\boldsymbol{Z}[\zeta]$ の自己同型は $\boldsymbol{Z}[\zeta]$ の可逆元（単数）を乗じることによって得られるから，I_α は ρ のとり方に無関係に決まる．更に $L/L_0\cong\boldsymbol{Z}/N\boldsymbol{Z}$ だから

(4.2.7) $$\boldsymbol{Z}[\zeta]/I_\alpha\cong\boldsymbol{Z}/N\boldsymbol{Z}$$

が成り立っている．さて $\beta\in\Gamma_0(N)$ を α と $\Gamma_0^{\pm}(N)$ の元によって共役な元

とすると，群 $\Gamma_0^{\pm}(N)$ の各元は L_0 を L_0 に写像するから $I_\alpha=I_\beta$ である．逆に I を (4.2.7) を I_α の替わりに I をとって成り立たせるような $\boldsymbol{Z}[\zeta]$ の ideal とすると，$\boldsymbol{Z}[\zeta]$ の $\boldsymbol{Z}$ 上の基底 $\{w_1, w_2\}$ で

(4.2.8)　　$\{w_1, Nw_2\}$ が I の $\boldsymbol{Z}$ 上の基底となる

ようなものが存在する．$M_2(\boldsymbol{Z})$ の元 α を

(4.2.9)　　$$\{\zeta w_1, \zeta w_2\}=\{w_1, w_2\}\alpha$$

で定義すると*，ζ の最小多項式は X^2-X+1 であるから $\det(\alpha)=1$ であり，I が ideal であることと基底のとり方とにより $\alpha\in\Gamma_0(N)$ であることがわかる．次に，$\boldsymbol{Z}[\zeta]$ の基底 $\{w_1', w_2'\}$ を (4.2.8) を満たすもう1つの基底とし，$\Gamma_0(N)$ の元 α' は $\{w_1', w_2'\}$ に対して (4.2.9) で与えられる元とする．$M_2(\boldsymbol{Z})$ の元 γ を

$$\{w_1', w_2'\}=\{w_1, w_2\}\gamma$$

で定義すると，$\{w_1, w_2\}$ および $\{w_1', w_2'\}$ のとり方により

$$\gamma\in\left\{\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\in M_2(\boldsymbol{Z})\,\middle|\, c\equiv 0 \pmod N,\ ad-bc=\pm 1\right\}$$
$$=\Gamma_0^{\pm}(N)$$

で且つ $\alpha'=\gamma^{-1}\alpha\gamma$ である．以上により $\Gamma_0(N)$ の位数6の元の $\Gamma_0^{\pm}(N)$ による共役類の全体と，$\boldsymbol{Z}[\alpha]$ の ideal I で (4.2.4) を満たすものは1対1に対応している．よって

$$\nu_3=\#\{\boldsymbol{Z}[\zeta] \text{ の ideal } I \text{ で } \boldsymbol{Z}[\zeta]/I\cong\boldsymbol{Z}/N\boldsymbol{Z} \text{ となるもの}\}$$

となるが，これは定理 3.1.3 により

$$=\begin{cases} 0 & (9\mid N) \\ \prod_{p\mid N}\left(1+\left(\dfrac{-3}{p}\right)\right) & (9\nmid N) \end{cases}$$

となる．ν_2 についても全く同様である．

---

* (4.2.9) 式は，$\alpha=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ とおくと，$\zeta w_1=aw_1+cw_2$, $\zeta w_2=bw_1+dw_2$ を意味する．

次に cusp の同値類の個数を計算するために，M_N を $\boldsymbol{Z}/N\boldsymbol{Z}\times\boldsymbol{Z}/N\boldsymbol{Z}$ の元で位数 N のもの全体のなす集合とし，M_N に同値関係～を，M_N の2元 $(\bar{c}, \bar{d})$, $(\bar{c}', \bar{d}')$ に対して

$$(\bar{c}, \bar{d})\sim(\bar{c}', \bar{d}') \Longleftrightarrow \begin{array}{l}\bar{m}\in(\boldsymbol{Z}/N\boldsymbol{Z})^\times \text{ および } \bar{n}\in\boldsymbol{Z}/N\boldsymbol{Z} \text{ が存在して}\\ (\bar{c}', \bar{d}')=\bar{m}(\bar{c}, \bar{d}+\bar{n}\bar{c}) \text{ である}\end{array}$$

でもって定義すると，対応

$$\Gamma_0(N)\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\Gamma(1)_\infty \longmapsto (c(\mathrm{mod}\,N),\ d(\mathrm{mod}\,N)) \text{ を含む } M_N/\sim \text{ の同値類}$$

により $\Gamma_0(N)\backslash\Gamma(1)/\Gamma(1)_\infty$ と $M_N/\sim$ は1対1に対応するから，(4.2.3) により $|\Gamma_0(N)\backslash P_{\Gamma_0(N)}|=|M_N/\sim|$ である．さて $N=\prod_p p^e$ と N を素因数分解すると $M_N=\prod_p M_{p^e}$ であり，M_N および M_{p^e} の上で与えた同値関係は，この直積分解と可換である．よって

$$|M_N/\sim|=\prod_p |M_{p^e}/\sim|$$

となり，$|M_N/\sim|$ を計算することは，N が素数巾の場合に帰着される．p を素数とすると M_{p^e} の任意の元 $(\bar{c}, \bar{d})$ は $(p^f, *)$ なる形の元に同値であり，f は $0\leqq f\leqq e$ なる条件の下にただ1つ定まる．f を固定したとき $f>0$ ならば $\bar{d}\in(\boldsymbol{Z}/N\boldsymbol{Z})^\times$ であって

$$(p^f, \bar{d})\sim(p^f, \bar{d}') \Longleftrightarrow \bar{d}'\equiv\bar{d}(\mathrm{mod}\,p^{\min(f,e-f)})$$

であり，$f=0$ ならば $\{(1, \bar{d})\,|\,\bar{d}\in\boldsymbol{Z}/N\boldsymbol{Z}\}$ はすべて同値であることがわかるから

$$|M_{p^e}/\sim|=\sum_{f=0}^{e}\varphi(p^{\min(f,e-f)})$$

である． (証明終)

定理 4.2.8 Γ は modular 群とする．$[\bar{\Gamma}(1):\bar{\Gamma}]=\mu$ とし，ν_2, ν_3, ν_∞ は Γ の位数2の楕円点，位数3の楕円点，cusp の各々の同値類の個数とする．g は $\mathfrak{R}_\Gamma$ の genus とすると

$$g=1+\frac{\mu}{12}-\frac{\nu_2}{4}-\frac{\nu_3}{3}-\frac{\nu_\infty}{2}$$

である．

証明　$H^*_\Gamma=H^*_{\Gamma(1)}$ であるから，自然な写像

$$F:\mathfrak{R}_\Gamma=\Gamma\backslash H^*_\Gamma \longrightarrow \mathfrak{R}_{\Gamma(1)}=\Gamma(1)\backslash H^*_{\Gamma(1)}$$

が存在する．以下 $H^*=H^*_\Gamma=H^*_{\Gamma(1)}$, $\mathfrak{R}=\mathfrak{R}_{\Gamma(1)}$ と書き，更に $\pi_\Gamma: H^*\longrightarrow\mathfrak{R}_\Gamma$, $\pi: H^*\longrightarrow\mathfrak{R}$ とする．$\boldsymbol{b}$ は $\mathfrak{R}_\Gamma$ の任意の点，$z\in H^*$ は $\pi_\Gamma(z)=\boldsymbol{b}$ なる点とし，$\mathfrak{R}$ に Riemann 面の構造を定義するのに用いた z の近傍 U^*_z をとる．$F\circ\pi_\Gamma=\pi$ は明らかであるから，特に

(4.2.10)
$$\begin{array}{ccccc} & & \pi_\Gamma(U^*_z) & & \\ & \overset{\pi_\Gamma}{\nearrow} & \circlearrowleft & \overset{F}{\searrow} & \\ U^*_z & & \xrightarrow[\pi]{\qquad\qquad} & & \pi(U^*_z) \end{array}$$

は可換である．これと $\mathfrak{R}_\Gamma$ および $\mathfrak{R}$ の Riemann 面の構造の定義より $\{\mathfrak{R}_\Gamma, F\}$ は $\mathfrak{R}$ の covering であり，covering の次数は μ である．$e_{\boldsymbol{b}}=e_{\boldsymbol{b},F}$ を $\boldsymbol{b}$ における F の分岐指数とし，$F(\boldsymbol{b})=\boldsymbol{a}$ とおく．また $\boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{a}_3$, $\boldsymbol{a}_\infty$ を各々 $\mathfrak{R}$ の位数 2 の楕円点，位数 3 の楕円点，cusp とする．もし $\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{a}_3$, $\boldsymbol{a}_\infty$ ならば勿論 $\boldsymbol{b}$ も通常点であるから，π および π_Γ は位相同型となり，$\boldsymbol{b}$ は F の分岐点ではない．もし $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}_2$ とすると，$e_{\boldsymbol{b}}$ は 1 または 2 であるが

$$e_{\boldsymbol{b}}=1 \Longleftrightarrow F \text{ は } \pi_\Gamma(U^*_z) \text{ と } \pi(U^*_z) \text{ の位相同型を与える}$$
$$\Longleftrightarrow z \text{ は } \Gamma \text{ の楕円点である}$$

ことがわかる．よって $t=\#\{\boldsymbol{b}\in\mathfrak{R}_\Gamma \mid F(\boldsymbol{b})=\boldsymbol{a}_2\}$ とおくと，(1.8.5) により $\mu=\nu_2+2(t-\nu_2)$ であるから，$\sum_2$ を $F(\boldsymbol{b})=\boldsymbol{a}_2$ なる $\boldsymbol{b}$ に関する和とすると

(4.2.11)
$$\textstyle\sum_2(e_{\boldsymbol{b}}-1)=\mu-t=(\mu-\nu_2)/2$$

である．同様にして $\sum_3$ を $F(\boldsymbol{b})=\boldsymbol{a}_3$ なる $\boldsymbol{b}$ に関する和とすると

(4.2.12)
$$\textstyle\sum_3(e_{\boldsymbol{b}}-1)=2(\mu-\nu_3)/3$$

がわかる．最後に $F(\boldsymbol{b})=\boldsymbol{a}_\infty$ とすると，$\boldsymbol{b}$ は $\mathfrak{R}_\Gamma$ の cusp であるから $\#\{\boldsymbol{b}\in\mathfrak{R}_\Gamma \mid F(\boldsymbol{b})=\boldsymbol{a}_\infty\}=\nu_\infty$ である．よって $\sum_\infty$ を $F(\boldsymbol{b})=\boldsymbol{a}_\infty$ なる $\boldsymbol{b}$ に関する和とすると $\sum_\infty e_{\boldsymbol{b}}=\mu$ だから

(4.2.13)
$$\textstyle\sum_\infty(e_{\boldsymbol{b}}-1)=\mu-\nu_\infty$$

となる．(4.2.11), (4.2.12), (4.2.13) と Hurwitz の公式 (1.8.6) により定理を得る．　　　　（証明終）

定理 4.2.7 および定理 4.2.8 により $\mathfrak{R}_{\Gamma_0(N)}$ の genus が求まる．$\mathfrak{R}_{\Gamma_1(N)}$ および $\mathfrak{R}_{\Gamma(N)}$ についても楕円点および cusp を調べてみよう．

補題 4.2.9 Γ は第1種の Fuchs 群で，Γ' は Γ の指数有限の正規部分群とする．x が Γ の cusp ならば，x と Γ 同値な Γ' の cusp の同値類の個数は

$$[\bar{\Gamma}:\bar{\Gamma}']/[\bar{\Gamma}_x:\bar{\Gamma}'_x]$$

である．

証明 $\bar{\Gamma}'$ が $\bar{\Gamma}$ の正規部分群であるから，$\bar{\Gamma}'\bar{\Gamma}_x$ は $\bar{\Gamma}$ の部分群である．x と Γ 同値な Γ' の cusp の同値類の個数は $|\bar{\Gamma}'\backslash\bar{\Gamma}/\bar{\Gamma}_x|=|\bar{\Gamma}/\bar{\Gamma}'\bar{\Gamma}_x|$ であるが

$$[\bar{\Gamma}:\bar{\Gamma}']=[\bar{\Gamma}:\bar{\Gamma}'\bar{\Gamma}_x][\bar{\Gamma}'\bar{\Gamma}_x:\bar{\Gamma}']=[\bar{\Gamma}:\bar{\Gamma}'\bar{\Gamma}_x][\bar{\Gamma}_x:\bar{\Gamma}'_x]$$

であるから補題を得る．　　(証明終)

定理 4.2.10 （1） $\Gamma_1(N)$ $(N\geqq 3)$, $\Gamma(N)$ $(N\geqq 2)$ は楕円元を持たない．

（2） $\Gamma_1(N)$ の cusp の同値類の個数 $\nu_\infty=\nu_\infty(\Gamma_1(N))$ は

$$\nu_\infty=\begin{cases}\dfrac{1}{2}\displaystyle\sum_{d|N}\varphi(d)\varphi\left(\dfrac{N}{d}\right) & \text{（すべて正則）}\ (N\geqq 3,\ N\neq 4)\\ 3\ \text{（うち正則 cusp は 2 個）} & (N=4)\end{cases}$$

である*．ここで d は N の正の約数全部を動く．

（3） $\Gamma(N)$ の cusp の同値数の個数 $\nu_\infty=\nu_\infty(\Gamma(N))$ は

$$\nu_\infty(\Gamma(N))=\frac{1}{N}[\bar{\Gamma}(1):\bar{\Gamma}(N)]$$
$$=\begin{cases}\dfrac{1}{2}N^2\displaystyle\prod_{p|N}\left(1-\dfrac{1}{p^2}\right) & \text{（すべて正則 cusp）}\ (N\geqq 3)\\ 3 & (N=2)\end{cases}$$

である．

証明 （1） $\Gamma_1(N)$ （または $\Gamma(N)$）の元 $\gamma=\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}$ が楕円元であるとする．定義により $|a+d|<2$ であるが，$a\equiv d\equiv 1 (\mathrm{mod}\, N)$ なる条件により $a+d=0$ でなければならない．よって $N\geqq 3$ ならば $a\equiv -d\equiv 1 (\mathrm{mod}\, N)$ となり矛盾である．よって $\Gamma_1(N)$, $\Gamma(N)$ $(N\geqq 3)$ は楕円元を持たない．次に $\gamma\in\Gamma(z)$

* $\Gamma_1(2)=\Gamma_0(2)$ である．

とすると更に $bc\equiv 0 \pmod 4$ であるから，$-a^2\equiv ad\equiv 1 \pmod 4$ でなければならないがこれは不可能である．よって $\Gamma(2)$ も楕円元を持たない．次に（2）を示すために，$\Gamma_0(N)$ の場合と同様に M_N は $\boldsymbol{Z}/N\boldsymbol{Z}\times\boldsymbol{Z}/N\boldsymbol{Z}$ の位数 N の元全体のなす集合とし，M_N の同値関係 $\sim$ および $\acute{\sim}$ を，$(\bar{c},\ \bar{d})(\bar{c}',\ \bar{d}')\in M_N$ に対し

$$(\bar{c},\ \bar{d})\sim(\bar{c}',\ \bar{d}') \Longleftrightarrow (\bar{c}',\ \bar{d}')=\pm(\bar{c},\ \bar{d}+\bar{n}\bar{c}) \qquad (\bar{n}\in\boldsymbol{Z}/N\boldsymbol{Z})$$

$$(\bar{c},\ \bar{d})\acute{\sim}(\bar{c}',\ \bar{d}') \Longleftrightarrow (\bar{c}',\ \bar{d}')=(\bar{c},\ \bar{d}+\bar{n}\bar{c}) \qquad (\bar{n}\in\boldsymbol{Z}/N\boldsymbol{Z})$$

で定義する．$\Gamma(1)_\infty^+=\left\{\begin{bmatrix}1 & n\\ 0 & 1\end{bmatrix}\middle| n\in\boldsymbol{Z}\right\}$ とおくと，図式

$$\begin{array}{ccc}
\Gamma_1(N)\backslash\Gamma(1)/\Gamma(1)_\infty^+ & \longrightarrow & M_N/\acute{\sim} \\
{\scriptstyle\eta}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\xi} \\
\Gamma_1(N)\backslash\Gamma(1)/\Gamma(1)_\infty & \longrightarrow & M_N/\sim
\end{array}$$

は可換である．ここで水平の写像は $\Gamma(1)\ni\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}\longmapsto(c\,(\mathrm{mod}\,N),\ d\,(\mathrm{mod}\,N))\in M_N$ の引き起こす全単射であり，垂直の写像 η,ξ は自然な写像である．$N\neq 4$ とすると，ξ は $M_N/\sim$ の各元に $M_N/\acute{\sim}$ の2元を対応させるから

$$|M_N/\sim|=\frac{1}{2}|M_N/\acute{\sim}|$$

であり，(4.2.6) により $\Gamma_1(N)$ の cusp は，すべて正則である．$|M_N/\acute{\sim}|$ の計算は $\Gamma_0(N)$ の場合と同様の原理で $N=p^e$（素数巾）の場合に帰着される．$\bar{c}\in\boldsymbol{Z}/p^e\boldsymbol{Z}$ とする．f を $0\leqq f\leqq e$ で $\bar{c}\equiv 0 \pmod{p^f}$ なる最大の数とすると

$$(\bar{c},\ \bar{d})\sim(\bar{c},\ \bar{d}') \Longleftrightarrow \bar{d}\equiv\bar{d}' \pmod{p^f}$$

となるので，このような $\bar{c}$ を1つ固定すれば，同値でない $(\bar{c},\bar{d})$ の個数は $\varphi(p^f)$ 個であるから

$$|M_{p^e}/\acute{\sim}|=\sum_{f=0}^{e}\varphi(p^{e-f})\varphi(p^f)$$

となることがわかる．$N=4$ とすると $M_N/\acute{\sim}$ の代表系として $\{(\pm 1,\ 0),\ (0,\ \pm 1),\ (2,\ 1)\}$ がとれ，$(1,\ 0)\sim(-1,\ 0)$ および $(0,\ 1)\sim(0,\ -1)$ であるから $|M_N/\sim|=3$ である．(4.2.6) により同時に，正則 cusp の同値類の個数が2で非正則 cusp の同値類の個数は1であることが示された．最後に $\Gamma(N)$ は

$\Gamma(1)$ の正規部分群であり，$[\Gamma(1)_\infty : \{\pm 1\}\Gamma(N)_\infty] = N$ 且つ

$$\Gamma(N)_\infty = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & nN \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \middle| n \in \boldsymbol{Z} \right\}$$

であるから補題 4.2.9 および正則 cusp の定義により（3）がわかる．

(証明終)

§4.3 modular 形式と Dirichlet 級数

保型形式の中で特に整数論と密接に結びついている合同 modular 群に関する保型形式を調べよう．modular 群に関する保型形式および保型函数は，各々 modular 形式および modular 函数と呼ばれる．以下 modular 形式は常に正則 modular 形式を意味するものとする．さて Γ が合同 modular 群ならば，定義により自然数 N が存在して $\Gamma \supset \Gamma(N)$ であるので

$$G_k(\Gamma) \subset G_k(\Gamma(N))$$

となるから，$G_k(\Gamma)$ を調べるには $G_k(\Gamma(N))$ を調べればよい．更に

$$(4.3.1)\quad \begin{bmatrix} N & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \Gamma(N) \begin{bmatrix} N & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \middle| c \equiv 0 \pmod{N^2},\ a \equiv d \equiv 1 \pmod{N} \right\}$$
$$\supset \Gamma_1(N^2)$$

であるので，$f(z) \in G_k(\Gamma(N))$ ならば

$$f(NZ) = N^{-k/2}\left(f \middle| \begin{bmatrix} N & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}_k \right)(z) \in G_k(\Gamma_1(N^2))$$

となる．$f(z)$ の ∞ における Fourier 展開* を $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{2\pi i n z/N}$ とすると

$$f(Nz) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{2\pi i n z}$$

となり，$f(z)$ と $f(Nz)$ の Fourier 展開の係数は本質的に同一であることに注意しておく．以上より合同 modular 群に関する modular 形式を調べるには，

---

* 以下，断わらない限り，modular 形式の Fourier 展開は ∞ における Fourier 展開を意味するものとする．

$G_k(\Gamma_1(N))$（cusp 形式については $S_k(\Gamma_1(N))$）を調べればよいことがわかった．次に χ は mod$N$ で定義される Dirichlet の指標とする．$\Gamma_0(N)$ の元 $\gamma=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ に対して

(4.3.2) $$\chi(\gamma)=\chi(d)$$

と定義すると，系 4.2.2 により，χ は $\Gamma_0(N)$ の指標である．

補題 4.3.1 N を自然数とすると

$$G_k(\Gamma_1(N))=\bigoplus_\chi G_k(\Gamma_0(N),\chi),\qquad S_k(\Gamma_1(N))=\bigoplus_\chi S_k(\Gamma_0(N),\chi)$$

が成り立つ．ここで χ は mod$N$ で定義されるすべての Dirichlet の指標を動く．

証明 $\Gamma_1(N)$ は $\Gamma_0(N)$ の正規部分群であるから，$\Gamma_0(N)$ は $G_k(\Gamma_1(N))$ に $f\longmapsto f|[\gamma]_k$ $(\gamma\in\Gamma_0(N))$ によって作用する．$\Gamma_1(N)$ の作用で $G_k(\Gamma_1(N))$ の各元は不変であるから，$\Gamma_0(N)$ の $G_k(\Gamma_1(N))$ における表現は $\Gamma_0(N)/\Gamma_1(N)$ の表現を引き起こす．$\Gamma_0(N)/\Gamma_1(N)\cong(\boldsymbol{Z}/N\boldsymbol{Z})^\times$ であるので，$\Gamma_0(N)/\Gamma_1(N)$ の既約表現は mod$N$ の指標 χ から引き起こされるもので尽くされるから，この表現を既約表現に分解することにより補題を得る．cusp 形式についても全く同様である．（証明終）

この補題により，我々は対象を更に $G_k(\Gamma_0(N),\chi)$ および $S_k(\Gamma_0(N),\chi)$ に限ることが出来る．以下記号を簡略にするために

$$G_k(N,\chi)=G_k(\Gamma_0(N),\chi),\qquad S_k(N,\chi)=S_k(\Gamma_0(N),\chi)$$

と書くことにする．M が N の倍数ならば，χ が引き起こす mod$M$ の指標も χ で表わすと

(4.3.3) $$G_k(N,\chi)\subset G_k(M,\chi),\qquad S_k(N,\chi)\subset S_k(M,\chi)$$

となることは容易にわかる．

補題 4.3.2 N は自然数とし，χ は mod$N$ の指標とすると

(1) $\chi(-1)\neq(-1)^k$ ならば，$G_k(N,\chi)=\{0\}$ である．

(2) $\omega_N=\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ N & 0 \end{bmatrix}$ とすると，$f\longmapsto f|[\omega_N]_k$ により

$$G_k(N, \chi) \cong G_k(N, \bar{\chi}), \qquad S_k(N, \chi) \cong S_k(N, \bar{\chi})$$

である.

証明 (1)は (2.1.27) により明らかである. $\Gamma_0(N)$ の元γを $\gamma = \begin{bmatrix} a & b \\ cN & d \end{bmatrix}$ と書くと

$$(4.3.4) \qquad \omega_N \gamma \omega_N^{-1} = \begin{bmatrix} d & -c \\ -bN & a \end{bmatrix}, \qquad \omega_N^2 = \begin{bmatrix} -N & 0 \\ 0 & -N \end{bmatrix}$$

であるから, $\omega_N \Gamma_0(N) \omega_N^{-1} = \Gamma_0(N)$ であり, $g = f|[\omega_N]_k$ とおくと (4.3.4) により

$$g|[\gamma]_k = \chi(a) g = \bar{\chi}(\gamma) g$$

となることがわかる. (証明終)

$G_k(N, \chi)$ の元 $f(z)$ は

$$(4.3.5) \qquad f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{2\pi i n z}$$

と Fourier 展開されたが, 上のような Fourier 展開を持つ H 上の正則函数 $f(z)$ は勿論いつも modular 形式になるわけではない. 上のような Fourier 展開を持つ H 上の正則函数 $f(z)$ が, modular 形式になる条件を求めたい. (4.1.13) で見たように, $f(z)$ が $\Gamma(1)$ に関する Eisenstein 級数であるならば, $f(z)$ の Fourier 展開の係数を用いて定義される Dirichlet 級数は, Riemann のζ函数の函数の積で表わされるから, 全平面に解析接続されて, 函数等式を持った. そこで $f(z)$ の Fourier 係数を用いて

$$(4.3.6) \qquad \varphi(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s}$$

と定義する. $f(z)$ が cusp 形式ならば $a_n = O(n^{k/2})$ であったから (系 2.1.6), $\varphi(s)$ は $\mathrm{Re}(s) > \dfrac{k}{2} + 1$ で広義一様に収束するが, 更に全平面に解析接続されて函数等式を満たすことが示されるのである (系 4.3.5). 実をもっと強く, (4.3.5) と (4.3.6) の収束に関する, 適当な条件の下に, $f(z)$ の保型性と $\varphi(z)$ および $\varphi(z)$ に Dirichlet の指標を付けて得られる Dirichlet 級数の適当な形の函数等式とは同値であると言う, modular 形式と Dirichlet 級数のみごとな対応が示されるのである (定理 4.3.14). これを証明するのが本節の目

標である．先ず上半平面上の函数 $f(z)$ に次の条件を課する．

(4.3.7) $f(z)$ は H 上の正則函数で，H において広義一様に絶対収束する Fourier 級数展開

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n e^{2\pi inz}$$

を持ち，更に正の定数 ν が存在し

$$f(z)=O(\mathrm{Im}(z)^{-\nu}) \qquad (\mathrm{Im}(z)\longrightarrow 0)$$

が $\mathrm{Re}(z)$ に関して一様に成り立つ．

f がこの条件を満たせば系 2.1.6 におけると全く同様の議論で

$$a_n=O(n^{\nu})$$

となることが証明される．次の補題はこの命題の逆を与える．

補題 4.3.3 複素数列 $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ で $a_n=O(n^{\nu})$ となるものが与えられたときに

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n e^{2\pi inz} \qquad (z\in H)$$

とおくと，右辺は広義一様に絶対収束し，$f(z)$ は H 上の正則函数で

$$f(z)=O(\mathrm{Im}(z)^{-\nu-1}) \qquad (\mathrm{Im}(z)\longrightarrow 0),$$
$$f(z)-a_0=O(e^{-2\pi\,\mathrm{Im}(z)}) \qquad (\mathrm{Im}(z)\longrightarrow \infty)$$

が $\mathrm{Re}(z)$ に関して一様に成り立つ．

証明 仮定により正の常数 L が存在して $|a_n|\leqq Ln^{\nu}$ である．Stirling の公式 (3.2.7) により n を増大させると，$\Gamma(n)\sim\sqrt{2\pi}\,n^{n-1/2}e^{-n}$ となるから

$$(-1)^n\binom{-\nu-1}{n}=\frac{\Gamma(\nu+n+1)}{\Gamma(\nu+1)\Gamma(n+1)}\sim M^{-1}n^{\nu} \qquad (n\longrightarrow\infty)$$

が成り立つ．ここで $M=e^{\nu}\Gamma(\nu+1)$ である．よって $N>0$ を十分大きくとると

$$|a_n|\leqq N(-1)^n\binom{-\nu-1}{n}$$

が任意の自然数 n に対して成り立つので，$z=x+iy$ とおくと

$$(4.3.8) \qquad \sum_{n=0}^{\infty}|a_n||e^{2\pi inz}|\leqq N\left(\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\binom{-\nu-1}{n}e^{-2\pi ny}\right)$$

$$=N(1-e^{-2\pi y})^{-\nu-1}$$

を得る．よって前半が示された．次に y を 0 に近づけると $(1-e^{-2\pi y})^{-1}=O(y^{-1})$ であるから $|f(z)|=O(y^{-\nu-1})$ がわかる．また (4.3.8) により $f(z)$ は $y\longrightarrow\infty$ のときに有界である．$g(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_{n+1}e^{2\pi inz}$ とおくと，$g(z)$ も補題の仮定を満たすから ∞ の近傍で有界となり，よって

$$f(z)-a_0=e^{2\pi iz}g(z)=O(e^{-2\pi y})\qquad(y\longrightarrow\infty)$$

を得る． (証明終)

上の補題により，(4.3.7) を満たす H 上の正則函数 $f(z)$ と，複素数列 $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ で，ある正数 μ に対して $a_n=O(n^{\mu})$ となるものは1対1に対応していることがわかる．さて，(4.3.7) を満たす H 上の函数 $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_ne^{2\pi inz}$ に対して

$$L(s;\ f)=\sum_{n=1}^{\infty}a_nn^{-s}\tag{4.3.9}$$

と定義する．$a_n=O(n^{\nu})$ であるから，$L(s;\ f)$ は任意の $\varepsilon(>0)$ に対し $\mathrm{Re}(s)\geqq1+\nu+\varepsilon$ で一様に絶対収束し，$\mathrm{Re}(s)>1+\nu$ において正則函数となる．そこで $\mathrm{Re}(s)>1+\nu$ のときに，正数 N に対して

$$\Lambda_N(s;\ f)=\left(\frac{2\pi}{\sqrt{N}}\right)^{-s}\Gamma(s)L(s;\ f)$$

と定義する．Hecke の定理を証明するための函数論的な準備として，次の補題を証明する．

補題 4.3.4 (Phragmen-Lindelöf) ν_1, ν_2 は $\nu_1<\nu_2$ なる実数，δ は正数とする．

$$F=\{s\in\boldsymbol{C}\,|\,\nu_1\leqq\mathrm{Re}(s)\leqq\nu_2\},\qquad U=\{s\in\boldsymbol{C}\,|\,\nu_1-\delta<\mathrm{Re}(s)<\nu_2+\delta\}$$

とおく．$s=\sigma+i\tau$ と書くときに，U で正則な函数 $\varphi(s)$ が条件

(i) $a>0$ が存在して，σ に関して一様に $|\varphi(s)|=O(e^{|\tau|^a})$ $(|\tau|\longrightarrow\infty)$

(ii) 実数 b が存在して，$\mathrm{Re}(s)=\nu_1$ 上および $\mathrm{Re}(s)=\nu_2$ 上で

$$|\varphi(s)|=O(|\tau|^b)\qquad(|\tau|\longrightarrow\infty)$$

を満たすならば，F において一様に

$$|\varphi(s)|=O(|\tau|^b)\qquad(|\tau|\longrightarrow\infty)$$

が成り立つ.

証明 （i）により $L>0$ が存在して U 上で $|\varphi(s)|\leqq Le^{|\tau|^a}$ が成り立つ. 先ず補題を $b=0$ の仮定の下に示す. 即ち, $M>0$ が存在して $\mathrm{Re}(s)=\nu_1$ 上および $\mathrm{Re}(s)=\nu_2$ 上では $|\varphi(s)|\leqq M$ であると仮定する. m が $m>c$ 且つ $m\equiv 2 \pmod 4$ なる正の整数ならば, $\mathrm{Re}(s^m)=\mathrm{Re}((\sigma+i\tau)^m)$ は σ および τ の多項式であり, τ の多項式とみての最高次数の項は $-\tau^m$ であるから F において一様に

$$\mathrm{Re}(s^m)=-\tau^m+O(|\tau|^{m-1}) \qquad (|\tau|\longrightarrow\infty) \tag{4.3.10}$$

が成り立つので, $\mathrm{Re}(s^m)$ は F で有界である. m を $m>a$ にとり, N を $\mathrm{Re}(s^m)\leqq N$ が F 上で成り立つようにとると, 任意の $\varepsilon(>0)$ に対して（ii）により

$$\mathrm{Re}(s)=\nu_1 \text{ 上および } \mathrm{Re}(s)=\nu_2 \text{ 上では } |\varphi(s)e^{\varepsilon s^m}|\leqq Me^{\varepsilon N}$$

であり,（i）と (4.3.10) により F において一様に

$$|\varphi(s)e^{\varepsilon s^m}|\longrightarrow 0 \qquad (|\tau|\longrightarrow\infty)$$

となるので, 最大値の原理を用いると, 任意の $s\in F$ に対して

$$|\varphi(s)e^{\varepsilon s^m}|\leqq Me^{\varepsilon N} \tag{4.3.11}$$

が成り立つ. ε は任意であるから $\varepsilon\longrightarrow 0$ とすると $|f(s)|\leqq M$ が成り立つ.

次に $b\neq 0$ とする. U 上の正則函数 $\psi(s)$ を

$$\psi(s)=(s-\nu_1+1)^b=e^{b\log(s-\nu_1+1)}$$

と定義する. ここで log は主値をとるものとする. $\mathrm{Re}(\log(s-\nu_1+1))=\log|s-\nu_1+1|$ であるから, F において一様に

$$|\psi(s)|=|s-\nu_1+1|^b\sim|\tau|^b \qquad (|\tau|\longrightarrow\infty)$$

となる. よって $\varphi_1(s)=\varphi(s)/\psi(s)$ とおくと, $\varphi_1(s)$ は（i）を満たし, 更に（ii）を $b=0$ として満たすから, 上の結果により $\varphi_1(s)$ は F で有界である. 故に $|\varphi(s)|=O(|\tau|^b)$ $(|\tau|\longrightarrow\infty)$ を得る. （証明終）

§3.2 でも予告したように, Hecke は定理 3.2.1 の証明を拡張して次の定理を得た.

定理 4.3.5 (Hecke) k は実数で N は正数とする. $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_ne^{2\pi inz}$ お

よび $g(z)=\sum_{n=0}^{\infty}b_n e^{2\pi i n z}$ が (4.3.7) を満たす H 上の正則函数とすると，次の (A) および (B) は同値である.

(A) $g(z)=(-i\sqrt{N}z)^{-k}f(-1/Nz)$. ここで $(-i\sqrt{N}z)^{-k}$ は $-k\pi/2<\arg(-i\sqrt{N}z)^{k}<k\pi/2$ にとる.

(B) $\Lambda_N(s;\ f)$ および $\Lambda_N(s;\ g)$ は全 s 平面に解析接続され，函数等式

$$\Lambda_N(s;\ f)=\Lambda_N(k-s;\ g)$$

を満たす. 更に $\Lambda_N(s;\ f)+\dfrac{a_0}{s}+\dfrac{b_0}{k-s}$ は任意の垂直な帯領域で有界な正則函数である.

証明 (A) $\Longrightarrow$ (B)：仮定により $\nu(>0)$ が存在して $a_n=O(n^\nu)$, $b_n=O(n^\nu)$ となるので $\mathrm{Re}(s)>\nu+1$ ならば

$$\Lambda_N(s;\ f)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n\left(\frac{2\pi n}{\sqrt{N}}\right)^{-s}\int_0^\infty t^s e^{-t}\frac{dt}{t}$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^\infty a_n t^s e^{-2\pi n t/\sqrt{N}}\frac{dt}{t}$$

であるが，$\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|e^{-2\pi n t/\sqrt{N}}$ は収束し，$\sigma>\nu+1$ ならば $\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^\infty |a_n|t^\sigma e^{-2\pi n t/\sqrt{N}}\dfrac{dt}{t}$ が有限な値を持つから和と積分の順序が交換出来て

$$=\int_0^\infty t^s\left(f\left(\frac{it}{\sqrt{N}}\right)-a_0\right)\frac{dt}{t}$$

$$=-\frac{a_0}{s}+\int_1^\infty t^{-s}f\left(\frac{i}{\sqrt{N}t}\right)\frac{dt}{t}+\int_1^\infty t^s\left(f\left(\frac{it}{\sqrt{N}}\right)-a_0\right)\frac{dt}{t}$$

となる. $g(z)=(-i\sqrt{N}z)^{-k}f\left(\dfrac{-1}{Nz}\right)$ だから，$\mathrm{Re}(s)>k$ において

$$\Lambda_N(s;\ f)=-\frac{a_0}{s}-\frac{b_0}{k-s}+\int_1^\infty t^{k-s}\left(g\left(\frac{it}{\sqrt{N}}\right)-b_0\right)\frac{dt}{t} \tag{4.3.13}$$

$$+\int_1^\infty t^s\left(f\left(\frac{it}{\sqrt{N}}\right)-a_0\right)\frac{dt}{t}$$

と書き変えられる. 補題 4.3.2 により $t\longrightarrow\infty$ のときには

$$f(it)-a_0=O(e^{-2\pi t}),\qquad g(it)-b_0=O(e^{-2\pi t})$$

であるから，(4.3.13) の右辺の積分 $\int_1^\infty t^s(f(it/\sqrt{N})-a_0)\dfrac{dt}{t}$ および $\int_1^\infty t^{k-s}\cdot$

$(g(it/\sqrt{N})-b_0)\dfrac{dt}{t}$ は s 平面の任意の垂直な帯領域で一様に絶対収束し，s 平面上の正則函数となる．よって任意の $s(\in \boldsymbol{C})$ に対して $\Lambda_N(s;\ f)$ を (4.3.13) でもって定義すると，$\Lambda_N(s;\ f)$ は全平面での有理型函数に拡張され，更に $\Lambda_N(s;\ f)+\dfrac{a_0}{s}+\dfrac{b_0}{k-s}$ は全 s 平面で正則で任意の垂直な帯領域で有界である．同様に $\Lambda_N(s;\ g)$ も全平面に解析接続され任意の s に対して

$$(4.3.14)\quad \Lambda_N(k-s;\ g)=-\frac{a_0}{s}-\frac{b_0}{k-s}+\int_1^\infty t^{k-s}\Big(g\Big(\frac{it}{\sqrt{N}}\Big)-b_0\Big)\frac{dt}{t} +\int_1^\infty t^s\Big(f\Big(\frac{it}{\sqrt{N}}\Big)-a_0\Big)\frac{dt}{t}$$

と表わされる．(4.3.13) と (4.3.14) を比較することにより $\Lambda_N(s;\ f)=\Lambda_N(k-s;\ f)$ を得る．

(B) $\Longrightarrow$ (A)：(3.2.10) により，任意の正数 α に対し

$$f(iy)=\frac{1}{2\pi i}\sum_{n=1}^\infty a_n\int_{\mathrm{Re}(s)=\alpha}(2\pi ny)^{-s}\Gamma(s)ds+a_0$$

である．実数 α を $\alpha>\nu+1$ にとると，$L(s;\ f)=\sum a_n n^{-s}$ は $\mathrm{Re}(s)=\alpha$ 上で一様に収束し有界であるから，Stirling の評価式 (3.2.8) により $\Lambda_N(s;\ f)=\Big(\dfrac{2\pi}{\sqrt{N}}\Big)^{-s}\Gamma(s)L(s;\ f)$ は $\mathrm{Re}(s)=\alpha$ 上で絶対積分が可能となり，和と積分の順序が変換出来て

$$=\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathrm{Re}(s)=\alpha}(\sqrt{N}y)^{-s}\Lambda_N(s;\ f)ds+a_0$$

が成立する．$L(s;\ f)$ は $\mathrm{Re}(s)=\alpha$ 上で有界だから，Stirling の評価式により，$\mathrm{Re}(s)=\alpha$ 上で任意の $\mu(>0)$ に対して

$$(4.3.15)\qquad \Lambda_N(s;\ f)=O(|\mathrm{Im}(s)|^{-\mu})\qquad (|\mathrm{Im}(s)|\longrightarrow\infty)$$

が成り立つ．次に β を $k-\beta>\nu+1$ にとると同様の理由で $\mathrm{Re}(s)=\beta$ 上でもまた，任意の $\mu>0$ に対し

$$\Lambda_N(s;\ f)=\Lambda_N(k-s;\ g)=O(|\mathrm{Im}(s)|^{-\mu})\qquad (|\mathrm{Im}(z)|\longrightarrow\infty)$$

が成り立つ．$\Lambda_N(s;\ f)+\dfrac{a_0}{s}+\dfrac{b_0}{k-s}$ は仮定により $\beta\leqq\mathrm{Re}(s)\leqq\alpha$ において有界であるから補題 4.3.3 により，任意の正数 μ に対して，

(4.3.16)　$|\mathrm{Im}(s)|\longrightarrow\infty$ とすると $\beta\leqq\mathrm{Re}(s)\leqq\alpha$ において一様に

$$\Lambda_N(s;\ f)=O(|\mathrm{Im}(s)|^{-\mu})$$

が成り立つ．仮定により $(\sqrt{N}y)^{-s}\Lambda_N(s;\ f)$ は $s=0$ および $s=k$ において各各留数が $-a_0$ および $(\sqrt{N}y)^{-k}b_0$ となる極を持つので，(4.3.16) により積分路を $\mathrm{Re}(s)=\alpha$ から $\mathrm{Re}(s)=\beta$ に変更すると

$$f(iy)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathrm{Re}(s)=\beta}(\sqrt{N}y)^{-s}\Lambda_N(s;\ f)ds+(\sqrt{N}y)^{-k}b_0$$

となるが，函数等式により

$$=\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathrm{Re}(s)=\beta}(\sqrt{N}y)^{-s}\Lambda_N(k-s;\ g)ds+(\sqrt{N}y)^{-k}b_0$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathrm{Re}(s)=k-\beta}(\sqrt{N}y)^{s-k}\Lambda_N(s;\ g)ds+(\sqrt{N}y)^{-k}b_0$$

$$=(\sqrt{N}y)^{-k}g\left(\frac{-1}{iNy}\right)$$

を得る．$f(z)$ および $g(z)$ は H 上の正則函数であるから，$f(z)=(\sqrt{N}z/i)^{-k}\cdot g(-1/Nz)$ が H 上のすべての点 z で成り立つ．$-1/z$ を改めて z とおくと $g(z)=(\sqrt{N}z/i)^{-k}f(-1/Nz)$ を得る． (証明終)

今，$k=\dfrac{1}{2}$, $N=4$, $f(z)=g(z)=\dfrac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}e^{2\pi i n^2 z}$ とすると，§ 3.2 で述べた Riemann の ζ 函数の函数等式は，この定理の A $\Longrightarrow$ (B) の特別な場合であることがわかる．上の定理において，k および N を正の整数としたものを，後の応用のために少し変形した形に述べておく．

定理 4.3.6 k, N は正の整数とする．H 上の函数 $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n e^{2\pi i n z}$ および $g(z)=\sum_{n=0}^{\infty}b_n e^{2\pi i n z}$ が (4.3.7) を満たすならば，次の (A) および (B) は同値である．

(A) $g(z)=(\sqrt{N}z)^{-k}f\left(\dfrac{-1}{Nz}\right)=(f|[\omega_N]_k)(z)$, ここで $\omega_N=\begin{bmatrix}0 & -1\\ N & 0\end{bmatrix}$ である．

(B) $\Lambda_N(s;\ f)$ および $\Lambda_N(s;\ g)$ は全 s 平面に解析接続され，函数等式

$$\Lambda_N(s;\ f)=i^k\Lambda_N(k-s;\ g)$$

を満たす．更に $\Lambda_N(s;\ f)+\dfrac{a_0}{s}+\dfrac{i^k b_0}{k-s}$ は任意の帯領域で有界な正則函数である．

$S_k(N, \chi)$ の元 $f(z)$ は (4.3.7) を満たすから，直ちに次の系を得る．

系 4.3.7　$f(z) \in S_k(N, \chi)$ ならば，$\Lambda_N(s;\ f)$ は全平面で正則で，函数等式

$$\Lambda_N(s;\ f) = i^k \Lambda_N(k-s;\ f|[\omega_N]_k)$$

を満たす．

系 4.3.7 の函数等式は，実は一般に $G_k(N, \chi)$ の元について成り立つのである．もし $f(z)$ が cusp 形式でなければ，$f(z)$ が (4.3.7) を満たすことは，一般の Fuchs 群 Γ に対しては知られていないので，定理 4.3.6 を用いることは出来ないが，$G_k(N, \chi)$ における $S_k(N, \chi)$ の補空間の元を §4.7 に見るように，Dirichlet の L 函数を用いて具体的に求めることが出来るので，$G_k(N, \chi)$ の任意の元 f についても上のような函数等式の成立がわかる．

さて $\Gamma(1) = SL_2(\boldsymbol{Z})$ は $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ と $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ によって生成されるから，$f(z)$ が $G_k(\Gamma(1))$ または $S_k(\Gamma(1))$ に属することは次のように特徴づけられる．

定理 4.3.8　k は偶数とする．(4.3.7) を満たす H 上の正則函数 $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{2\pi i n z}$ が $G_k(\Gamma(1))$ に属する必要十分条件は，$\Lambda(s;\ f) = (2\pi)^{-s}\Gamma(s) \cdot L(s;\ f)$ が全 s 平面に解析持続され，更に $\Lambda(s;\ f) + \dfrac{a_0}{s} + \dfrac{(-1)^{k/2} a_0}{k-s}$ は s の正則函数でかつ任意の垂直な帯領域で有界となり，函数等式

$$\Lambda(s;\ f) = (-1)^{k/2} \Lambda(k-s;\ f)$$

を満たすことである．もし $a_0 = 0$ ならば f は cusp 形式である．

$G_k(N, \chi)$ に関しては事情は複雑になる．一般に $\Gamma_0(N)$ は多くの生成元を持ち，その生成元をきちんと決めることは難しいからである．そこで Riemann の ζ 函数に対する Dirichlet の L 函数のように，(4.3.7) を満たす $f(z)$ と原始的な Dirichlet の指標 ψ に対して

$$f_\psi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \psi(n) e^{2\pi i n z}, \tag{4.3.17}$$

$$L(s;\ f, \psi) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \psi(n) n^{-s} \tag{4.3.18}$$

と定義する．$f_\psi(z)$ が再び (4.3.7) を満たすのは明らかである．次に $m = m_\psi$ を ψ の conductor とし

(4.3.19) $$\Lambda_N(s;\ f,\ \psi)=\left(\frac{m\sqrt{N}}{2\pi}\right)^s\Gamma(s)L(s;\ f,\ \psi)$$

と定義する．定義により

(4.3.20) $$L(s;\ f_\psi)=L(s;\ f,\ \psi),\qquad \Lambda_{Nm^2}(s;\ f_\psi)=\Lambda_N(s;\ f,\ \psi)$$

である．

補題 4.3.9 f および g は (4.3.7) を満たす H 上の函数とする．ψ は conductor が m である原始的な Dirichlet の指標とすると，次の (A_ψ) および (B_ψ) は同値である．

(A_ψ) $$f|[\omega_{Nm^2}]_k=C_\psi g_{\bar{\psi}}.$$

(B_ψ) $\Lambda_N(s,\ \psi,\ f)$ は s 平面上正則で任意の垂直な帯領域で有界な函数に解析接続され，函数等式

$$\Lambda_N(s;\ f,\ \psi)=i^kC_\psi\Lambda_N(k-s;\ g,\ \bar{\psi})$$

を満たす．

証明 (4.3.20) により，定理 4.3.6 における f, g, N として各々 f_ψ, $C_\psi g_{\bar{\psi}}$, Nm^2 をとればよい． (証明終)

実数 a に対して $\alpha(a)=\begin{bmatrix}1 & a\\ 0 & 1\end{bmatrix}$ とおく．

補題 4.3.10 (1) $f(z)$ は (4.3.7) を満たす函数とし，ψ は $m=m_\psi$ を conductor に持つ原始的な Dirichlet の指標とすると，任意の自然数 k に対して

$$f_\psi=W(\bar{\psi})^{-1}\sum_{u=1}^{m}\bar{\psi}(u)\left(f\left|\left[\alpha\left(\frac{u}{m}\right)\right]_k\right.\right)$$

が成り立つ．ここで，$W(\bar{\psi})$ は $\bar{\psi}$ の Gauss の和である．

(2) $f(z)\in G_k(N,\chi)$ とする．m_χ は χ の conductor で，M は N, m_ψ^2, $m_\psi m_\chi$ の最小公倍数とすると $f_\psi(z)\in G_k(M,\chi\psi^2)$ である．f が cusp 形式なら f_ψ も cusp 形式である．

証明 整数 u に対して

$$f\left|\left[\alpha\left(\frac{u}{m}\right)\right]_k\right.(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_ne^{2\pi iun/m}e^{2\pi inz}$$

であるから，補題 3.1.1（1）により

$$(4.3.21)\qquad \sum_{u=1}^{m}\bar{\psi}(u)\left(f\left|\left[\alpha\left(\frac{u}{m}\right)\right]_k\right.\right)(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\left[\sum_{u=1}^{m}\bar{\psi}(u)e^{2\pi i n/m}\right]a_n e^{2\pi i n z}$$
$$=W(\bar{\psi})f_\psi$$

となる．次に $f\in G_k(N,\chi)$ とすると，$\alpha\left(\frac{u}{m}\right)^{-1}\Gamma_0(N)\alpha\left(\frac{u}{m}\right)\supset\Gamma(Nm^2)$ であるから $f\left|\left[\alpha\left(\frac{u}{m}\right)\right]_k\right.$ は $G_k(\Gamma(Nm^2)$ の元となるので $f_\psi\in G_k(\Gamma(Nm^2))$ がわかる．このことから，（2）を示すには，$f_\psi|[\gamma]_k=(\chi\psi^2)(\gamma)f_\psi$ が $\Gamma_0(M)$ の任意の元 γ について成り立つことを示せばよい．$\gamma=\begin{bmatrix} a & b \\ cM & d \end{bmatrix}\in\Gamma_0(M)$ とし

$$\gamma'=\alpha\left(\frac{u}{m}\right)\gamma\alpha\left(\frac{d^2u}{m}\right)^{-1}$$

とおくと，$\gamma'\in\Gamma_0(M)\subset\Gamma_0(N)$ であり，$\gamma'=\begin{bmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{bmatrix}$ と書くと $d'=d-cd^2u\cdot M/m\equiv d\ (\mathrm{mod}\, m)$ であるから

$$f\left|\left[\alpha\left(\frac{u}{m}\right)\gamma\right]_k\right.=\chi(d)f\left|\left[\alpha\left(\frac{d^2u}{m}\right)\right]_k\right.$$

となる．両辺に $\bar{\psi}(u)$ を掛けて u に関して加えると (4.3.21) により

$$f_\psi|[\gamma]_k=\psi(d^2)\chi(d)f_\psi$$

を得る．cusp 形式についても全く同様である．　　(証明終)

定理 4.3.11　$f\in G_k(N,\chi)$ とし，ψ は原始的な Dirichlet の指標とする．ψ の conductor m が N と互いに素ならば

$$f_\psi|[\omega_{Nm^2}]_k=C_\psi g_{\bar{\psi}}$$

である．ここで $g=f|[\omega_N]_k$ であり，また $C_\psi=C_{N,\psi}=\chi(m)\psi(-N)\dfrac{W(\psi)}{W(\bar{\psi})}=\chi(m)\psi(N)W(\psi)^2/m$ である．

証明　m と互いに素である整数 u に対して，整数 n, v を $nm-Nuv=1$ にとると

$$(4.3.22)\qquad \alpha\left(\frac{u}{m}\right)\omega_{Nm^2}=(m\cdot 1)\omega_N\begin{bmatrix} m & -v \\ -uN & n \end{bmatrix}\alpha\left(\frac{v}{m}\right)$$

が成立する．補題 4.3.2 により $g=f|[\omega_N]_k$ は $G_k(N,\bar{\chi})$ の元であるから，

(4.3.22) の両辺を f に作用させると

$$f\left|\left[\alpha\left(\frac{u}{m}\right)\omega_{Nm^2}\right]_k = \chi(m)g\right|\left[\alpha\left(\frac{v}{m}\right)\right]_k$$

となるので

$$\begin{aligned} W(\bar{\psi})f_\psi|[\omega_{Nm^2}]_k &= \sum_u \bar{\psi}(u)f\left|\left[\alpha\left(\frac{u}{m}\right)\omega_{Nm^2}\right]_k\right. \\ &= \chi(m)\sum_v \psi(-Nv)g\left|\left[\alpha\left(\frac{v}{m}\right)\right]_k\right. \\ &= \chi(m)\psi(-N)\sum_v \psi(v)g\left|\left[\alpha\left(\frac{v}{m}\right)\right]_k\right. \\ &= \chi(m)\psi(-N)W(\psi)g_{\bar{\psi}} \end{aligned}$$

がわかる．cusp 形式についても同様である． (証明終)

この定理と系 4.3.7 および (4.3.18) により，次の定理を得る．

定理 4.3.12 $f(z)\in S_k(N,\chi)$ とする．ψ は原始的な Dirichlet の指標で，conductor m_ψ が N と互いに素であるようなものとすると，$\Lambda_N(s;\ f,\psi)$ は s 平面上正則でかつ任意の垂直な帯領域で有界な函数に解析接続され，函数等式

$$\Lambda_N(s;\ f,\psi) = i^k C_\psi \Lambda_N(k-s;\ f|[\omega_N]_k, \bar{\psi})$$

を満たす．ここで C_ψ は定理 4.3.10 と同じとする．

$N>0$ の場合に，上の定理の逆が成り立つことを示すのがこの節の目標である．$(m, vN)=1$ となる整数 m, v に対し，整数 n, u を $mn-uvN=1$ にとり

$$\gamma(m,v)=\begin{bmatrix} m & -v \\ -uN & n \end{bmatrix}\in\Gamma_0(N)$$

とおく．$\gamma(m,v)$ は m と v では一意的に決まるわけではないが，u は $\operatorname{mod} m$ では一意的であり，また

$$\alpha\left(\frac{u}{m}\right)\omega_{Nm^2} = (m\cdot 1)\omega_N\gamma(m,v)\alpha\left(\frac{v}{m}\right) \tag{4.3.23}$$

が成り立っている．次の補題を述べるために，$GL_2^+(\boldsymbol{R})$ の H 上の函数への作用を群環 $\boldsymbol{C}[GL_2^+(\boldsymbol{R})]$ にまで拡張して，$\beta=\sum_\alpha a_\alpha\alpha$ ($a_\alpha\in\boldsymbol{C}$, $\alpha\in GL_2^+(\boldsymbol{R})$) の H 上の函数 f への作用を

(4.3.24) $$f|[\beta]_k=\sum_{\alpha} a_\alpha f|[\alpha]_k$$

でもって定義する．次の2つの補題においては，k, N, f, g は定理 4.3.6 と同じで，更に f および g は定理 4.3.6 の (A) を満たす H 上の函数とする．

補題 4.3.13 m が4または奇素数であるときに，f, g が $\mathrm{mod}\,m$ のすべての原始的な指標 ψ に対して，補題 4.3.9 の (A_ψ) を定数 C_ψ として $C_\psi=\chi(m)\psi(-N)\dfrac{W(\psi)}{W(\bar\psi)}$ をとって満たすならば

$$g\Big|\Big[(\chi(m)-\gamma(m, u))\alpha\Big(\frac{u}{m}\Big)\Big]_k=g\Big|\Big[(\chi(m)-\gamma(m, v))\alpha\Big(\frac{v}{m}\Big)\Big]_k$$

が m と互いに素な任意の整数 u, v に対して成り立つ．

証明 仮定 (A_ψ) と補題 4.3.10 により

(4.3.25) $$\sum_u \bar\psi(u)\Big(f\Big|\Big[\alpha\Big(\frac{u}{m}\Big)\omega_{Nm^2}\Big]_k\Big)=\chi(m)\sum_u \psi(u)\Big(g\Big|\Big[\alpha\Big(\frac{u}{m}\Big)\Big]_k\Big)$$

である．各 u に対して，整数 v を $-uvN\equiv 1\ (\mathrm{mod}\,m)$ にとると，(4.3.23) により

(4.3.26) $$f\Big|\Big[\alpha\Big(\frac{u}{m}\Big)\omega_{Nm^2}\Big]_k=g\Big|\Big[\gamma(m, v)\alpha\Big(\frac{v}{m}\Big)\Big]_k$$

となるが，この左辺は $u\,(\mathrm{mod}\,m)$ の代表のとり方によらぬから，右辺は $\gamma(m, v)$ のとり方によらない．(4.3.25) は (4.3.26) を用いると

(4.3.27) $$\sum_v \psi(v)\Big(g\Big|\Big[(\chi(m)-\gamma(m, v))\alpha\Big(\frac{v}{m}\Big)\Big]_k\Big)=0$$

と変形される．ここで v は $\mathrm{mod}\,m$ の剰余類の代表系を動き，(4.3.27) は代表系のとり方によらずに成立する．そこで v_1, v_2 を m と互いに素な整数とし，(4.3.27) の両辺に $\bar\psi(v_1)-\bar\psi(v_2)$ を掛けて，$\mathrm{mod}\,m$ で定義されるすべての原始的な指標 ψ に関して和をとることにより

$$g\Big|\Big[(\chi(m)-\gamma(m, v_1))\alpha\Big(\frac{v_1}{m}\Big)\Big]_k=g\Big|\Big[(\chi(m)-\gamma(m, v_2))\alpha\Big(\frac{v_2}{m}\Big)\Big]_k$$

を得る． (証明終)

補題 4.3.14 m および n は4または奇素数とする．もし f および g が，補題 4.3.9 (A_ψ) を $\mathrm{mod}\,m$ および $\mathrm{mod}\,n$ で定義されるすべての原始的な

Dirichlet の指標 ψ に対して, $C_\psi=\chi(m_\psi)\psi(-N)\dfrac{W(\psi)}{W(\bar{\psi})}$ として満たすならば, $\gamma=\begin{bmatrix} m & -v \\ -uN & n \end{bmatrix}$ と書ける $\Gamma_0(N)$ の任意の元 γ に対して

$$g|[\gamma]_k=\bar{\chi}(\gamma)g$$

が成り立つ.

証明 $\gamma'=\begin{bmatrix} m & v \\ uN & n \end{bmatrix}$ とおく. 補題 4.3.13 において $u=-v$ とすると, $\gamma(m, v)$ および $\gamma(m, -v)$ として各々 γ と γ' をとることが出来るから

$$g\left|\left[(\chi(m)-\gamma')\alpha\left(\frac{-v}{m}\right)\right]_k=g\right|\left[(\chi(m)-\gamma)\alpha\left(\frac{v}{m}\right)\right]_k$$

となるので

$$g\left|\left[(\chi(m)-\gamma')\alpha\left(\frac{-2v}{m}\right)\right]_k=g\right|[\chi(m)-\gamma]_k \tag{4.3.28}$$

である. 同様に補題 4.3.13 における m として n をとったときに, $\gamma(n, v)$ および $\gamma(n, -v)$ として各々 $\gamma'^{-1}=\begin{bmatrix} n & -v \\ -uN & m \end{bmatrix}$ および $\gamma^{-1}=\begin{bmatrix} n & v \\ uN & m \end{bmatrix}$ がとれるから

$$g|[\chi(n)-\gamma'^{-1}]_k=g\left|\left[(\chi(-n)\gamma^{-1})\alpha\left(\frac{-2v}{n}\right)\right]_k\right. \tag{4.3.29}$$

が成り立つ. $\chi(n)\chi(m)=1$ であるから, $\boldsymbol{C}[GL_2^+(\boldsymbol{R})]$ の元として

$$\begin{aligned} &\chi(n)-\gamma'^{-1}=-\chi(n)(\chi(m)-\gamma')\gamma'^{-1}, \\ &(\chi(n)-\gamma^{-1})\alpha\left(\frac{-2v}{m}\right)=-\chi(n)(\chi(m)-\gamma)\gamma^{-1}\alpha\left(\frac{-2v}{m}\right) \end{aligned} \tag{4.3.30}$$

となるので, (4.3.30) を (4.3.29) に代入すると

$$g|[\chi(m)-\gamma']_k=g\left|\left[(\chi(m)-\gamma)\gamma^{-1}\alpha\left(\frac{-2v}{m}\right)\gamma'\right]_k\right. \tag{4.3.31}$$

が成り立つことがわかる. これと (4.3.28) により

$$g\left|\left[(\chi(m)-\gamma)\left(1-\gamma^{-1}\alpha\left(\frac{-2v}{m}\right)\gamma'\alpha\left(\frac{-2v}{m}\right)\right)\right]_k=0\right. \tag{4.3.32}$$

となる. さてここで $h=g|[\chi(m)-\gamma]_k=\chi(m)g-g|[\gamma]_k$ とおくと, h は H 上の正則函数で

$$(4.3.33)\quad h|[\beta]_k=h,\qquad \beta=\gamma^{-1}\alpha\left(\frac{-2v}{m}\right)\gamma'\alpha\left(\frac{-2v}{m}\right)=\begin{bmatrix} 1 & -\dfrac{2v}{m} \\ \dfrac{2uN}{n} & \dfrac{4}{mn}-3 \end{bmatrix}$$

なる変換式をもつ．$|\mathrm{tr}(\beta)|=\left|\dfrac{4}{mn}-2\right|<2$ であるから，β は楕円型であり，m, n のとり方から $|\mathrm{tr}(\beta)|\neq 0$, ± 1 であるので，β の固有値は1の巾根ではない*．$z_0(\in H)$ を β の固定点とし，$\rho=(z_0-\bar{z}_0)^{-1}\cdot\begin{bmatrix} 1 & -\bar{z}_0 \\ 1 & -z_0 \end{bmatrix}(\in SL_2(\boldsymbol{C}))$ とおく．$z\in K$ に対して $p(z)=(h|[\rho^{-1}]_k)(z)=j(\rho^{-1},z)^{-k}h(\rho^{-1}z)$ とおくと**，$p(z)$ は単位円盤 K 上の正則函数である．$\rho\beta\rho^{-1}=\begin{bmatrix} \zeta & 0 \\ 0 & \zeta^{-1} \end{bmatrix}$ と書けるから

$$(4.3.34)\qquad p(\zeta^2 z)=\zeta^{-k}p(z)$$

である．$p(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n z^n$ を $p(z)$ の0における Taylor 展開とすると，展開の一意性により $a_n\zeta^{2n}=\zeta^{-k}a_n$ となるが，$\zeta^{2n+k}\neq 1$ であるから $a_n=0$ がわかる．よって $h(z)=0$ となるので

$$g|[\gamma]_k=\bar{\chi}(\gamma)g$$

が示された．　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　(証明終)

いよいよ，この節の主定理を述べることが出来る．互いに素である自然数 a と b に対して $A(a,b)=\{a+nb\,|\,n\in\boldsymbol{Z}\}$ とおく．$\mathfrak{M}$ は4または奇素数からなる集合で条件

(i)　$\mathfrak{M}$ の元は N と互いに素である

(ii)　任意の $A(a,b)$ に対し $M\cap A(a,b)\neq\phi$ である

を満たすようなものとする．このような $\mathfrak{M}$ は必ず存在する．例えば $\mathfrak{M}$ として N と互いに素な奇素数全部をとれば，Dirichlet の算術級数の定理は，この

---

*　β の係数は有理数であるから，β の固有値は2次体の元である．よって β の固有値が1の巾根ならば ± 1, $\pm i$, $\pm e^{\pi i/3}$, $\pm e^{2\pi i/3}$ のいずれかであるから，$\mathrm{tr}(\beta)=0$, ± 1, ± 2 でなければならない．

**　以下において $SL_2(\boldsymbol{C})$ の元に対しても，H 上または K 上の函数 $f(z)$ に対して

$$(f|[\alpha]_k)_{(z)}=j(\alpha,z)^{-k}f(\alpha z)\qquad (\alpha\in SL_2(\boldsymbol{C}),\ z\in\alpha^{-1}H)$$

とおく．$\alpha,\beta\in SL_2(\boldsymbol{C})$ ならば

$$f|[\alpha\beta]_k=(f|[\alpha]_k)|[\beta]_k$$

が成り立つ．

$\mathfrak{M}$ が上の（i）および（ii）を満たすことを保証する.

定理 4.3.15 (**Weil**) k, N は自然数とし, χ は $\chi(-1)=(-1)^k$ となる $\bmod N$ で定義される Dirichlet の指標とする. $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ および $\{b_n\}_{n=0}^{\infty}$ を $a_n=O(n^\nu)$, $b_n=O(n^\nu)$ $(\nu>0)$ となる複素数の列とし, $z\in H$ に対し $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{2\pi inz}$, $g(z)=\sum_{n=0}^{\infty} b_n e^{2\pi inz}$ とおく. 次の（1）および（2）が満たされるならば, $f(z)\in G_k(N,\chi)$ 且つ $g(z)\in G_k(N,\bar{\chi})$ で更に $g=f|[\omega_N]_k$ が成り立つ.

（1） $\Lambda_N(s;\ f)$ および $\Lambda_N(s;\ g)$ は定理 4.3.6 (B) を満たす.

（2） ψ がその conductor m_ψ が $\mathfrak{M}$ に属するような, 任意の原始的な Dirichlet 指標ならば, $\Lambda_N(s;\ f,\psi)$ および $\Lambda_N(s;\ g,\bar{\psi})$ は, 補題 4.3.9 (B_ψ) を定数 C_ψ として

$$C_\psi=C_{N,\psi}=\chi(m_\psi)\psi(-N)\frac{W(\psi)}{W(\bar{\psi})}$$

をとることにより満足する.

更に $L(s;\ f)$ が或る正数 δ に対し $s=k-\delta$ で絶対収束するならば, f および g は cusp 形式である*.

証明 γ は $\Gamma_0(N)$ の任意の元とし $\gamma=\begin{bmatrix} a & b \\ c & Nd \end{bmatrix}$ とおく. もし, $c=0$ ならば $a=d=\pm 1$ であるから, $\chi(-1)=(-1)^k$ により $g|[\gamma]_k=\bar{\chi}(d)g=\bar{\chi}(\gamma)g$ である. 次に $c\neq 0$ とすると, $(a,cN)=(d,cN)=1$ であるから上の $\mathfrak{M}$ の条件（ii）により, 整数 s,t で $a+tCN\in\mathfrak{M}$, $d+scN\in\mathfrak{M}$ となるものがある. そこで

$$m=a+tcN,\quad n=d+scN,\quad u=-c,\quad v=-(b+sm+bstN+nt)$$

とおくと

$$\begin{bmatrix} a & b \\ cN & d \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & -t \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} m & -v \\ -uN & n \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -s \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

と書けるので, 補題 4.3.14 により

$$g|[\gamma]_k=\bar{\chi}(n)g=\bar{\chi}(d)g$$

---

* $a_0=b_0=0$ でも N が素数でなければ, f および g は cusp 形式とは限らない.

が成り立つ．よって任意の $\gamma\in\Gamma_0(N)$ に対し $g|[\gamma]_k=\bar{\chi}(\gamma)g$ が成り立つことが示された．補題 4.3.3 により $g(z)=O(y^{-1-\nu})$ であるから，定理 2.1.4 により $g(z)\in G_k(N,\bar{\chi})$ である．また $f=(-1)^k g|[\omega_N]_k$ であるから，(1) および補題 4.3.2 (2) により $f(z)\in G_k(N,\chi)$ であることもわかる．

次に $L(s;\ f)$ が $s=k-\delta$ $(\delta>0)$ で絶対収束するとする．$c_n=\sum_{m=1}^{n}|a_m|$ とおくと

$$c_n=\sum_{m=1}^{n}|a_m|\leqq n^{k-\delta}\Bigl(\sum_{m=1}^{\infty}|c_m|m^{-k+\delta}\Bigr)$$

であるから，$c_n=O(n^{k-\delta})$ を得る．よって補題 4.3.2 により $\sum_{n=0}^{\infty}|c_n|e^{-2\pi ny}$ は収束して $\sum_{n=0}^{\infty}|c_n|e^{-2\pi ny}=O(y^{-k+\delta-1})$ $(y\longrightarrow 0)$ である．$|a_n|=c_n-c_{n-1}$ であるから

$$|f(z)|\leqq(1-e^{-2\pi y})\Bigl(\sum_{n=0}^{\infty}c_n e^{-2\pi ny}\Bigr)$$

となり $f(z)=O(y^{-k+\delta})$ である．よって定理 2.1.4 の後半により f は cusp 形式である．　(証明終)

§4.4　$\varDelta(z)$ と $\eta(z)$

この節では，定理 4.1.6 (2) の証明を与える．即ち $\varDelta(z)$ が H 上には零点を持たないことを証明する．先ず H 上の函数 $\eta(z)$ を無限積でもって

$$\eta(z)=e^{\pi iz/12}\prod_{n=1}^{\infty}(1-e^{2\pi inz})$$

と定義する．$\sum_{n=1}^{\infty}e^{2\pi inz}$ は上半平面で広義一様に絶対収束するから，右辺の無限積は上半平面上で広義一様に絶対収束する．H 上の正則函数 $\eta(z)$ は Dedekind の **η 函数**と呼ばれる．

補題 4.4.1　$\eta(z)$ は次のような変換式を持つ．

$$\eta\Bigl(-\frac{1}{z}\Bigr)=\Bigl(\frac{z}{i}\Bigr)^{1/2}\eta(z)$$

ここで $(z/i)^{1/2}$ は，$-\pi/4<\arg(z/i)^{1/2}<\pi/4$ にとる．

証明　上半平面の正則函数の変換式を Dirichlet 級数の函数等式に帰着され

る Weil の証明 ([Weil 4]) を述べる．$\eta(z)$ は H 上に零点を持たないので，上の式は $\log\eta(z)$ が

$$\log\eta\left(-\frac{1}{z}\right)=\log\eta(z)+\frac{1}{2}\log\left(\frac{z}{i}\right) \tag{4.4.1}$$

を満たすと言うことと同値であるから，(4.4.1) を示そう．定義により

$$\log\eta(z)=\frac{\pi iz}{12}-\sum_{m,n=1}^{\infty}m^{-1}e^{2\pi imnz}$$

である．そこで $f(z)=\sum_{m,n=1}^{\infty}m^{-1}e^{2\pi imnz}=\frac{\pi iz}{12}-\log\eta(z)$ とおくと $f(z)$ は (4.3.7) を満たし，更に，

$$L(s;\ f)=\zeta(s)\zeta(s+1)$$

である．前節と同様に $\Lambda(s;\ f)=(2\pi)^{-s}\Gamma(s)L(s;\ f)$ および $\Lambda(s)=\pi^{-s/2}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\zeta(s)$ とおくと，$\Lambda(s;\ f)=\frac{1}{2}\Lambda(s)\Lambda(s+1)$ であるから $\Lambda(s;\ f)$ は全平面に解析接続されて，定理 3.2.1 により

$$\Lambda(s;\ f)-\frac{\pi}{12(s-1)}+\frac{\pi}{12(s+1)}+\frac{1}{2s^2} \tag{4.4.2}$$

は任意の垂直な帯領域で有界な正則函数で，函数等式 $\Lambda(s;\ f)=\Lambda(-s;\ f)$ を満たすことがわかる．更に

$$f(iy)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathrm{Re}(s)=2}y^{-s}\Lambda(s;\ f)ds$$

であるが，定理 4.3.5 の証明と同様の理由で，積分路を $\mathrm{Re}(s)=-2$ に変更出来る*．(4.4.2) が全平面で正則なことにより $y^{-s}\Lambda(s;\ f)$ は $s=1,0,-1$ において各々留数が $\frac{\pi}{12y}$，$\frac{1}{2}\log y$，$-\frac{\pi y}{12}$ となる極を持つので

$$\begin{aligned}&=\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathrm{Re}(s)=-2}y^{-s}\Lambda(s;\ f)ds+\frac{\pi}{12y}+\frac{1}{2}\log y-\frac{\pi y}{12}\\&=f\left(\frac{-1}{iy}\right)+\frac{\pi}{12y}-\frac{\pi y}{12}+\frac{1}{2}\log y\end{aligned}$$

となる．したがって虚軸上で

$$\log\eta\left(-\frac{1}{z}\right)=\log\eta(z)+\frac{1}{2}\log\left(\frac{z}{i}\right) \tag{4.4.3}$$

---

* 定理 3.2.1 では $\Lambda(s)+\frac{1}{s}+\frac{1}{1-s}$ が任意の帯領域で有界であることは証明しなかったが，定理 4.3.5 と同様に補題 4.3.4 を用いて示される．

を得るが，この両辺は H 上の正則函数であるから (4.4.3) の等号は H 上のすべての点で成り立つ．よって (4.4.1) が示された． (証明終)

さて $\eta^{24}(z)$ を考える．$\eta^{24}(z)=e^{2\pi iz}\prod_{n=1}^{\infty}(1-e^{2\pi inz})^{24}$ であるから

$$\eta^{24}(z+1)=\eta^{24}(z), \qquad \eta^{24}\left(-\frac{1}{z}\right)=z^{12}\eta^{24}(z) \tag{4.4.4}$$

が成り立っている．$\Gamma(1)$ は $\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{bmatrix}$ と $\begin{bmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{bmatrix}$ で生成されたから，(4.4.4)は

$$\eta^{24}(z)\in S_{12}(\Gamma(1))$$

を示す．$\dim S_{12}(\Gamma(1))=1$ であったので $\eta^{24}(z)=c\Delta(z)$ でなければならないが，$\eta^{24}(z)$ の ∞ における Fourier 展開の $e^{2\pi iz}$ の係数は 1 であるから，$c=1$ 即ち

$$\Delta(z)=\eta^{24}(z)$$

でなければならない．以上により次の定理を得る．

定理 4.4.2 $\Delta(z)$ は H では零点を持たない函数で

$$\Delta(z)=e^{2\pi iz}\prod_{n=1}^{\infty}(1-e^{2\pi inz})^{24}$$

と H 上で広義一様に収束する無限積に展開される．

$\Delta(z)$ および $\eta(z)$ は形が具体的に与えられているために，色々と調べるのに具合がいいことが多い．N が小さいときには，$\Delta(z)$ または $\eta(z)$ を用いて $S_k(\Gamma_0(N))$ および $S_k(\Gamma(N))$ の元を求めることが出来る．例えば ([志村] p. 49—p. 50)

1° $N=2, 3, 5, 11$ で，$k=24/(N+1)$ ならば，$S_k(\Gamma_0(N))$ は 1 次元で

$$(\Delta(z)\Delta(Nz))^{1/(N+1)}$$

で生成される．

2° $N=2, 3, 4, 6, 12$ で，$k=12/N$ ならば $S_k(\Gamma(N))$ は 1 次元で $\Delta(z)^{1/N}$ で生成される．

§4.5 modular 群の Hecke 環

modular 形式を研究する手段として Hecke 作用素は重要な役割を果たす．

modular 群の Hecke 環の構造を調べよう．

補題 4.5.1 $GL_2^+(\boldsymbol{R})$ の部分群として $\widetilde{\Gamma(1)}=\boldsymbol{R}^\times\cdot GL_2^+(\boldsymbol{Q})$ である．

証明 $\alpha\in GL_2^+(\boldsymbol{Q})$ とする．$c(\in\boldsymbol{Q}^\times)$ を適当にとり $\beta=c\alpha$ とおくと，$\beta\in M_2(\boldsymbol{Z})$ で $\alpha^{-1}\Gamma(1)\alpha=\beta^{-1}(1)\beta$ である．$\det(\beta)=m$ とおくと $m\cdot\beta^{-1}\in M_2(\boldsymbol{Z})$ であるから，$\gamma\in\Gamma(m)$ ならば

$$(m\cdot\beta^{-1})\gamma\beta\equiv(m\cdot\beta^{-1})\beta=\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} \qquad (\mathrm{mod}\, m)$$

となるので，$\beta^{-1}\gamma\beta\in M_2(\boldsymbol{Z})$ である．よって $\beta^{-1}\Gamma(m)\beta\subset\Gamma(1)$ であるから

$$\alpha\Gamma(1)\alpha^{-1}\cap\Gamma=\beta\Gamma(1)\beta^{-1}\cap\Gamma\supset\Gamma(m)$$

となるが，$[\Gamma(1):\Gamma(m)]<\infty$ であったから $\alpha\in\widetilde{\Gamma(1)}$ がわかる．逆に α は $\tilde{\Gamma}$ の元とし $\alpha=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ とおくと，$\Gamma(1)\approx\alpha\Gamma(1)\alpha^{-1}$ であるから，系 1.5.5 により $\alpha\Gamma(1)\alpha^{-1}$ の cusp $\alpha\infty=a/c$ および $\alpha 0=b/d$ は $\Gamma(1)$ の cusp でもある．次に $\beta\longmapsto {}^t\beta^{-1}$ は $GL_2^+(\boldsymbol{R})$ の自己同型であるから，$\Gamma(1)\approx{}^t\alpha^{-1}\Gamma(1)\,{}^t\alpha^{-1}$ となるので，同様の理由で ${}^t\alpha\infty=a/b$, ${}^t\alpha 0=c/d$ も $\Gamma(1)$ の cusp である．$\Gamma(1)$ の cusp は $\boldsymbol{Q}\cup\{\infty\}$ であるから，a, b, c, d の間の比は有理数である．よって $t\in\boldsymbol{R}^\times$ が存在して，$t\cdot\gamma\in GL_2^+(\boldsymbol{Q})$ となることがわかる．（証明終）

§4.3で述べたように modular形式を調べるのには，$G_k(N,\chi)$ の元を調べればよいから，$\Gamma_0(N)$ の Hecke 環を調べる．$\widetilde{\Gamma_0(N)}=\widetilde{\Gamma(1)}=\boldsymbol{R}^\times\cdot GL_2^+(\boldsymbol{Q})$ であるが，$R(\Gamma_0(N),\widetilde{\Gamma_0(N)})$ は大きすぎて構造が調べにくいので，$GL_2^+(\boldsymbol{Q})$ の部分半群 $\Delta_0(N)$ および $\Delta_0^*(N)$ を

$$\Delta_0(N)=\left\{\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\in M_2(\boldsymbol{Z})\;\middle|\; c\equiv 0 \quad (\mathrm{mod}\, N),\ (a,N)=1,\ ad-bc>0\right\},$$

$$\Delta_0^*(N)=\left\{\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\in M_2(\boldsymbol{Z})\;\middle|\; c\equiv 0 \quad (\mathrm{mod}\, N),\ (d,N)=1,\ ad-bc>0\right\}$$

と定義し，Hecke 環 $R(\Gamma_0(N),\Delta_0(N))$ および $R(\Gamma_0(N),\Delta_0^*(N))$ を考える．記号を簡略にするために

$$R(N)=R(\Gamma_0(N),\Delta_0(N)), \qquad R^*(N)=R(\Gamma_0(N),\Delta_0^*(N))$$

と書き表わすことにする．更に，level N が明らかのときには N を省略して

$$\Gamma_0=\Gamma_0(N), \qquad \varDelta_0=\varDelta_0(N), \qquad \varDelta_0^*=\varDelta_0^*(N)$$

とも書き表わすことにする．

補題 4.5.2　$\alpha\in\varDelta_0(N)$（または $\varDelta_0^*(N)$）とすると，自然数 l, m で $l|m$, 且つ $(l, N)=1$ なるものが存在して

$$\Gamma_0\alpha\Gamma_0=\Gamma_0\begin{bmatrix} l & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix}\Gamma_0 \qquad \left(\text{または } \Gamma_0\alpha\Gamma_0=\Gamma_0\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & l \end{bmatrix}\Gamma_0\right)$$

が成り立つ．自然数の組 (l, m) は上の条件の下に一意的に決まる*.

証明　$\boldsymbol{Z}$ 加群 L とその部分加群 L_0 を

$$L=\left\{\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}\middle|\, u,\ v\in\boldsymbol{Z}\right\}\supset L_0=\left\{\begin{bmatrix} u \\ vN \end{bmatrix}\middle|\, u,\ v\in\boldsymbol{Z}\right\}$$

と定義する．$M_2(\boldsymbol{Z})$ は左からの行列の乗法によって L に作用する．$\alpha\in\varDelta_0$ ならば $\alpha L_0\subset L_0$ は容易にわかる．$\det(\alpha)=n$ とおくと

$$[L:\alpha L_0]=[L:L_0][L_0:\alpha L_0]=nN$$

となるので abel 群の基本定理により，L の $\boldsymbol{Z}$ 上の基底 $\{w_1, w_2\}$ で

$$\alpha L_0=\boldsymbol{Z}(aw_1)+\boldsymbol{Z}(bw_2) \qquad (a|b,\ ab=nN,\ a,\ b>0)$$

となるものが存在する．$\alpha\in\varDelta_0$ であるから N の任意の約数 t に対して $\alpha L_0\not\supset tL$ である．故に $(a, N)=1$ であり，$N|b$ である．$l=a$, $m=b/N$ とおくと，$\boldsymbol{Z}w_1+\boldsymbol{Z}(Nw_2)$ は αL_0 を含む L の唯1つの指数 N の部分群であり，$\boldsymbol{Z}(lw_1)+\boldsymbol{Z}(mw_2)$ は αL_0 を含む L の唯1つの指数 n の部分群であるから

$$(4.5.1) \qquad L_0=\boldsymbol{Z}w_1+\boldsymbol{Z}(Nw_2), \qquad \alpha L=\boldsymbol{Z}(lw_1)+\boldsymbol{Z}(mw_2)$$

である．$\gamma_1, \gamma_2\in M_2(\boldsymbol{Z})$ を

$$\{w_1, w_2\}=\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}\gamma_1, \qquad \left\{\alpha\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \alpha\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}=\{lw_1, mw_2\}\gamma_2$$

でもって定義すると，$\alpha=\gamma_1\begin{bmatrix} l & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix}\gamma_2$ である．$\det(\gamma_1)=\det(\gamma_2)=\pm1$ である

---

*　$\alpha\in\varDelta_0(N)\cap\varDelta_0^*(N)$ ならば $\Gamma_0\begin{bmatrix} l & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix}\Gamma_0=\Gamma_0\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & l \end{bmatrix}\Gamma_0$ であることに注意する．

から，もし必要ならば w_2 を $-w_2$ ととり替えることによって $\det(\gamma_1)=\det(\gamma_2)=1$ に出来る．$w_1\in L_0$ であるから $\gamma_1\in\Gamma_0$ であり，$\alpha\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\in\alpha L_0$ であるから $\gamma_2\in\Gamma_0(N)$ である．(4.5.1) により $L/\alpha L\cong \boldsymbol{Z}/l\boldsymbol{Z}\times\boldsymbol{Z}/m\boldsymbol{Z}$ であるので，abel 群の基本的定理により l および m は一意的に決まるから $\alpha\in\Delta_0$ の場合に補題は示された．$\alpha\in\Delta_0^*$ の場合も同様である． (証明終)

定理 4.5.3 (1) $R(N)$ および $R^*(N)$ は可換である．

(2) $R(N)$ または $R^*(N)$ の元 $\Gamma_0\alpha\Gamma_0$ の左および右 Γ_0 剰余類は共通の代表系を持つ．

証明 $\alpha=\begin{bmatrix}a & b\\ cN & d\end{bmatrix}(\in\Delta_0)$ に対して，$\alpha'=\begin{bmatrix}a & c\\ bN & d\end{bmatrix}$ と定義する．定理を $R(N)$ について示すには，$\alpha\longmapsto\alpha'$ が定理 2.7.8 の 3 条件を満たすことを示せばよいが，(i) および (ii) は定義より明らかであり，(iii) は補題 4.5.2 により明らかである．$R^*(N)$ の元についても同様である． (証明終)

さて χ は $\bmod N$ で定義された Dirichlet の指標とする．$\Delta_0(N)$ の元に対して

$$\chi(\alpha)=\chi(a)^{-1}\qquad\left(\alpha=\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}\in\Delta_0(N)\right)$$

と定義する．χ を $\Gamma_0(N)$ に制限したものは，(4.3.2) でもって定義した $\Gamma_0(N)$ の指標 χ と一致している．言い換えると χ は (4.3.2) で定義した $\Gamma_0(N)$ の指標 χ を $\Delta_0(N)$ へ拡張したものである．Hecke 環 $R(N)$ を $G_k(N,\chi)$ に作用させるために，この χ が条件 (2.8.1) を満たしていることをみよう．即ち，Δ_0 の元 α に対して，$\Gamma_0\cap\alpha^{-1}\Gamma_0\alpha$ の元 γ をとり $\gamma=\alpha^{-1}\gamma'\alpha$ ($\gamma'\in\Gamma_0$) と表わすときに，$\chi(\gamma)=\chi(\gamma')$ となることを示す．補題 4.5.1 により $\alpha=\begin{bmatrix}l & 0\\ 0 & m\end{bmatrix}$ ($l|m$, $(l,N)=1$, $l,m>0$) と仮定して良い．$\gamma=\begin{bmatrix}a & b\\ cN & d\end{bmatrix}$ とおくと $b\equiv 0 \pmod{m/l}$ であり

$$\gamma'=\begin{bmatrix}a & bl/m\\ cNm/l & d\end{bmatrix}$$

であるから，$\chi(\gamma)=\chi(\gamma')$ を得る．よって定理 2.8.1 により，$R(N)$ の元

$\Gamma_0\alpha\Gamma_0$ を $\Gamma_0\alpha\Gamma=\coprod_\nu \Gamma_0\alpha_\nu$ と左 Γ_0 剰余類の和に書き表わすときに

$$(4.5.2)\qquad f|\Gamma_0\alpha\Gamma_0=\det(\alpha)^{k/2-1}\sum_\nu \chi(\alpha_\nu)^{-1}f|[\alpha_\nu]_k \qquad (f\in G_k(N,\chi))$$

と定義することにより，$R(N)$ は $G_k(N,\chi)$ および $S_k(N,\chi)$ に作用する．

次に $\Gamma_0(N)$ の指標 χ を $\Delta_0^*(N)$ にまで拡張しよう．Δ_0^* の元に対しては

$$\chi^*(\alpha)=\chi(d) \qquad \left(\alpha=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\in\Delta_0^*(N)\right)$$

と定義すると，χ^* は $\Gamma_0(N)$ の指標 χ を $\Delta_0^*(N)$ に拡張したもので，上と同様にして，この拡張も (2.8.1) を満たしていることがわかる．よって $R(N)$ の場合と同じように $\Gamma_0\alpha\Gamma_0\in R^*(N)$ ならば，$\Gamma_0\alpha\Gamma_0$ の左 Γ_0 剰余類の代表系 $\{\alpha_\nu\}$ でもって

$$(4.5.3)\qquad f|\Gamma_0\alpha\Gamma_0=\det(\alpha)^{k/2-1}\sum_\nu \chi^*(\alpha_\nu)^{-1}f|[\alpha_\nu]_k \qquad (f\in G_k(N,\chi))$$

と定義することにより，$R^*(N)$ は $G_k(N,\chi)$ および $S_k(N,\chi)$ に作用する*.

$R(N)$ の元 $T(n)$, $T(l,m)$ $(l|m,\ (l,N)=1)$ を

$$(4.5.4)\qquad \begin{aligned} T(n)&=\sum_{\det(\alpha)=n}\Gamma_0\alpha\Gamma_0 \\ T(l,m)&=\Gamma_0\begin{bmatrix} l & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix}\Gamma_0 \end{aligned}$$

と定義する．$T(n)$ の右辺は Δ_0 に含まれる両側剰余類 $\Gamma_0\alpha\Gamma_0$ で $\det(\alpha)=n$ となるものすべてにわたる和である．$R^*(N)$ についても同様に

$$(4.5.5)\qquad \begin{aligned} T^*(n)&=\sum_{\det(\alpha)=n}\Gamma_0\alpha\Gamma_0 \\ T^*(m,l)&=\Gamma_0\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & l \end{bmatrix}\Gamma_0 \qquad (l|m,\ (l,N)=1) \end{aligned}$$

と定義する．level N を特に明示する必要のあるときには

$$^NT(n),\quad {}^NT(l,m),\quad {}^NT^*(n),\quad {}^NT^*(m,l)$$

---

* $\alpha\in\Delta_0(N)\cap\Delta_0^*(N)$ ならば，$\Gamma_0\alpha\Gamma_0$ は $R(N)$ および $R^*(N)$ に含まれるが，一般の χ に対しては，(4.5.2) の右辺と (4.5.3) の右辺は異なることに注意する．即ち $\Gamma_0\alpha\Gamma_0$ を $R(N)$ の元と見る作用と，$R^*(N)$ の元と見る作用は違うのであるが，以下の議論では $R(N)$ の元と，$R^*(N)$ の元の区別は文中において明らかなので混乱はあるまい．

と N を左肩につけて表わす．さて補題 4.5.2 を用いると

$$(4.5.6)\qquad T(n)=\sum_{lm=n}T(l,\ m),\qquad T^*(n)=\sum_{lm=n}T^*(m,\ l)$$

であり，特に素数 p に対しては，

$$(4.5.7)\qquad T(p)=T(1,\ p),\qquad T^*(p)=T^*(p,\ 1)$$

となることがわかる．更に $(n,N)=1$ ならば $T(n,n)=\Gamma_0\begin{bmatrix} n & 0 \\ 0 & n\end{bmatrix}\Gamma_0=\Gamma_0\begin{bmatrix} n & 0 \\ 0 & n\end{bmatrix}$ であるから

$$(4.5.8)\qquad \begin{aligned} &T(n,\ n)\,T(l,\ m)=T(nl,\ nm),\\ &T^*(n,\ n)\,T^*(m,\ l)=T^*(nm,\ nl)\end{aligned}$$

となることも明らかである．

定理 4.5.4 （1） $f\in G_k(N,\chi)$ ならば

$$f|\,T^*(m,\ l)=\bar{\chi}(lm)(f|\,T(l,\ m))\qquad ((lm,\ N)=1),$$

$$f|\,T^*(n)\quad=\bar{\chi}(n)(f|\,T(n))\qquad ((n,\ N)=1).$$

（2） $S_k(N,\chi)$ 上の作用素として，$T(l,m)$ と $T^*(m,\ l)$, $T(n)$ と $T^*(n)$ は Petersson 内積に関して互いに随伴作用素である．

（3） $S_k(N,\chi)$ は $T(n)((n,\ N)=1)$, $T(l,\ m)((lm,\ N)=1)$ の同時固有函数からなる基底を持つ．

証明 （1） $\alpha\in\varDelta_0\cap\varDelta_0^*$ ならば $\chi^*(\alpha)=\chi(\det(\alpha))\chi(\alpha)$ である．$(lm,\ N)=1$ ならば補題 4.5.2 の後の注意により $\Gamma_0\begin{bmatrix} l & 0 \\ 0 & m\end{bmatrix}\Gamma_0=\Gamma_0\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & l\end{bmatrix}\Gamma_0$ であるから，$\Gamma_0\begin{bmatrix} l & 0 \\ 0 & m\end{bmatrix}\Gamma_0=\coprod_\nu \Gamma_0\alpha_\nu$ とおくと

$$\begin{aligned} f|\,T^*(m,\ l)&=(lm)^{k/2-1}\sum_\nu \chi^*(\alpha_\nu)^{-1}(f|[\alpha_\nu]_k)\\ &=\bar{\chi}(lm)(lm)^{k/2-1}(\sum_\nu \chi(\alpha_\nu)^{-1}(f|[\alpha_\nu]_k))\\ &=\bar{\chi}(lm)(f|\,T(l,\ m))\end{aligned}$$

である．これと (4.5.4) により $f|\,T^*(n)=\bar{\chi}(n)(f|\,T(n))$ が示される．（2）を示すために，$GL_2^+(\boldsymbol{R})$ の任意の元 $\alpha=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d\end{bmatrix}$ に対して

$$\alpha' = \det(\alpha) \cdot \alpha^{-1} = \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

とおくと，$\alpha \longmapsto \alpha'$ は Δ_0 から Δ_0^* への逆同型写像を与える．定理 4.5.2 (2) によって $\{\alpha_\nu\}$ を

$$(4.5.9) \qquad \Gamma_0 \begin{bmatrix} l & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} \Gamma_0 = \coprod_\nu \Gamma_0 \alpha_\nu = \coprod_\nu \alpha_\nu \Gamma_0$$

ととると $\Gamma_0 \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & l \end{bmatrix} \Gamma_0 = \coprod \Gamma_0 \alpha'_\nu$ である．$\chi(\alpha_\nu) = \chi^*(\alpha'_\nu)^{-1}$ であるから，T^* を $T(l, m)$ の Petersson 内積に関する随伴作用素とすると，定理 2.8.2 により $f \in S_k(N, \chi)$ に対して

$$(4.5.10) \qquad \begin{aligned} f | T^* &= (lm)^{k/2-1} \sum_\nu \chi(\alpha_\nu)(f | [\alpha'_\nu]_k) \\ &= (lm)^{k/2-1} \sum_\nu \chi^*(\alpha'_\nu)^{-1}(f | [\alpha'_\nu]_k) \\ &= f | T^*(m, l) \end{aligned}$$

となる．よって $T(l, m)$ と $T^*(m, l)$ は随伴作用素である．これと (4.5.5) および (4.5.6) により $T(n)$ と $T^*(n)$ が随伴作用素であることが示される．(1) により $(n, N) = 1$ ならば $T(n)$ と $T^*(n)$ は $S_k(N, \chi)$ 上の作用素として可換であり，$(lm, N) = 1$ ならば $T(l, m)$ と $T^*(m, l)$ は $S_k(N, \chi)$ 上の作用素として可換であるから $T(n)$ $((n, N) = 1)$ および $T(l, m)$ $((lm, N) = 1)$ は $S_k(N, \chi)$ 上の正規作用素である．$R(N)$ は可換であり，可換な正規作用素は同時対角化されるので (3) を得る．　(証明終)

さて $\omega_N = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ N & 0 \end{bmatrix}$ とおくと，補題 4.3.2 で見たように "$f \longmapsto f | [\omega_N]_k$" は $S_k(N, \chi)$ と $S_k(N, \bar{\chi})$ の間の同型を引き起こす．この同型と Hecke 作用素について，次の定理が成り立つ．

定理 4.5.5　次の図式は可換である．

$$\begin{array}{ccc} G_k(N, \chi) & \xrightarrow{T(n)(T(l, m))} & G_k(N, \chi) \\ \downarrow{\scriptstyle [\omega_N]_k} & & \downarrow{\scriptstyle [\omega_N]_k} \\ G_k(N, \bar{\chi}) & \xrightarrow{T^*(n)(T^*(m, l))} & G_k(N, \bar{\chi}) \end{array}$$

証明 $T(l,\ m)$ についてのみ示せば十分である．先ず簡単な行列の計算により $\alpha \longmapsto \omega_N^{-1}\alpha\omega_N$ によって $\varDelta_0 \cong \varDelta_0^*$ であり，更に $\omega_N^{-1}\Gamma_0\omega_N=\Gamma_0$ が成り立ち，$\varDelta_0$ の任意の元 α に対して

$$\chi^*(\omega_N^{-1}\alpha\omega_N)=\chi(\alpha)^{-1}$$

であることがわかる．さて $\Gamma_0\begin{bmatrix} l & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix}\Gamma_0=\coprod_\nu \Gamma_0\alpha_\nu$ であるとすると，$\Gamma_0\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & l \end{bmatrix}\Gamma_0=\coprod_\nu \Gamma_0(\omega_N^{-1}\alpha_\nu\omega_N)$ であるから，f が $G_k(N,\ \bar{\chi})$ の元ならば

$$\begin{aligned} & f|[\omega_N]_k^{-1}T(l,\ m)[\omega_N]_k \\ &=(lm)^{k/2-1}\sum_\nu \chi(\alpha_\nu)^{-1}f|[\omega_N^{-1}\alpha_\nu\omega_N]_k \\ &=(lm)^{k/2-1}\sum_\nu \bar{\chi}^*(\omega_N^{-1}\alpha_\nu\omega_N)^{-1}f|[\omega_N^{-1}\alpha_\nu\omega_N]_k \\ &=f|T^*(m,\ l) \end{aligned}$$

となり，定理が示された． （証明終）

次に $R(N)$ の構造を詳しく調べよう．

補題 4.5.6 $\Gamma_0=\Gamma_0(N)$ とすると，素数 p に対して次の（1）（2）が成り立つ．$e(\geqq 0)$ は整数である．

（1） $\Gamma_0\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & p^e \end{bmatrix}\Gamma_0$ の左 Γ_0 剰余類の代表系として次のものがとれる．

$$\begin{cases} p\nmid N \text{ ならば } \begin{bmatrix} p^{e-f} & m \\ 0 & p^f \end{bmatrix} & \left(\begin{array}{l} 0\leqq f\leqq e \text{ で，} m \text{ は } \boldsymbol{Z}/p^f\boldsymbol{Z} \text{ の代表系で} \\ (m,\ p^f,\ p^{e-f})=1 \text{ なるものを動く} \end{array}\right) \\ p|N \text{ ならば } \begin{bmatrix} 1 & m \\ 0 & p^e \end{bmatrix} & (m \text{ は } \boldsymbol{Z}/p^e\boldsymbol{Z} \text{ の代表系を動く}) \end{cases}$$

（2） $$\deg\left(\Gamma_0\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & p^e \end{bmatrix}\Gamma_0\right)=\begin{cases} p^e+p^{e-1} & (p\nmid N) \\ p^e & (p|N) \end{cases}$$

証明 $\Gamma_0\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & p^e \end{bmatrix}\Gamma_0$ に含まれる任意の元 $\beta=\begin{bmatrix} a & b \\ cN & d \end{bmatrix}$ に対して Γ_0 の元 γ が存在して $\gamma\beta=\begin{bmatrix} p^{e-f} & m \\ 0 & p^f \end{bmatrix}$，$(0\leqq m<p^f)$ となることを示そう．$\det(\beta)=p^e$ であるから a と cN の最大公約数 $(a,\ cN)$ は p の巾である．よってもし

$p|N$ ならば，$\varDelta_0$ の定義により $(a, N)=1$ であるから，$(a, cN)=1$ となる．従って Γ_0 の元 γ_1 で

$$\gamma_1=\begin{bmatrix} * & * \\ -cN & a \end{bmatrix}$$

となるものがある．γ_1 のとり方より $\gamma_1\beta=\begin{bmatrix} 1 & n \\ 0 & p^e \end{bmatrix}$ である．さて l および m を $n=lp^e+m$ $(0\leqq m<p^e)$ にとり $\gamma_2=\begin{bmatrix} 1 & -l \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\in\Gamma_0$ とおくと

$$\gamma_2\gamma_1\beta=\begin{bmatrix} 1 & m \\ 0 & p^e \end{bmatrix}$$

となる．次に，もし $p\nmid N$ ならば $a'=a/(a, cN)$ および $c'=c/(a, cN)$ とおく．$(a, N)=1$ であったから c' は整数で，$(a', c'N)=1$ だから Γ_0 の元 γ_1 で $\gamma_1=\begin{bmatrix} * & * \\ -c'N & a' \end{bmatrix}$ となるものが存在し $\gamma_1\beta=\begin{bmatrix} p^{e-f} & n \\ 0 & p^f \end{bmatrix}$ である．更に上と同様に，Γ_0 の元 γ_2 を

$$\gamma_2\gamma_1\beta=\begin{bmatrix} p^{e-f} & m \\ 0 & p^f \end{bmatrix}\qquad(0\leqq m<p^f)$$

であるようにとれる．以上により

$$(4.5.11)\qquad \Gamma_0\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & p^e \end{bmatrix}\Gamma_0\subset\begin{cases} \displaystyle\bigcup_{m=0}^{p^e-1}\Gamma_0\begin{bmatrix} 1 & m \\ 0 & p^e \end{bmatrix} & (p|N) \\ \displaystyle\bigcup_{f=0}^{e}\bigcup_{m=0}^{p^f-1}\Gamma_0\begin{bmatrix} p^{e-f} & m \\ 0 & p^f \end{bmatrix} & (p\nmid N) \end{cases}$$

がわかった．次に(4.5.11)の右辺が直和であることを見るために $\Gamma_0\begin{bmatrix} p^{e-f} & m \\ 0 & p^f \end{bmatrix}\cap\Gamma_0\begin{bmatrix} p^{e-g} & n \\ 0 & p^g \end{bmatrix}\neq\phi$ と仮定すると，Γ_0 の元 γ であって

$$(4.5.12)\qquad \gamma\begin{bmatrix} p^{e-f} & m \\ 0 & p^f \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} p^{e-g} & n \\ 0 & p^g \end{bmatrix}$$

なるものが存在する．(4.5.12) から γ は $\begin{bmatrix} 1 & l \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ の形であることがわかり，

これより直ちに $f=g$ で且つ $m=n$ であることがわかる．よって (4.5.11) の右辺の和は，直和である．

さて $p|N$ ならば $\begin{bmatrix}1 & m\\ 0 & p^e\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & p^e\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & m\\ 0 & 1\end{bmatrix}\in\Gamma_0\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & p^e\end{bmatrix}\Gamma_0$ であるから，(4.5.11) の $\subset$ は実は等号で

$$\Gamma_0\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & p^e\end{bmatrix}\Gamma_0=\coprod_{m=0}^{p^e-1}\Gamma_0\begin{bmatrix}1 & m\\ 0 & p^e\end{bmatrix}\qquad(p|N)$$

となることがわかった．すなわち（1）が $p|N$ のときに示された．最後に $p\nmid N$ の場合に，$\alpha=\begin{bmatrix}p^{e-f} & m\\ 0 & p^f\end{bmatrix}$ が $\Gamma_0\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & p^e\end{bmatrix}\Gamma_0$ に含まれる条件を求めよう．補題 4.5.2 を $\Gamma_0\alpha\Gamma_0$ に適用すると，整数 a, b $(0\leqq a\leqq b,\ a+b=e)$ が存在して $\Gamma_0\alpha\Gamma_0=\Gamma_0\begin{bmatrix}p^a & 0\\ 0 & p^b\end{bmatrix}\Gamma_0$ となる．$\beta=\begin{bmatrix}p^a & 0\\ 0 & p^b\end{bmatrix}$ とし，$L=\left\{\begin{bmatrix}u\\ v\end{bmatrix}\middle|\,u,\ v\in\boldsymbol{Z}\right\}$ とおくと，Γ_0 の元は L の自己同型を引き起こすから

$$L/\alpha L\cong L/\beta L\cong\boldsymbol{Z}/p^a\boldsymbol{Z}\times\boldsymbol{Z}/p^b\boldsymbol{Z}$$

となるので $\Gamma_0\alpha\Gamma_0=\Gamma_0\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & p^e\end{bmatrix}\Gamma_0$ となる必要十分条件は $\alpha L\not\supset pL$ である．この条件は $(p^f,\ p^{e-f},\ m)=1$ に外ならない．よって（1）を得る．（2）は（1）の剰余類の個数を数えればよい．　（証明終）

補題 4.5.7　e は自然数とすると，素数 p に対して，$R(N)$ の元として次の関係式が成り立つ．

（1）　$T(p)\,T(1,\ p^e)=T(1,\ p^{e+1})$

$$+\begin{cases}(p+1)\,T(p,\ p) & (p\nmid N\ \text{で且つ}\ e=1)\\ p\,T(p,\ p)\,T(1,\ p^{e-1}) & (p\nmid N\ \text{で且つ}\ e>1)\\ 0 & (p|N).\end{cases}$$

（2）　$T(p)\,T(p^e)=\begin{cases}T(p^{e+1})+p\,T(p,\ p)\,T(p^{e-1}) & (p\nmid N)\\ T(p^{e+1}) & (p|N).\end{cases}$

証明　$T(p)\,T(1,\ p^e)$ の1つの成分を $T=\Gamma_0\alpha\Gamma_0$ とする．Hecke 環における積の定義から

$$\alpha=\alpha_1\alpha_2\qquad(\alpha_1\in T(p),\quad\alpha_2\in T(1,\ p^e))$$

と書ける．さて $L=\left\{\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} \middle| u,\ v\in \boldsymbol{Z}\right\}$とすると，$[L:\alpha L]=p^{e+1}$ であり，更に

$$L/\alpha L\supset\alpha_1 L/\alpha L\cong L/\alpha_2 L\cong \boldsymbol{Z}/p^e\boldsymbol{Z}$$

となるので，T は $T(1,\ p^{e+1})$ または $T(p,\ p^e)$ のいずれかでなければならぬ．よって

$$T(p)\,T(1,\ p^e)=\begin{cases} aT(1,\ p^{e+1})+b\,T(p,\ p^e) & (p\nmid N) \\ a'\,T(1,\ p^{e+1}) & (p\mid N) \end{cases}$$

と書ける．この整数 $a,\ b,\ a'$ を定めればよいが補題 4.5.6（1）と積の定義により$a=a'=1$ であり，補題 4.5.6（2）と (4.5.7) を用いて両辺の次数を比べることにより

$$b=\begin{cases} p+1 & (e=1) \\ p & (e>1) \end{cases}$$

を得る．次に（2）を示そう．もし $p\mid N$ ならば $T(p^e)=T(1,\ p^e)$ であるから（1）の書き替えにすぎない．$p\nmid N$ の場合には，e に関する帰納法を用いる．先ず $e=1$ とすると，$T(p)=T(1,\ p)$ だから（1）を用いると

$$T(p)\,T(p)=T(1,\ p^2)+(p+1)\,T(p,\ p)=T(p^2)+p\,T(p,\ p)$$

となる．次に $e\geqq 2$ とし $e-1$ 以下については，（2）が成り立つものと仮定する．(4.5.6) と (4.5.8) に $T(p^e)$ に適用すると，

$$T(p)\,T(p^e)=T(p)\,(\,T(1,\ p^e)+T(p,\ p)\,T(p^{e-2}))$$

であるから，（1）により

$$=T(1,p^{e+1})+p\,T(p,p)\,T(1,p^{e-1})+T(p,p)\,T(p)\,T(p^{e-2})$$

となる．便宜上 $e<0$ に対しては $T(p^e)=0$ とおくと，帰納法の仮定により

$$=T(1,p^{e+1})+p\,T(p,p)\,T(1,p^{e-1})+T(p,p)\,(\,T(p^{e-1})+p\,T(p,p)\,T(p^{e-3}))$$

$$=T(1,p^{e+1})+T(p,p)\,T(p^{e-1})+p\,T(p,p)\,(\,T(1,p^{e-1})+T(p,p)\,T(p^{e-3}))$$

$$=T(p^{e+1})+p\,T(p,p)\,T(p^{e-1})$$

となり，（2）が示された． （証明終）

補題 4.5.8 （1） $(lm,\ l'm')=1$ とすると，$T(l,\ m)\,T(l',\ m')=T(ll',\ mm')$ が成り立つ．

（2） $(n, m)=1$ ならば，$T(n)T(m)=T(nm)$ が成り立つ．

証明 $T(l, m)T(l', m')$ の成分の 1 つを $T=\Gamma_0\alpha\Gamma_0$ とすると，α は $\alpha=\alpha_1\alpha_2$ $(\alpha_1\in T(l, m),\ \alpha_2\in T(l', m'))$ と書ける．補題 4.5.7 と同様に $L=\left\{\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} \middle| u, v\in \boldsymbol{Z}\right\}$ とおくと，

$$L/\alpha_1 L\cong \boldsymbol{Z}/l\boldsymbol{Z}\times\boldsymbol{Z}/m\boldsymbol{Z}, \qquad \alpha_1 L/\alpha L\cong L/\alpha_2 L\cong \boldsymbol{Z}/l'\boldsymbol{Z}\times\boldsymbol{Z}/m'\boldsymbol{Z}$$

であるが，$(lm, l'm')=1$ であるから $L/\alpha L\cong \boldsymbol{Z}/ll'\boldsymbol{Z}\times\boldsymbol{Z}/mm'\boldsymbol{Z}$ がわかる．よって $T=T(ll', mm')$ である．$T(l, m)T(l', m')=aT(ll', mm')$ とおき $a=1$ を示そう．Hecke 環の積の定義により $\alpha=\begin{bmatrix} ll' & 0 \\ 0 & mm' \end{bmatrix}$ とおき，更に $\Gamma_0\begin{bmatrix} l & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix}\Gamma_0=\coprod_\mu \Gamma_0\alpha_\mu$, $\Gamma_0\begin{bmatrix} l' & 0 \\ 0 & m' \end{bmatrix}\Gamma_0=\coprod_\nu \Gamma_0\beta_\nu$ としたときに $\Gamma_0\alpha=\Gamma_0\alpha_\mu\beta_\nu$ となる (μ, ν) の組は，唯 1 つであることを示せばよい．便宜上，代表系 $\{\alpha_\mu\}$ および $\{\beta_\nu\}$ を

$$\alpha_1=\begin{bmatrix} l & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix}, \qquad \beta_1=\begin{bmatrix} l' & 0 \\ 0 & m' \end{bmatrix}$$

となるようにとる．さて $\Gamma_0\alpha=\Gamma_0\alpha_\mu\alpha_\nu$ と仮定し，Γ_0 の元 γ を $\alpha=\gamma\alpha_\mu\beta_\nu$ であるようにとる．次に自由 $\boldsymbol{Z}$ 加群 M およびその部分加群 M_0 を

$$M=\{[u, v]\,|\,u, v\in\boldsymbol{Z}\}\supset M_0=\{[Nu, v]\,|\,u, v\in\boldsymbol{Z}\}$$

と定義し，$M_2(\boldsymbol{Z})$ の元を右からの行列の乗法で M に作用させる．準同型定理により

$$M\beta_1+M\beta_\nu/M\beta_1\cong M\beta_\nu/M\beta_1\cap M\beta_\nu$$

である．左辺は $M/M\beta_1$ の部分群だから，その位数は $\det(\beta_1)=l'm'$ の約数であり，右辺は $M\beta_\nu/M\alpha$ の剰余群であるので，その位数は $\det(\alpha)=lm$ の約数である．lm と $l'm'$ は互いに素なので，$M\beta_1=M\beta_\nu$ でなければならない．故に $GL_2(\boldsymbol{Z})$ の元 γ_1 が存在して $\gamma_1\beta_1=\beta_\nu$ となる．$\det(\beta_1)=\det(\beta_\nu)$ であるから $\gamma_1\in SL_2(\boldsymbol{Z})$ がわかる．次に M のかわりに M_0 をとっても，全く同様に $M_0\beta_1=M_0\beta_\nu$ が成り立つから $M_0\gamma_1=M_0$，即ち $\gamma_1\in\Gamma_0$ である．$\{\beta_\nu\}$ は左 Γ_0 剰余類の代表系だから $\gamma_1=1$ で $\beta_\nu=\beta_1$ である．故に $\alpha_1=\gamma\alpha_\mu$ であるが，同様の理由により $\gamma=1$ で $\alpha_\nu=\alpha_1$ となり，従って（1）が示された．（2）

は（1）により明らかである．　(証明終)

定理 4.5.9　Hecke 環 $R(N)$ は $T(p)$, $T(p,\ p)$ (p は $p\nmid N$ なる素数を動く）および $T(q)$ (q は N を割る素数を動く）で生成される $\boldsymbol{Z}$ 上の多項式環である．即ち

$$R(N)=\boldsymbol{Z}[T(p),\ T(p,\ p),\ T(q) \mid\ p\nmid N,\ q\mid N]$$

となる．

証明　定理 4.5.3, 補題 4.5.7 および補題 4.5.8 により，$R(N)$ は可換で $R(N)$ の任意の元が $T(p)$, $T(p,\ p)$, $T(q)$ の $\boldsymbol{Z}$ 係数の多項式で表わされることがわかる．よって $T(p)$, $T(p,\ p)$, $T(q)$ が有理数体上代数的に独立であることを示せばよいが，これも補題 4.5.7 および補題 4.5.8 の関係式により容易に示される．　(証明終)

補題 4.5.8 により，自数数 l と m を $l|m$ で且つ $(l,\ N)=1$ にとる．$l/m=\prod p^e$ と l/m を素因数分解すると

$$T(l,\ m)=T(l,\ l)\,T(1,\ m/l)=T(l,\ l)\prod_p T(1,\ p^e)$$

であるから，補題 4.5.6 を用いると

$$T(l,\ m)=\coprod \Gamma_0\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & d \end{bmatrix} \qquad (ad=lm,\ (a,\ b,\ d)=l,\ 0\leqq b<d)$$

であることがわかる．よって，$T(l,\ m)$, $T(n)$ の作用は具体的に書き表わされる．特に $T(l,\ l)$ と $T(n)$ の作用は，$f\in G_k(N,\ \chi)$ とすると

$$(4.5.13) \qquad (f\mid T(n))(z)=n^{k-1}\sum_{\substack{d\mid n\\ d>0\\ ad=n}}\sum_{b=0}^{d-1}\chi(a)d^{-k}f\left(\frac{az+b}{d}\right),$$

$$(4.5.14) \qquad (f\mid T(l,\ l))(z)=l^{k-2}\chi(l)f(z), \qquad (l,\ N)=1$$

となる*．また，この式から level の違う modular 群の Hecke 作用素の関係が次のようにわかる．

定理 4.5.10　M は N の倍数であるとする．自然数 n の素因子は N を割り切るか，或いは M を割り切らないかのどちらかであるならば

---

*　$(a, N)\neq 1$ ならば定義により $\chi(a)=0$ である．

$$\begin{array}{ccc} G_k(N,\chi) & \xrightarrow{{}^NT(n)({}^NT^*(n))} & G_k(N,\chi) \\ \downarrow & & \downarrow \\ G_k(M,\chi) & \xrightarrow{{}^MT(n)({}^MT^*(n))} & G_k(M,\chi) \end{array}$$

が成り立つ．ここで χ は $\mathrm{mod}\,N$ の指標で，垂直の矢印は自然な埋め込み((4.3.3) 参照)である．

さて次に level の違う modular 群の間の Hecke 作用素を，次節のために調べておく．χ は $\mathrm{mod}\,N$ の指標とする．M は N の倍数とし，$\alpha\in\Delta_0(N)$ とすると

$$\Gamma_0(M)\alpha\Gamma_0(N)\subset\Delta_0(N)$$

であるから，$f\in G_k(M,\chi)$ に $R(\Gamma_0(M),\Gamma_0(N);\Delta_0(N))$ の元 $\Gamma_0(M)\alpha\Gamma_0(N)$ を作用させることが出来て

$$f|\Gamma_0(M)\alpha\Gamma_0(N)\in G_k(N,\chi)$$

である(補題 2.7.2 参照)．$\Gamma_0(M)\alpha\Gamma_0(N)$ に関する次の補題は §4.6 で用いる．

補題 4.5.11 自然数 N と素数 p に対して

$$\Gamma_0(pN)\begin{bmatrix}1&0\\0&p\end{bmatrix}\Gamma_0(N)=\begin{cases}\displaystyle\coprod_{\nu=0}^{p-1}\Gamma_0(pN)\begin{bmatrix}1&0\\0&p\end{bmatrix}\gamma_\nu & (p|N)\\[2ex] \displaystyle\coprod_{\nu=0}^{p}\Gamma_0(pN)\begin{bmatrix}1&0\\0&p\end{bmatrix}\gamma_\nu & (p\nmid N)\end{cases}$$

である．ここで γ_ν は $0\leqq\nu\leqq p-1$ ならば $\gamma_\nu\equiv\begin{bmatrix}1&\nu\\0&1\end{bmatrix}\pmod p$ となる $\Gamma_0(N)$ の任意の元であり，$p\nmid N$ のときの γ_p は

$$\gamma_p\equiv\begin{cases}\begin{bmatrix}0&-a\\a^{-1}&0\end{bmatrix}\pmod p & \left(\begin{array}{l}a\text{ は }(a,p)=1\text{ となる任意の整数}\\\text{を 1 つ固定する}\end{array}\right)\\[2ex] \begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}\pmod N\end{cases}$$

となる $\Gamma_0(N)$ の任意の元である*.

証明 $\{\gamma\}$ が$\left\{\Gamma_0(N)\cap\begin{bmatrix}1&0\\0&p\end{bmatrix}^{-1}\Gamma_0(pN)\begin{bmatrix}1&0\\0&p\end{bmatrix}\right\}\backslash\Gamma_0(N)$ の代表系ならば，補

---

* p と素な整数 a, b に対し $a\equiv b^{-1}\pmod p$ とは，$ab\equiv1\pmod p$ を意味する．

題 2.7.1（4）により

$$\Gamma_0(pN)\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & p\end{bmatrix}\Gamma_0(N)=\coprod_{\gamma}\Gamma_0(pN)\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & p\end{bmatrix}\gamma$$

となる．そこで

$$(4.5.15)\qquad \Gamma'=\Gamma_0(N)\cap\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & p\end{bmatrix}^{-1}\Gamma_0(pN)\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & p\end{bmatrix}$$
$$=\left\{\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}\in\Gamma_0(N)\,|\,b\equiv 0\pmod p\right\}$$

とおき $\Gamma'\backslash\Gamma_0(N)$ を調べる．先ず $p\nmid N$ と仮定する．$\Gamma_0(N)\supset\Gamma'\supset\Gamma(pN)$ であるから，λ を $\Gamma(1)$ から $SL_2(\boldsymbol{Z}/pN\boldsymbol{Z})$ への自然な写像とすると $\Gamma'\backslash\Gamma_0(N)$ と $\lambda(\Gamma')\backslash\lambda(\Gamma_0(N))$ は1対1に対応している．p は N と素であるから $SL_2(\boldsymbol{Z}/pN\boldsymbol{Z})\cong SL_2(\boldsymbol{Z}/p\boldsymbol{Z})\times SL_2(\boldsymbol{Z}/N\boldsymbol{Z})$ となるので，λ_p, λ_N を各々 $SL_2(\boldsymbol{Z})$ から $SL_2(\boldsymbol{Z}/p\boldsymbol{Z})$ および $SL_2(\boldsymbol{Z}/N\boldsymbol{Z})$ への自然な写像とすると，上の同型によって $\lambda(\Gamma')$ と $\lambda_p(\Gamma')\times\lambda_N(\Gamma')$，$\lambda(\Gamma_0(N))$ と $\lambda_p(\Gamma_0(N))\times\lambda_N(\Gamma_0(N))$ は対応している．従って集合 $\Gamma'\backslash\Gamma_0(N)$ は，集合

$$\lambda_p(\Gamma')\backslash\lambda_p(\Gamma_0(N))\times\lambda_N(\Gamma')\backslash\lambda_N(\Gamma_0(N))$$

と1対1に対応する．さて $\lambda_N(\Gamma')=\lambda_N(\Gamma_0(N))$ であることは容易にわかるから，$\Gamma'\backslash\Gamma_0(N)$ は更に $\lambda_p(\Gamma')\backslash\lambda_p(\Gamma_0(N))$ と λ_p により1対1に対応する．更に

$$\lambda_p(\Gamma_0(N))=SL_2(\boldsymbol{Z}/p\boldsymbol{Z}),$$
$$\lambda_p(\Gamma')=\left\{\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}\in SL_2(\boldsymbol{Z}/p\boldsymbol{Z})\,|\,b\equiv 0\pmod p\right\}$$

であるから，$\alpha_\nu\in\lambda_p(\Gamma_0(N))$ を

$$\alpha_\nu=\begin{bmatrix}1 & \bar{\nu}\\ 0 & 1\end{bmatrix}\ (0\leqq\nu\leqq p-1),\qquad \alpha_p=\begin{bmatrix}0 & -\bar{a}\\ \bar{a}^{-1} & 0\end{bmatrix}\ (\bar{a}\in(\boldsymbol{Z}/p\boldsymbol{Z})^\times)$$

ととると（ここで $\bar{\nu}=\nu\pmod p$ で，$\bar{a}$ は $(\boldsymbol{Z}/p\boldsymbol{Z})^\times$ の任意の元である），

$$\lambda_p(\Gamma')\backslash\lambda_p(\Gamma_0(N))=\coprod_{\nu=1}^{p}\lambda_p(\Gamma')\alpha_\nu$$

が成り立つ．補題の γ_ν は $\lambda_p(\gamma_\nu)=\alpha_\nu$ となる元だから，上の1対1対応から

$$\Gamma'\backslash\Gamma_0(N)=\coprod_{\nu=0}^{p}\Gamma'\gamma_\nu$$

となることがわかる．次に p が N を割り切る場合には，直接的な計算で容易に

$$\Gamma'\backslash\Gamma_0(N)=\coprod_{\nu=0}^{p-1}\Gamma'\gamma_\nu$$

が示される． (証明終)

さて，modular 群の Hecke 作用素の1つの大きな特徴は，Hecke 作用素の固有値と，modular 形式の ∞ における Fourier 展開の係数が一致することである．このことから，Hecke 作用素の同時固有函数 $f(z)$ に関しては，対応する Dirichlet 級数 $L(s;f)$ が Euler 積を持つことが示されるのである．これを述べるために，少し一般的な補題から始める．

補題 4.5.12 K は可換環とする．K の元の列 $t(n)$, $d(n)$ $(n=1,2,3,\cdots)$ で（i）$t(1)=d(1)=1$ であって，（ii）$d(n)d(m)=d(mn)$ が任意の m,n に対して成り立つものに対して，次の（1）（2）（3）の条件は同値である．

（1） $(m,n)=1$ ならば $t(m)t(n)=t(mn)$ であって，更に素数 p については

$$t(p)t(p^e)=t(p^{e+1})+pd(p)t(p^{e-1})$$

が，任意の自然数 e に対して成り立つ．

（2） 形式的な Dirichlet 級数 $\sum t(n)n^{-s}$ が，形式的な Euler 積

$$\sum_{n=1}^{\infty}t(n)n^{-s}=\prod_{p}(1-t(p)p^{-s}+pd(p)p^{-2s})^{-1}$$

を持つ．

（3） 任意の m,n に対し

$$t(m)t(n)=\sum_{\substack{l|(m,n)\\ l>0}}ld(l)t(mn/l^2)$$

が成り立つ．

証明 （1）$\Longrightarrow$（2）：$(m,n)=1$ であるならば，$t(m)t(n)=t(mn)$ であるから，形式的に

$$\sum_{n=1}^{\infty}t(n)n^{-s}=\prod_{p}\left(\sum_{e=0}^{\infty}t(p^e)p^{-es}\right) \tag{4.5.16}$$

と書くことが出来る．（1）の仮定により

$$(1-t(p)p^{-s}+pd(p)p^{-2s})\left(\sum_{e=0}^{\infty}t(p^e)p^{-es}\right)=1$$

となることがわかるから，(4.5.16) と合せて（2）を得る．（2）$\Longrightarrow$（3）：形式的な Dirichlet 級数が Euler 積を持つことから，もし $(m, n)=1$ ならば $t(m)t(n)=t(mn)$ が成り立つ．m, n は自然数とし $m=\prod p^e$ および $n=\prod p^f$ を，各々 m および n の素因数分解とすると，このことから

$$\sum_{\substack{l|(m,n)\\ l>0}} ld(l)t(mn/l^2)=\prod_p\Bigl(\sum_{0\leq g\leq \min(e,f)}p^g d(p^g)t(p^{e+f-2g})\Bigr)$$

と書ける．よって（3）を示すのには，m および n が素数 p の巾のときにのみ示せば十分である．さて（2）により

$$\sum_{e=0}^{\infty}t(p^e)p^{-es}=(1-t(p)p^{-s}+pd(p)p^{-2s})^{-1} \tag{4.5.17}$$

であるから（3）を示すには，K の元 $t(p), d(p)$ が与えられたときに，$d(p^e)=d(p)^e$ とおき，更に $t(p^e)$ を (4.5.17) でもって定義すると

$$t(p^e)t(p^f)=\sum_{g\leq \min(e,f)}p^g d(p^g)t(p^{e+f-2g}) \tag{4.5.18}$$

が成り立つことを示せばよい．k は K の単位元で生成される部分環であるとし*，K の部分環 K_p を

$$K_p=k[t(p), d(p)]$$

ととる．さて $\boldsymbol{Q}$ 上代数的に独立な元 $t'(p), d'(p)$ をとると，準同型

$$\psi:\boldsymbol{Z}[t'(p), d'(p)]\longrightarrow k[t(p), d(p)]$$

で，単位元を単位元に写し，更に $\psi(t'(p))=t(p), \psi(d'(p))=d(p)$ となるものがある．よってもし (4.5.18) が $t'(p), d'(p)$ について成立するならば，準同型 ψ を施すことにより，$t(p), d(p)$ についても成り立つ．言い換えると，始めから $k=\boldsymbol{Z}$ で $t(p)$ および $d(p)$ は $\boldsymbol{Q}$ 上代数的であると仮定して差支えない．次に $\boldsymbol{Q}$ 上代数的に独立な元 u と v をとり，$\boldsymbol{Z}$ 上の準同型

$$\varphi:K_p=\boldsymbol{Z}[t(p), d(p)]\longrightarrow \boldsymbol{Q}[u, v]$$

を $\varphi(t(p))=u+v$, $\varphi(d(p))=\dfrac{1}{p}uv$ でもって定義する．u と v は $\boldsymbol{Q}$ 上で

* k は K の標数が0または p に従って，$\boldsymbol{Z}$ または $\boldsymbol{Z}/p\boldsymbol{Z}$ である．

代数的に独立であるから，φ は1対1である．φ により K_p を $Q[u, v]$ の部分環とみなすと，

(4.5.19) $$(1-t(p)p^{-s}+pd(p)p^{-2s})=(1-up^{-s})(1-vp^{-s})$$

であるから，(4.5.17) と比較すると

(4.5.20) $$t(p^e)=\frac{u^{e+1}-v^{e+1}}{u-v}=\sum_{i+j=e}u^iv^j$$

となるので

$$\begin{aligned}t(p^e)t(p^f)&=\frac{u^{e+1}-v^{e+1}}{u-v}\Big(\sum_{i+j=f}u^iv^j\Big)\\&=\left\{u^{e+1}\Big(\sum_{j=0}^{f}u^{f-j}v^j\Big)-v^{e+1}\Big(\sum_{i=0}^{f}u^iv^{f-i}\Big)\right\}\Big/(u-v)\\&=\sum_{g=0}^{f}u^gv^g(u^{e+f-2g+1}-v^{e+f-2g+1})/(u-v)\\&=\sum_{g=0}^{f}p^gd(p^g)t(p^{e+f-2g})\end{aligned}$$

を得る．よって（3）が示された．（1）は（3）の特別な場合であるから，（3）$\Longrightarrow$（1）は明らかである．（証明終）

上の補題において，$K=R(N)$ とし

$$t(n)=T(n),$$

$$d(n)=\begin{cases}T(n, n) & ((n, N)=1)\\ 0 & ((n, N)\neq 1)\end{cases}$$

とおくと，補題 4.5.7（2）および補題 4.5.8（2）から，直ちに次の定理を得る．

定理 4.5.13 （1） $R(N)$ の元 $T(n)$, $T(m)$ は次の関係式を満たす．

$$T(n)\,T(m)=\sum_{\substack{l\mid(m,n)\\(l,N)=1,\ l>0}}l\,T(l, l)\,T(mn/l^2).$$

（2） $R(N)$ の元を係数とする形式的な Dirichlet 級数 $\sum_{n=1}^{\infty}T(n)n^{-s}$ は

$$\sum_{n=1}^{\infty}T(n)n^{-s}=\prod_{p\nmid N}(1-T(p)p^{-s}+T(p, p)p^{1-2s})\times\prod_{p\mid N}(1-T(p)p^{-s})$$

なる形式的な Euler 積を持つ．

Hecke 作用素の作用は，(4.5.13) によって具体的に求まったから，これを

用いて，modular 形式 $f(z)$ の Fourier 展開の係数と，$(f|T(n))(z)$ の Fourier 展開の係数を比べてみよう．

補題 4.5.14 $f(z)$ は $G_k(N,\chi)$ の元であるとする．$f(z)$ および $(f|T(m))(z)$ の Fourier 展開を

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}c(n)e^{2\pi inz},$$

$$(f|T(m))(z)=\sum_{n=0}^{\infty}b(n)e^{2\pi inz}$$

と書くと

$$b(n)=\sum_{\substack{d|(m,n)\\ d>0}}\chi(d)d^{k-1}c(mn/d^2)$$

が成り立つ．

証明 (4.5.13) の記号を用いると

$$f\left(\frac{az+b}{d}\right)=\sum_{n=0}^{\infty}c(n)e^{2\pi in(az+b)/d}$$

となるから，これを (4.5.13) に代入し

$$\sum_{b=0}^{d-1}e^{2\pi ibn/d}=\begin{cases}d & (d|n)\\ 0 & (d\nmid n)\end{cases}$$

を用いると

(4.5.21) $$b(n)=\sum_{\substack{a|(m,n)\\ a>0}}\chi(a)a^{k-1}c(dn/a)$$

を得る．$ad=m$ であるから，$c(dn/a)=c(mn/a^2)$ となるので (4.5.21) において a を d と書き替えて補題を得る． (証明終)

補題 4.5.15 $f(z)$ は $G_k(N,\chi)$ の元とし，その Fourier 展開を $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}c(n)e^{2\pi inz}$ と書く．$\mathfrak{M}$ は素数の集合で $\mathfrak{M}$ に属する素数 p に対しては，$f|T(p)=t(p)f$ が成り立っているとすると，次の (1)(2)(3) が成り立つ．

(1) m がその素因子がすべて $\mathfrak{M}$ に属するような自然数ならば，f は $T(m)$ の固有函数であり，$f|T(m)=t(m)f$ とすると $c(m)=t(m)c(1)$ である．

(2) $L(s;f)=\sum_{n=1}^{\infty}c(n)n^{-s}$ を f に対応する Dirichlet 級数とすると

$$L(s;\ f)=\prod_{p\in\mathfrak{M}}(1-t(p)p^{-s}+\chi(p)p^{k-1-2s})\times\sum_n{}'c(n)n^{-s}$$

が成り立つ*. ここで $\sum_n{}'$ は $\mathfrak{M}$ に属する素数を含まない自然数 n を動く.

証明 (1) の前半は明らかである. n を m と互いに素な自然数とすると, 補題 4.5.14 によって $f|T(m)$ の $e^{2\pi inz}$ の係数を比べて

$$t(m)c(n)=c(mn) \tag{4.5.22}$$

を得る. 特に $n=1$ とすると (1) の後半を得る. (4.5.22) により, 形式的に

$$L(s;\ f)=(\sum_m{}'t(m)m^{-s})\times(\sum_n{}''c(n)n^{-s}) \tag{4.5.23}$$

となる. ここで $\sum_m{}'$ は素因子が $\mathfrak{M}$ の元からなる自然数および 1 を動き, $\sum_n{}''$ は素因子が $\mathfrak{M}$ の元を含まない自然数および 1 を動く. 定理 4.5.13 (1) と $f|T(l,\ l)=l^{k-2}\chi(l)f$ であることから, $m,\ n$ を $\sum'$ に含まれる数とすると

$$t(n)t(m)=\sum_{\substack{l|(m,n)\\(l,N)=1,\ l>0}}l^{k-1}\chi(l)t(mn/l^2)$$

が成り立っている. よって補題 4.5.12 により, 少くとも形式的には

$$\sum_m{}'t(m)m^{-s}=\prod_{p\in\mathfrak{M}}(1-t(p)p^{-s}+\chi(p)p^{k-1-2s})^{-1} \tag{4.5.24}$$

となる. (4.5.24) が複素領域で, 実際に成り立つことは, $G_k(N,\ \chi)$ の元に対しては $c(n)$ の評価の仮定の下に Riemann の ζ 函数の Euler 積展開の場合と同様である. (証明終)

$T(n)((n,\ N)=1)$ は $S_k(N,\ \chi)$ において, 同時対角化された. $f(z)$ が $S_k(N,\ \chi)$ の元であって, $T(n)((n,\ N)=1)$ の同時固有函数であるとすると, 上の補題から

$$L(s;\ f)=\prod_{p\nmid N}(1-t(p)p^{-s}+\chi(p)p^{k-1-2s})^{-1}\times(\sum_n{}'c(n)n^{-s})$$

と書ける. ここで $\sum_n{}'$ は 1 および N を割る素因子のみを素因子として持つ自然数全体および 1 を動く. 更にもし $f(z)$ がすべての $T(n)$ の同時固有函数ならば, $\mathfrak{M}$ としてすべての素数の集合がとれる. このときには, 更に強く次の定理

* f が cusp 形式でないときの $L(s;f)$ の収束性は §4.7 で述べる. この補題および次の定理においては, f が cusp 形式でないときにも $c(n)$ は評価式 $c(n)=O(n^{k-1+\varepsilon})$ を持つことを仮定する (定理 4.7.3 参照).

が成立する．

定理 4.5.16 $f(z)$ は $G_k(N, \chi)$ の元であって，$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} c(n)\, n^{2\pi i n z}$ なる Fourier 展開を持つとする．$f(z)\neq 0$ とすると，次の（1）および（2）は同値である．

（1） f はすべての $T(n)$ の同時固有函数である．

（2） $c(1)\neq 0$ であり，$L(s;\ f)$ は

$$L(s;\ f)=c(1)\prod_{p}(1-t(p)\,p^{-s}+\chi(p)\,p^{k-1-2s})^{-1}$$

なる Euler 積を持つ*．

このとき更に，$f\,|\,T(p)=t(p)f$ が成り立つ．

証明 （1）$\Longrightarrow$（2）：$t(n)$ を $T(n)$ の固有値とすると，補題 4.5.14 により $n\geqq 1$ ならば $c(n)=t(n)c(1)$ である．もし $c(1)=0$ ならば，$f(z)=c(0)$ となるが，$k\geqq 1$ であるから $f(z)=0$ でなければならないので仮定に反する．よって $c(1)\neq 0$ である．（2）の Euler 積は補題 4.5.15 における $\mathfrak{M}$ として素数全体からなる集合がとれることから明らかである．（2）$\Longrightarrow$（1）：素数以外の自然数 n についても $t(n)=c(n)/c(1)$ とおくと

$$\sum_{n=1}^{\infty} t(n)\,n^{-s}=\prod_{p}(1-t(p)\,p^{-s}+\chi(p)\,p^{k-1-2s})^{-1}$$

が成り立つから，補題 4.5.12 により

$$t(m)\,t(n)=\sum_{\substack{d\mid(m,\,n)\\ d>0}} d^{k-1}\chi(d)\,t(mn/d^2)$$

であるから，$c(1)$ を両辺に掛けると

$$t(m)\,c(n)=\sum_{\substack{d\mid(m,\,n)\\ d>0}} d^{k-1}\chi(d)\,c(mn/d^2)$$

となるが，この右辺は補題 4.5.14 によって $f\,|\,T(m)$ の Fourier 展開の $e^{2\pi i n z}$ の係数に外ならない．よって $f\,|\,T(m)$ の Fourier 展開の定数項を $b(0)$ とすると，

$$(f\,|\,T(m))\,(z)-t(m)\,f(z)=b(0)-c(0)$$

となる．$f\,|\,T(m)-t(m)f$ は $G_k(N, \chi)$ の元で $k\geqq 1$ であるから $b(0)=c(0)$

---

* $p\,|\,N$ ならば $\chi(p)=0$ であるから，$1-t(p)^{-s}+\chi(p)\,p^{k-1-2s}=1-t(p)\,p^{-s}$ である．

でなければならない．即ち

$$f\,|\,T(m)=t(m)f$$

が成り立つ． （証明終）

特に $N=1$, $k=12$ とすると，$\dim S_{12}(\Gamma(1))=1$ であるから，$\Delta(z)$ はすべての $T(n)$ の同時固有函数である．従って $\Delta(z)$ の Fourier 展開を

$$\Delta(z)=\sum_{n=1}^{\infty}\tau_n e^{2\pi inz}$$

と書くと，$\tau_1=1$ であるから，$\Delta\,|\,T(n)=\tau_n\Delta$ で，$L(s;\ \Delta(z))$ は

$$L(s;\ \Delta(z))=\prod_p(1-\tau_p p^{-s}+p^{11-s})^{-1}$$

なる Euler 積を持つ．Ramanujan は $\Delta(z)$ の係数を計算して，上の Euler 積を予想し，更に

$$|\tau_p|\leqq 2p^{11/2}$$

であろうと予想した．これが有名な Ramanujan の予想である．Petersson はこの予想を更に次のように拡張した．

定理 4.5.17 (**Ramanujan-Petersson 予想**) p が N を割らない素数とすると，$T(p)$ の $S_k(N,\chi)$ における固有値の絶対値は $2p^{(k-1)/2}$ を超えない．

この拡張された Ramanujan 予想は $k=2$ のときには [Eichler 2], [志村 2], [井草] により証明された．これは Γ が主合同群であるときに $\mathfrak{R}_\Gamma$ は $\boldsymbol{Q}$ 上で定義される代数曲線と考えられるが，その代数曲線の Hasse の ζ 函数と呼ばれるものが，本質的に $L(s;\ f)$ $(f\in S_k(\Gamma))$ の積に外ならないことを Eichler-志村の合同関係式と呼ばれるもので示し，それによって，Weil によって示された有限体上の代数曲線の合同 ζ 函数の Riemann の予想に帰着して証明されるのである．また，このことから $\mathfrak{R}_\Gamma$ の Hasse の ζ 函数が函数等式を持つことも同時に証明される．定理 4.4.17 は一般の k については，先ず $k\geqq 2$ ならば，[Deligne 2] はこれを高次元の代数多様体の合同 ζ 函数の Riemann 予想 (Weil 予想と呼ばれる) に帰着し，更に Weil 予想を証明することによって解決した．$k=1$ の場合にも [Deligne-Serre] は対応する Dirichlet 級数が，$\boldsymbol{Q}$ 上の Galois 拡大の Galois 群の 2 次の表現の Artin の L 函数と呼ばれるものに外ならないことを示し，合わせて $k=1$ のときの，

Ramanujan 予想を解決した．Ramanujan の予想の証明は，代数幾何学の深い知識と理解を必要とするから本書では述べることが出来ない．さて §4.3 の始めに，modular 形式を調べるのには $G_k(N,\chi)$ の元のみ調べれば十分であると述べたが，Hecke 作用素を modular 対応の表現であると考えて，Hecke 作用素により modular 対応およびそれの引き起こす Jacobi 多様体の準同型を調べるのに必要な $\Gamma_1(N)$ の Hecke 環を調べ，$\Gamma_0(N)$ の Hecke 環との関係を述べておく．そのために

$$\Delta_1(N)=\left\{\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\in M_2(\boldsymbol{Z})\,|\,ad-bc>0,\ c\equiv 0(\operatorname{mod} N),\ a\equiv 1(\operatorname{mod} N)\right\}$$

とおく．$\Delta_1(N)$ は明らかに $\Gamma_1(N)$ を含む $GL_2)Q)$ の部分半群である．

定理 4.5.18 （1） $R(\Gamma_1(N),\ \Delta_1(N))$ と $R(\Gamma_0(N),\ \Delta_0(N))$ とは

$$\Gamma_1(N)\alpha\Gamma_1(N)\longmapsto\Gamma_0(N)\alpha\Gamma_0(N)$$

によって同型である．

（2） （1）の同型は $G_k(N,\chi)$ および $G_k(\Gamma_1(N))$ への作用と同型である．即ち $\Delta_1(N)$ の元 α に対して

$$\begin{array}{ccc} G_k(N,\chi) & \xrightarrow{\Gamma_0(N)\alpha\Gamma_0(N)} & G_k(N,\chi) \\ \cap & & \cap \\ G_k(\Gamma_1(N)) & \xrightarrow{\Gamma_1(N)\alpha\Gamma_1(N)} & G_k(\Gamma_1(N)) \end{array}$$

が成り立つ．

証明 定理 2.7.6（1）における $\Gamma,\ \Delta,\ U,\ D$ として各々 $\Gamma_1(N),\ \Delta_1(N),\ \Gamma_0(N),\ \Delta_0(N)$ をとったときに，そこにおける3条件を確かめればよい．（i）および（iii）の成り立っていることは明らかであるから，条件（ii）即ち

$$\Gamma_0(N)\alpha\Gamma_0(N)=\Gamma_0(N)\alpha\Gamma_1(N)$$

が任意の $\alpha\in\Delta$ について成り立つことを示す．$\alpha=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ とし $\det\alpha=n$ とおく．補題4.5.2より $\beta=\begin{bmatrix} l & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix}$ が存在し $\Gamma_0(N)\alpha\Gamma_0(N)=\Gamma_0(N)\beta\Gamma_0(N)$ が成り立つ．さて $\Gamma_0(N)/\Gamma_1(N)$ の代表系として

$$(4.5.25)\qquad \gamma\equiv\begin{bmatrix} u & 0 \\ 0 & v \end{bmatrix}\quad(\operatorname{mod} nN)\qquad((uv,\ N)=1)$$

なる形の元がとれる（系 4.2.2 の後の注意）. γ を (4.5.25) をみたすような元とすると

$$\alpha\gamma\alpha^{-1}\equiv\begin{bmatrix} u & 0 \\ 0 & v \end{bmatrix} \pmod{N}$$

であるから $\beta\Gamma_0(N)\subset\Gamma_0(N)\beta\Gamma_1(N)$ となり， よって
$\Gamma_0(N)\beta\Gamma_0(N)=\Gamma_0(N)\beta\Gamma_1(N)$
を得る．故に

$$\Gamma_0(N)\alpha\Gamma_1(N)\subset\Gamma_0(N)\alpha\Gamma_0(N)=\Gamma_0(N)\beta\Gamma_1(N)$$

となるから $\Gamma_0(N)\alpha\Gamma_1(N)=\Gamma_0(N)\alpha\Gamma_0(N)$ である． （証明終）

次に Γ は modular 群で

$$\Gamma_0(N)\supset\Gamma\supset\Gamma_1(N)$$

となるものとし，$\Delta=\Delta_1(N)\cdot\Gamma\subset\Delta_0(N)$ と定義すると，定理 4.5.17 によって

$$R(\Gamma_1(N),\ \Delta_1(N))\cong R(\Gamma,\ \Delta)\cong R(\Gamma_0(N),\ \Delta_0(N))$$

であり，更にこの同型は $G_k(\Gamma)$ の $G_k(\Gamma_1(N))$ への自然な埋め込みと可換である．従って，以下 $R(\Gamma_1(N),\ \Delta_1(N))$, $R(\Gamma,\ \Delta)$, $R(N)$ は同一視し

$$R(N)=R(\Gamma_0(N),\ \Delta_0(N))=R(\Gamma,\ \Delta)=R(\Gamma_1(N),\ \Delta_1(N))$$

と書く．次の定理は重要であるので [志村], Th. 3.48, Th. 3.52 から引用しておく．

定理 4.5.19（志村） Γ を $\Gamma_0(N)\supset\Gamma\supset\Gamma_1(N)$ となる modular 群とし，$k\geqq 2$ とすると，次の（1）（2）が成り立つ．

（1） $R(N)$ の元 T の $S_k(\Gamma)$ における表現行列を $T_{\Gamma,k}$ で表わす．$S_k(\Gamma)$ の適当な基底をとると，$T_{\Gamma,k}$ の成分は有理整数になる．

（2） $S_k(\Gamma)$ の基底として ∞ における Fourier 展開の係数が有理整数のものがとれる．

$\Gamma(N)$ に関する Hecke 環，更に一般に合同 modular 群に関する Hecke 環は (4.3.1) により

$$\Gamma_0(N^2)\supset\begin{bmatrix} N & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1}\Gamma(N)\begin{bmatrix} N & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\supset\Gamma_1(N^2)$$

であるので，上の Γ の場合に帰着して調べることは容易である．

最後に Hecke 作用素の固有値を計算することについて述べる．Hecke 作用素の固有値の重要さについてはここでは述べないが，例えば Ramanujan 予想が代数幾何学と深くかかわっていたことからも，その重要さの一端をうかがい知ることが出来る．詳しくは［志村 4, 6］等を参照されたい．一般に T が $\boldsymbol{C}$ 上の vector 空間 V の1次変換であるとする．$\dim_{\boldsymbol{C}} V=n$ とし $a_1, \cdots, a_n$ が T の固有値であるとする．$F(X)=\prod_i (X-a_i)=\sum_{k=0}^n b_k X^k$ とおくと b_k は $a_1, \cdots, a_n$ の対称式であり

$$\mathrm{tr}(T^k)=a_1^k+\cdots+a_n^k$$

であるから，$\mathrm{tr}(T^k)$ $(1\leqq k\leqq r)$ がわかれば b_k が求まる．よって $T(n)$ の固有値を求めることは $\mathrm{tr}(T(n)^k)$ $(1\leqq k\leqq r)$ を計算することに帰着されるが，$T(n)^k$ は補題 4.5.7（2）と (4.5.14) により $S_k(N, \chi)$ 上の作用素としては $T(m)$ $(1\leqq m\leqq n^k)$ の1次結合であるので $\mathrm{tr}(T(n)^k)$ を計算するためには $\mathrm{tr}(T(m))$ $(1\leqq m\leqq n^k)$ が計算出来ればよい．特に $n=p$（素数）ならば

(4.5.26) $r=\dim S_k(N, \chi)$ とし $a_1, \cdots, a_r$ が $T(p)$ の $S_k(N, \chi)$ における固有値とすると，$\mathrm{tr}(T(p^k))$ $(k\leqq r)$ がわかれば $F(X)=\prod_\nu (X-a_\nu)$ がわかる．

例えば $F(X)=X^r-b_1X^{r-1}+b_2X^{r-2}-\cdots+(-1)^r b_r$ とおくと

$$b_1=\mathrm{tr}(T(p))$$

$$b_2=\frac{1}{2}\{b_1^2-\mathrm{tr}(T(p^2))+\chi(p)p^{k-1}\cdot r\}$$

$$b_3=\frac{1}{3}\{\mathrm{tr}(T(p^3))+2\chi(p)p^{k-1}b_1-b_1^3+b_1b_2\}$$

$$\cdots\cdots$$

となることが確かめられる．$\mathrm{tr}(T(n))$ は第6章において計算する．

§4.6 原始的な cusp 形式

断らない限り $k>0$ であると仮定する．自然数 l に対して

$$(4.6.1)\qquad \delta_l=\begin{bmatrix} l & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\in SL_2(\boldsymbol{R})$$

と定義すると，H 上の函数 f に対して

$$f(lz)=l^{-k/2}(f|[\delta_l]_k)(z)$$

となる．$\Gamma_0(lN)$ の任意の元 $\gamma=\begin{bmatrix} a & b \\ clN & d \end{bmatrix}$ に対し，$\delta_l\gamma\delta_l^{-1}=\begin{bmatrix} a & bl \\ cN & d \end{bmatrix}$ $(\in\Gamma_0(N))$ であるので，もし $f\in G_k(N,\chi)$ ならば $g=f|[\delta_l]_k$ とおくと

$$\begin{aligned} g|[\gamma]_k &= (f|[\delta_l\gamma\delta_l^{-1}]_k)|[\delta_l]_k \\ &= \chi(d)f|[\delta_l]_k=\chi(d)g \end{aligned}$$

が成り立つから，次の補題を得る．

補題 4.6.1　$f(z)$ が $G_k(N,\chi)$ の元であるとすると，自然数 l に対して

$$f(lz)=l^{-k/2}(f|[\delta_l]_k)\in G_k(Nl,\chi)$$

である．もし $f(z)$ が cusp 形式ならば，$f(lz)$ も cusp 形式である．

さて前節で，$T(n)$, $(n,N)=1$, は $S_k(N,\chi)$ において同時対角化されることを見た．一方 $S_k(N,\chi)$ の元で，すべての $T(n)$ の同時固有函数となるものを $f(z)$ とすると，$L(s;f)$ は具合のいい Euler 積を持っていた．そこで $S_k(N,\chi)$ においてすべての $T(n)$ が対角化出来ないかと言う疑問が起こる．$N=1$ の場合，即ち $\Gamma(1)$ の場合には，明らかにすべての $T(n)$ は同時化されるが，更に Hecke は，次の場合にも実際にすべての $T(n)$ が対角化されることを示した．

1°　k が $k<12$ なる偶数か，$k=14$ で N が素数のときの $S_k(\Gamma_0(N))$.

2°　χ が $\bmod N$ の原始的な指標のときの $S_k(N,\chi)$.

一方，［志村］, Remark 3.59 の例でわかるように，一般の $S_k(N,\chi)$ はすべての $T(n)$ の同時固有函数を基底に持つとは限らない．これは，χ を $\bmod m$ の原始的な指標とし，N を M の倍数とすると，補題 4.6.1 により $S_k(N,\chi)$ は

$$\left\{f(z),\ f(lz)\ \middle|\ f(z)\in S_k(L,\chi),\ m|L,\ L|N,\ l\,\middle|\left(\frac{N}{L}\right)\right\}$$

を含むことによる．上の 1° および 2° の場合には，仮定から $S_k(N,\chi)$ には

本質的に小さい level の modular 群に属する cusp 形式となるものが存在しないのである．よって，上のような N の約数を level に持つ cusp 形式をとり除いてやると，すべての $T(n)$ が同時対角化されて，cusp 形式 $f(z)$ と $L(s;\ f)$ の対応が更に自然なものとなることが予想される．[Atkin-Lehner] は，これが実際成り立つことを証明した．以下 Atkin と Lehner の結果を紹介する．補題の多くは正則 modular 形式についても成立するので，途中までは一般的な形で命題を述べる．先ず補題 4.6.1 における写像 $G_k(N, \chi) \ni f(z) \longmapsto f(lz) \in G_k(Nl, \chi)$ と Hecke 作用素との関係から始める．

補題 4.6.2　l は自然数とし，$\delta_l=\begin{bmatrix} l & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ とすると，$(n, Nl)=1$ ならば

$$\begin{array}{ccc} G_k(N, \chi) & \xrightarrow{\ ^{N}T(n)\ } & G_k(N, \chi) \\ \big\downarrow{\scriptstyle [\delta_l]_k} & & \big\downarrow{\scriptstyle [\delta_l]_k} \\ G_k(Nl, \chi) & \xrightarrow{\ ^{lN}T(n)\ } & G_k(Nl, \chi) \end{array}$$

は可換である．

証明　$G_k(N, \chi)$ の元 $f(z)$ をとると $g=f|[\delta_l]_k \in G_k(Nl, \chi)$ であるから，n が Nl と互いに素ならば $f|^{N}T(n, n)=\chi(n)n^{k-2}f$,　$g|^{lN}T(n, n)=\chi(n)n^{k-2}g$ となるので，補題を示すには n が lN を割らない素数のときにのみ示せばよい．$n=p$ とおくと，補題 4.5.6 により $^{lN}T(p)$ の左 $\Gamma_0(lN)$ 剰余類の代表系として $\left\{\begin{bmatrix} 1 & m \\ 0 & p \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} p & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \middle| 0 \leqq m \leqq p-1 \right\}$ がとれるから

$$(f|[\delta_l]_k)|^{lN}T(p)=p^{k/2-1}\left(\sum_{m=0}^{p-1} f\left|\left[\delta_l \begin{bmatrix} 1 & m \\ 0 & p \end{bmatrix}\right]_k + f\right|\left[\delta_l \begin{bmatrix} p & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right]_k\right)$$

$$=p^{k/2-1}\left(\sum_{m=0}^{p-1} f\left|\left[\begin{bmatrix} 1 & lm \\ 0 & p \end{bmatrix}\delta_l\right]_k + f\right|\left[\begin{bmatrix} p & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\delta_l\right]_k\right)$$

であるが，$\left\{\begin{bmatrix} 1 & lm \\ 0 & p \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} p & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \middle| 0 \leqq m \leqq p-1 \right\}$ は $^{N}T(p)$ の左 $\Gamma_0(N)$ 剰余類の代表系であるから

$$=(f|^{N}T(p))|[\delta_l]_k$$

となる．

次の補題は Hecke が前に述べた 1° および 2° の場合の証明に用いたもので，一般の場合にも，基本的な役割を果たす．

補題 4.6.3 (**Hecke**) f は $G_k(N,\chi)$ の元とする．$\varDelta_0(N)$ の元 $\alpha=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ で（i）$\det(\alpha)>1$,（ii）$(\det(\alpha), N)=1$,（iii）$(a, b, c, d)=1$ となるものが存在して，$f|[\alpha^{-1}]_k\in G_k(N,\chi)$ となるならば $f=0$ である．

証明（ii）の条件により $\alpha\in\varDelta_0^*(N)$ でもある．よって，補題 4.5.2 により，$\gamma_1, \gamma_2\in\Gamma_0(N)$ を適当にとると，$\gamma_1\alpha\gamma_2=\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & l \end{bmatrix}$ $(l|m,\ m>0)$ となる．仮定（ii）により $(l, m)=1$ だから，$l=1$ で $m\neq 1$ であるので，

$$\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ N & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ N/m & 1 \end{bmatrix}\notin\Gamma_0(N)$$

となり，$\alpha\Gamma_0(N)\alpha^{-1}\not\subset\Gamma_0(N)$ がわかる．γ を $\alpha\gamma\alpha^{-1}\notin\Gamma_0(N)$ となる $\Gamma_0(N)$ の元とする．$\det(\alpha)\cdot\alpha^{-1}=\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}\in\varDelta_0(N)$ であるから，$\det(\alpha)\cdot\alpha\gamma\alpha^{-1}\in\varDelta_0(N)$ となるので，再び補題 4.5.2 により $\gamma_3, \gamma_4\in\Gamma_0(N)$ が存在して

$$\det(\alpha)\cdot\gamma_3\alpha^{-1}\gamma\alpha\gamma_4=\begin{bmatrix} u & 0 \\ 0 & v \end{bmatrix} \qquad (u|v,\ u>0) \tag{4.6.2}$$

でなる．両辺の行列式を比べると $uv=\det(\alpha)^2$ だから，もし $u=v$ ならば $\alpha^{-1}\gamma\alpha=\gamma_3^{-1}\gamma_4^{-1}\in\Gamma_0(N)$ となって，γ のとり方に矛盾するので $h=v/u>1$ であることがわかる．そこで $h=v/u$ とおき (4.6.2) の両辺を f に作用させると

$$cf(z)=f(z/h) \qquad (c=\det(\alpha)^k v^{-k}\chi(\gamma_3)\chi(\gamma)\chi(\gamma_4)\neq 0)$$

を得るが，$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a(n)e^{2\pi inz}$ を $f(z)$ の Fourier 展開とすると，任意の自然数 t に対して

$$a(n)=c^{-1}a(n/h)=c^{-t}a(n/h^t)$$

となるから，任意の $n(>0)$ に対し $a(n)=0$ である．$k>0$ であるから $f(z)=0$ がわかる．（証明終）

定理 4.6.4 l は自然数であるとする．H 上の函数 $f(z)$ が，（i）$f(z+1)=f(z)$,（ii）$f(lz)\in G_k(N,\chi)$ を満たすならば次の（1）（2）がわかる．

（1）$lm_\chi|N$ ならば $f(z)\in G_k(N/l,\chi)$ である．

（2） $lm_\chi \nmid N$ ならば $f(z)=0$ である．

ここで m_χ は χ の conductor であり，もし更に $f(lz)$ が cusp 形式ならば，（1）において $f(z)$ は cusp 形式である．

証明 l に関する帰納法を用いることにより，l が素数のときにのみ証明すれば十分である．以下 l は素数であるとする．仮定により $f(z)\in G_k(N,\chi)$ がわかるから，もし $l\nmid N$ ならば補題 4.6.3 において $\alpha=\begin{bmatrix} l & 0 \\ 0 & 1\end{bmatrix}$ ととることによって $f(z)=0$ となる．よって $l|N$ であると仮定する．先ず $lm\nmid N$ である場合を考える．$\gamma_1=\begin{bmatrix} a & b \\ cN & d\end{bmatrix}$ が $\Gamma_0(N)$ の元とすると，仮定により

$$f\left|\begin{bmatrix} a & bl \\ cN/l & d\end{bmatrix}_k\right.=f|[\delta_l\gamma_1\delta_l^{-1}]_k=\chi(d)f \tag{4.6.3}$$

が成り立つ．m と n は自然数であるとし，$\Gamma_0(N/l)$ の元 γ を

$$\gamma=\begin{bmatrix} 1 & m \\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ N/l & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & n \\ 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1+(mN/l) & n(1+mN/l)+m \\ N/l & nN/l+1\end{bmatrix} \tag{4.6.4}$$

でもって定義する．特に n は $(nN/l)+1\not\equiv 0 \pmod{l}$ にとり，m は

$$n(1+mN/l)+m=n+(nN/l+1)m\equiv 0 \pmod{l} \tag{4.6.5}$$

であるようにとる．$\begin{bmatrix} 1+(mN/l) & n(1+mN/l)+m/l \\ N & (nN/l)+1\end{bmatrix}\in\Gamma_0(N)$ であるから，(4.6.3) によって

$$f|[\gamma]_k=\chi(1+nN/l)f$$

である．一方，$\delta_l\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ N & 1\end{bmatrix}\delta_l^{-1}=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ N/l & 1\end{bmatrix}$ であるので，（i）および（ii）により

$$f\left|\left(\begin{bmatrix} 1 & m \\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ N/l & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & n \\ 0 & 1\end{bmatrix}\right)_k\right.=f$$

が成り立つので，もし $f\neq 0$ であると仮定すると $\chi(nN/l+1)=1$ が $(nN/l+1, l)=1$ となる任意の n について成り立たねばならない．即ち χ は $\bmod N/l$ で定義されることになり $m_\chi\nmid\dfrac{N}{l}$ に矛盾するから，$f=0$ でなければならない．次に $lm_\chi|N$ であると仮定する．$\gamma=\begin{bmatrix} a & b \\ cN/l & d\end{bmatrix}$ が $\Gamma_0(N/l)$ の任意の元であ

るとすると，適当な整数 m と n をとって

$$\begin{bmatrix}1 & m\\0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a & b\\cN/l & d\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & n\\0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a' & b'l\\c'N/l & d'\end{bmatrix}\qquad (a',\ b',\ c',\ d'\in \boldsymbol{Z})$$

とすることが出来る．$f(z)$ の仮定と $d\equiv d'\ (\mathrm{mod}\, N/l)$ であることにより

$$f\left|\begin{bmatrix}a & b\\cN/l & d\end{bmatrix}_k=f\right|\begin{bmatrix}a' & b'l\\c'N/l & d'\end{bmatrix}_k=\chi(d')f=\chi(d)f$$

となるから，$f\in G_k(N/l,\chi)$ がわかる．$f(lz)$ が cusp 形式なら $f(z)$ も cusp 形式となるのは，明らかである．(証明終)

補題 4.6.5 $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_ne^{2\pi inz}$ は $G_k(N,\chi)$ の元であるとする．自然数 L に対して

$$g(x)=\sum_{(n,L)=1}a_ne^{2\pi inz}$$

と定義すると

$$g(x)\in G_k(M,\chi)\qquad (M=N\prod_{\substack{p|L\\p|N}}p\prod_{\substack{p|L\\p\nmid N}}p^2)$$

である．もし $f(z)$ が cusp 形式なら，$g(z)$ もまた cusp 形式である．

証明 L が素数のときにのみ示せばよいことは容易にわかる．$L=p$ (素数) とおき，$p|N$ または $p\nmid N$ に応じて，$N'=N$ または $N'=pN$ とおくと，$p|N'$ であるから補題 4.5.11 によって

$$(4.6.6)\qquad \Gamma_0(N')\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & p\end{bmatrix}\Gamma_0(N')=\coprod_{m=0}^{p-1}\Gamma_0(N')\begin{bmatrix}1 & m\\0 & p\end{bmatrix}$$

である．$G_k(N,\chi)\subset G_k(N',\chi)$ であるから，$f|^{N'}T(p)\in G_k(N',\chi)$ であり，(4.6.6) を用いると

$$\begin{aligned}(f|^{N'}T(p))(z)&=p^{-1}\sum_{n=1}^{\infty}a_n\sum_{m=0}^{p-1}e^{2\pi in(z+m)/p}\\&=\sum_{n=1}^{\infty}a_{np}e^{2\pi inz}\end{aligned}$$

となるので，補題 4.6.1 により

$$(f|^{N'}T(p))(pz)=\sum_{n=1}^{\infty}a_{np}e^{2\pi inpz}$$

は $G_k(N'p, \chi)$ の元であるから，$M=N'p$ とおくと

$$g(z)=f(z)-(f|^{N'}T(p))\in G_k(M, \chi)$$

がわかった．cusp 形式の場合も全く同様である．　(証明終)

補題 4.6.6　χ は $\bmod N$ の指標とする．l は自然数で p は l を割り切らない素数とする．$M=lN$ とおくと

(1)
$$\begin{array}{ccc} G_k(pN,\chi) & \xrightarrow{\Gamma_0(pN)\left[\begin{smallmatrix}1&0\\0&p\end{smallmatrix}\right]\Gamma_0(N)} & G_k(N,\chi) \\ \downarrow & & \downarrow \\ G_k(pM,\chi) & \xrightarrow{\Gamma_0(pM)\left[\begin{smallmatrix}1&0\\0&p\end{smallmatrix}\right]\Gamma_0(M)} & G_k(M,\chi), \end{array}$$

(2)
$$\begin{array}{ccc} G_k(pN,\chi) & \xrightarrow{\Gamma_0(pN)\left[\begin{smallmatrix}1&0\\0&p\end{smallmatrix}\right]\Gamma_0(N)} & G_k(N,\chi) \\ \downarrow{\scriptstyle [\delta_l]_k} & & \downarrow{\scriptstyle [\delta_l]_k} \\ G_k(pM,\chi) & \xrightarrow{\Gamma_0(pM)\left[\begin{smallmatrix}1&0\\0&p\end{smallmatrix}\right]\Gamma_0(M)} & G_k(M,\chi) \end{array}$$

は可換である．これは cusp 形式についても同様に成り立つ．ここで（1）の垂直の矢印は自然な埋め込みを意味する．

証明　（1）の可換性は補題 4.5.11 により明らかである．（2）を示そう．$f(z)\in G_k(pN, \chi)$ とし

$$g(z)=f|[\delta_l]_k$$

とおく．$p|M$または $p\nmid M$ に応じて $d=p-1$ または $d=p$ とおき，補題 4.5.11 のように γ_ν $(1\leqq\nu\leqq d)$ をとると

$$\Gamma_0(pM)\begin{bmatrix}1&0\\0&p\end{bmatrix}\Gamma_0(M)=\coprod_{\nu=0}^{d}\Gamma_0(M)\begin{bmatrix}1&0\\0&p\end{bmatrix}\gamma_\nu \tag{4.6.7}$$

である．χ は $\bmod N$ で定義されるから $\chi(\gamma_\nu)=1$ であることに注意すると，

$$\begin{aligned} g|\Gamma_0(pM)\begin{bmatrix}1&0\\0&p\end{bmatrix}\Gamma_0(M) &= \sum_{\nu=0}^{d} g\left|\left[\begin{bmatrix}1&0\\0&p\end{bmatrix}\gamma_\nu\right]_k\right. \\ &= \sum_{\nu=0}^{d} f\left|\left[\delta_l\begin{bmatrix}1&0\\0&p\end{bmatrix}\gamma_\nu\right]_k\right. \\ &= \sum_{\nu=0}^{d} f\left|\left[\begin{bmatrix}1&0\\0&p\end{bmatrix}(\delta_l\gamma_\nu\delta_l^{-1})\delta_l\right]_k\right. \end{aligned} \tag{4.6.8}$$

であるが，容易にわかるように $0 \leqq \nu \leqq p-1$ ならば $\delta_l \gamma_\nu \delta_l^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & l\nu \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ であり，$p \nmid N$ のときの $\delta_l \gamma_p \delta_l^{-1}$ は

$$\delta_l \gamma_p \delta_l^{-1} \equiv \begin{cases} \begin{bmatrix} 0 & -al \\ (al)^{-1} & 0 \end{bmatrix} & (\mathrm{mod}\, p) \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} & (\mathrm{mod}\, N) \end{cases}$$

となるので，再び補題 4.5.11 を用いると

$$\Gamma_0(pN) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & p \end{bmatrix} \Gamma_0(N) = \coprod_{\nu=0}^{d} \Gamma_0(pN) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & p \end{bmatrix} (\delta_l \gamma_\nu \delta_l^{-1})$$

を得るから (4.6.8) により

$$g | \Gamma_0(plN) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & p \end{bmatrix} \Gamma_0(lN) = \left(f | \Gamma_0(pN) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & p \end{bmatrix} \Gamma_0(N) \right) | [\delta_l]_k$$

がわかる． (証明終)

補題 4.6.7 l は相異なる素数の積とする．$G_k(N, \chi)$ の元 $f(z)$ の Fourier 展開 $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{2\pi i n z}$ において，$(n, l) = 1$ ならば $a_n = 0$ であるならば

$$f(z) = \sum_{p|l} g_p(pz) \qquad (g_p(z) \in G_k(Nl^2, \chi))$$

と書ける．もし $l | N$ なら g_p は $g_p \in G_k(Nl, \chi)$ にとれる．また $f(z)$ が cusp 形式であるならば，g_p は cusp 形式であるようにとれる．

証明 l を割る素数の個数に関する帰納法で証明する．l が素数ならば $g(z) = f(z/l)$ とおくと，$g(z)$ は定理 4.6.4 における $f(z)$ の条件をすべて満たすから，$lm_\chi | N$ ならば $g(z) \in G_k(N/l, \chi)$ であり，$lm_\chi \nmid N$ ならば $g(z) = 0$ である．いずれにしても $g(z) \in G_k(Nl, \chi)$ であって

$$f(z) = g(lz)$$

が成り立っている．次に l は合成数とし，l の真の約数については補題の主張が成り立つものと仮定する．p を l の素因子とし $l' = l/p$ とおく．

$$h(z) = \sum_{p \nmid n} a_n e^{2\pi i n z}$$

と定義すると，補題 4.6.5 により $h(z)$ は $G_k(Np^2, \chi)$ に属し，

$$f(z)-h(z)=\sum_{n=0}^{\infty}b_n e^{2\pi inz}$$

と書き表わすと，$h(z)$ の定義から $p\nmid n$ ならば $b_n=0$ である．$g_p(z)=f(z/p)-h(z/p)$ とおくと，$g_p(z+1)=g_p(z)$ が成り立つので，定理 4.6.4 によって，$g_p(z)$ は $G_k(Np, \chi)$ の元であり，

$$f(z)=g_p(pz)+h(z) \tag{4.6.9}$$

と書ける．補題における f, N, l として h, Np^2, l' をとると，これらは補題の仮定を満たすので，帰納法の仮定により，l' の各素因子 p に対して $g_p(z)\in G_k(Nl^2, \chi)$ が存在して

$$h(z)=\sum_{p|l'}g_p(pz)$$

と書き表わされ，よって (4.6.9) と合わせて補題の前半を得る．もし $l|N$ ならば $g_p\in G_k(Nl, \chi)$ にとれることは，補題 4.6.5 によって上の証明の順を追って明らかである．cusp 形式についても全く同様である． （証明終）

定理 4.6.8 $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n e^{2\pi inz}\in G_k(N, \chi)$ とする．自然数 l が存在して $(l, n)=1$ ならば $a_n=0$ であるとすると，

（1） $(l, N/m_\chi)=1$ ならば，$f(z)=0$ である．

（2） $(l, N/m_\chi)\neq 1$ ならば，$(l, N/m_\chi)$ の素因子 p に対して $f_p(z)\in G_k(N/p, \chi)$ が存在して

$$f(z)=\sum_{p}f_p(pz)$$

と書ける．もし f が cusp 形式ならば，f_p は cusp 形式であるようにとれる．ここで m_χ は χ の conductor である．

証明 l は相異なる素数の積として差支えない．l の素因子の個数に関する帰納法を用いる．l が素数のときには定理 4.6.4 の主張に外ならない．次に l の真の約数に関しては，定理の主張が成り立つものと仮定する．p を l の素因子とし，$l'=l/p$ とおき

$$h(z)=\sum_{(n,l')\neq 1}a_n e^{2\pi inz}, \tag{4.6.10}$$

$$g(z)=f(z)-h(z)=\sum_{(n,l')=1}a_n e^{2\pi inz} \tag{4.6.11}$$

と定義すると，補題 4.6.5 により $h(z)$ および $g(z)$ は $G_k(Nl'^2, \chi)$ の元である．f に関する仮定により $g(z)$ の $e^{2\pi inz}$ の係数が 0 でないのは，n が p の倍数であるときに限るから

$$g_p(z)=g\left(\frac{z}{p}\right)$$

と定義すると，$g_p(z+1)=g_p(z)$ である．ここで $pm_\chi \nmid N$ の場合と $pm_\chi | N$ の場合にわける．$pm_\chi \nmid N$ ならば $pm_\chi \nmid Nl'^2$ となるので，定理 4.6.4 により $g(z)=0$ を得る．従って

$$f(z)=h(z)=\sum_{(n,l)=1} a_n e^{2\pi inz}$$

となり帰納法の仮定から定理が示される．次に $pm_\chi | N$ であると仮定すると，定理 4.6.4 により $g_p(z)\in G_k(Nl'^2/p, \chi)$ である．そこで $p^2|N$ ならば $d=p-1$，$p^2\nmid N$ ならば $d=p$ とし $\gamma_\nu \in \Gamma_0(Nl'^2/p)$ を $\Gamma_0(Nl'^2)\begin{bmatrix}1&0\\0&p\end{bmatrix}\Gamma_0(Nl'^2/p)=\coprod_{\nu=0}^{d}\Gamma_0(Nl'^2)\begin{bmatrix}1&0\\0&p\end{bmatrix}\gamma_\nu$ であるようにとると

$$\begin{aligned}&\left(g\,|\,\Gamma_0(Nl'^2)\begin{bmatrix}1&0\\0&p\end{bmatrix}\Gamma_0\left(\frac{Nl'^2}{p}\right)\right)(z)\\&=p^{k/2-1}\sum_{\nu=0}^{d}\chi(\gamma_\nu)^{-1}\left[g\,\middle|\left[\begin{matrix}1&0\\0&p\end{matrix}\right]_k[\gamma_\nu]_k\right)(z)\\&=p^{-1}\sum_{\nu=0}^{d}\chi(\gamma_\nu)^{-1}g_p\,|\,[\gamma_\nu]_k=(d+1)p^{-1}g_p\end{aligned}$$

となるから

$$g(z)=g_p(pz)=\frac{p}{d+1}\left(g\,|\,\Gamma_0(Nl'^2)\begin{bmatrix}1&0\\0&p\end{bmatrix}\Gamma_0(Nl'^2/p)\right)(pz) \tag{4.6.12}$$

を得る．ここで

$$f_p(z)=\frac{p}{d+1}\left(f\,|\,\Gamma_0(N)\begin{bmatrix}1&0\\0&p\end{bmatrix}\Gamma_0(N/p)\right)(z)\qquad(\in G_k(N/p, \chi))$$

とおくと，補題 4.6.6 (1) により

$$=\frac{p}{d+1}\left(f\,|\,\Gamma_0(Nl'^2)\begin{bmatrix}1&0\\0&p\end{bmatrix}\Gamma_0(Nl'^2/p)\right)(z) \tag{4.6.13}$$

である．$f(z)-f_p(pz)$ が自然数 l' に対して定理の仮定を満たすことを示せば，帰納法の仮定により定理は示される．先ず，$f(z)-f_p(pz)\in G_k(N,\chi)$ は明らかである．次に

$$\begin{aligned}&f(z)-f_p(pz)\\&\quad=f(z)-f_p(pz)-g(z)+g_p(pz)\\&\quad=(f(z)-g(z))-\frac{p}{d+1}\left((f-g)\,|\,\Gamma_0(Nl'^2)\begin{bmatrix}1&0\\0&p\end{bmatrix}\Gamma_0(Nl'^2/p)\right)(pz)\end{aligned}$$

となるが，$h(z)=f(z)-g(z)$ であったから

$$=h(z)-\frac{p}{d+1}\left(h\,|\,\Gamma_0(Nl'^2)\begin{bmatrix}1&0\\0&p\end{bmatrix}\Gamma_0(Nl'^2/p)\right)(pz) \tag{4.6.14}$$

と書ける．(4.6.10) により $h(z)$ の $e^{2\pi inz}$ の係数は $(n,\ l')=1$ なら0である．補題 4.6.7 を f,N,l として h,Nl'^2,l' をとって適用すると，

$$h(z)=\sum_{q|l'}h_q(qz)\qquad (h_q(z)\in G_k(Nl'^3,\chi))$$

と書ける．また補題 4.6.6（1）により，l' を割る任意の素数 q に対して

$$h\,|\,\Gamma_0(Nl'^2)\begin{bmatrix}1&0\\0&p\end{bmatrix}\Gamma_0(Nl'^2/p)=h\,|\,\Gamma_0(Nl'^3q)\begin{bmatrix}1&0\\0&p\end{bmatrix}\Gamma_0(Nl'^3q/p)$$

となるから，このことと補題 4.6.6（2）を用いると

$$\begin{aligned}&\left(h\,|\,\Gamma_0(Nl'^2)\begin{bmatrix}1&0\\0&p\end{bmatrix}\Gamma_0(Nl'^2/p)\right)(z)\\&=\left(\sum_{q|l'}q^{-k/2}(h_q|[\delta_p]_k)\,|\,\Gamma_0(Nl'^3q)\begin{bmatrix}1&0\\0&p\end{bmatrix}\Gamma_0(Nl'^3q/p)\right)(z)\\&=\sum_{q|l'}\left(h_q|\Gamma_0(Nl'^3)\begin{bmatrix}1&0\\0&p\end{bmatrix}\Gamma_0(Nl'^3/p)\right)(qz)\end{aligned}$$

となるから，$h\,|\,\Gamma_0(Nl'^2)\begin{bmatrix}1&0\\0&p\end{bmatrix}\Gamma_0(Nl'^2/p)$ の $e^{2\pi inz}$ の係数も $(n,\ l')=1$ ならば0である．よって，$f(z)-f_p(pz)=\sum_{n=0}^{\infty}b_ne^{2\pi inz}$ と書くと，$(n,\ l')=1$ ならば $b_n=0$ であることがわかった．従って帰納法の仮定により

$$f(z)-f_p(pz)=\sum_{q|l'}f_q(qz)\qquad (f_q(z)\in G_k(N/q,\chi))$$

と書ける．ここで q は $(l', N/m_\chi)$ の素因子を動く．よって（2）が示された．f が cusp 形式ならば，証明に現われる modular 形式はすべて cusp 形式であるから，特に f_p は cusp 形式にとれる．（証明終）

以降，cusp 形式のみ考える．

定義 $S_k(N, \chi)$ の部分空間 $S_k^1(N, \chi)$ を

$$\bigcup_M \bigcup_l \{f(lz) \mid f(z) \in S_k(M, \chi)\}$$

で生成される $S_k(N, \chi)$ の部分空間とする．ここで M は $m_\chi|M$, $M|N$, $M \neq N$ なる自然数を動き，l は N/M の約数（1 及び N/M も含む）を動く*．次に $S_k^0(N, \chi)$ を $S_k^1(N, \chi)$ の Petersson 内積に関する直交補空間，即ち

$$S_k^0(N, \chi) = S_k^1(N, \chi)^\perp$$

でもって定義する．$S_k^0(N, \chi)$ の元を **new form** と言う．定義より次の補題は明らかである．

補題 4.6.9 （1） χ が原始的ならば，$S_k(N, \chi) = S_k^0(N, \chi)$ である．

（2） $m_\chi|M$, $M|N$ ならば，$S_k(M, \chi) \subset S_k^1(N, \chi)$ である．

（3） $S_k(N, \chi)$ は

$$\bigcup_M \bigcup_l \{f(lz) \mid f(z) \in S_k^0(M, \chi)\}$$

で生成される．ここで M は $m_\chi|M$, $M|N$ なる自然数，l は N/M の約数（1 も含む）を動く．

補題 4.6.10 $(n, N) = 1$ ならば，$T(n)$ は $S_k^1(N, \chi)$ および $S_k^0(N, \chi)$ をそれ自身に写像する．

証明 $f(z) \in S_k^1(N, \chi)$ とすると定義により

$$f(z) = \sum_\nu f_\nu(l_\nu z), \qquad f_\nu \in S_k(M_\nu, \chi) \qquad (l_\nu M_\nu | N,\ M_\nu \neq N)$$

である．$g_\nu(z) = f_\nu(l_\nu z)$ とおくと，$(n, N) = 1$ ならば $(n, l_\nu N) = 1$ であるから $N_\nu = N/l_\nu$ とすると，

$$(f|^N T(n))(z) = \sum_\nu (g_\nu|^N T(n))(z)$$

---

* $S_k(M, \chi)$ における指標 χ は，勿論 $\mathrm{mod}\,N$ の指標 χ を $m_\chi|M$ であるから一意的に $\mathrm{mod}\,M$ の指標に拡張したものである．

$$=\sum_{\nu}(f_\nu|^{N_\nu}T(n))(l_\nu z)$$

$$=\sum_{\nu}(f_\nu|^{M_\nu}T(n))(l_\nu z)$$

である．よって，$f|^N T(n)\in S_k^1(N,\chi)$ となるので，$S_k^1(N,\chi)$ は ${}^N T(n)$ の作用で自分自身に写像される．$S_k(N,\chi)$ の変換として ${}^N T^*_{(n)}=\bar{\chi}(n){}^N T(n)$ であったから，$S_k^0(N,\chi)=S_k^1(N,\chi)^\perp$ も ${}^N T(n)$ の作用で全体として不変である．（証明終）

この補題により $S_k^0(N,\chi)$ および $S_k^1(N,\chi)$ は $T(n)$, $(n,N)=1$, の同時固有函数からなる基底を持っていることがわかる．

補題 4.6.11 L は自然数とする．$f(z)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n e^{2\pi inz}\in S_k^0(N,\chi)$ が $T(n)$, $(n,L)=1$, の同時固有函数であるならば，$a_1\neq 0$ である．

証明 $a_1=0$ と仮定する．L と互いに素なすべての自然数 n に対して $a_n=0$ ならば定理 4.6.8 により，$f(z)\in S_k^1(N,\chi)$ となり仮定に反するから，$m=\min\{n|(n,L)=1, a_n\neq 0\}$ とおくと $m>1$ である．p を m の素因子とし，$f|T(p)=c_p f$ とおく．両辺の $e^{2\pi i(m/p)z}$ の係数を，補題 4.5.14 を用いて比べると

$$c_p a_{m/p}=a_m$$

であるが，仮定により $a_{m/p}=0$ で $a_m\neq 0$ であるから矛盾が生じた．

（証明終）

補題 4.6.12 L は自然数とする．$f, g\in S_k(N,\chi)$ は $T(n)$, $(n,L)=1$, の同時固有函数で同じ固有値に属するとする．$f\in S_k^0(N,\chi)$ ならば，g は f の定数倍である．

証明 $f(z)$ の Fourier 展開を $f(z)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n e^{2\pi inz}$ と書く．補題 4.6.11 により $a_1\neq 0$ であるから，必要ならば a_1^{-1} を $f(z)$ に掛けることにより $a_1=1$ と仮定して差支えない．次に $g(z)$ を

$$g(z)=g^{(0)}(z)+g^{(1)}(z) \qquad (g^{(0)}\in S_k^0(N,\chi),\ g^{(1)}\in S_k^1(N,\chi))$$

と分解すると，補題 4.6.10 により $g^{(0)}$ および $g^{(1)}$ は $T(n)$, $(n,L)=1$, の同時固有函数で g と同じ固有値に属する．もし $g^{(0)}\neq 0$ ならば，$g^{(0)}(z)=\sum_{n=1}^{\infty}b_n e^{2\pi inz}$ とおくときに，補題 4.6.11 により $b_1\neq 0$ である．補題 4.5.15(1)

を用いると，$(n, N)=1$ ならば $f \mid T(n)=a_n f$ および $g^{(0)} \mid T(n)=\left(\frac{b_n}{b_1}\right) g^{(0)}$ となる．仮定により $(n, L)=1$ ならば $b_1 a_n=b_n$ であるから

$$g^{(0)}-b_1 f=\sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{2\pi i n z} \tag{4.6.15}$$

と書くと，$(n, L)=1$ ならば $c_n=0$ となる．よって定理 4.6.8 により $g^{(0)}-b_1 f \in S_k^1(N, \chi)$ となるから，$g^{(0)}-b_1 f=0$ を得る．次に $g^{(1)}=0$ であることを 2 段階に分けて示す．もし $N=m_\chi$ であるならば $S_k^{(1)}(N, \chi)=\{0\}$ であるから，$g^{(1)}=0$ であることは自明である．よって以下においては $N \neq m_\chi$ であると仮定する．

(i) $g^{(1)} \neq 0$ ならば，N の約数 M で $m_\chi | M$ となるものと，$S_k^0(M, \chi)$ の元 $h(z)$ であって，$h|^M T(n)=a_n h$ が N と素な任意の n に関して成り立つものが存在することを示す*．$g^{(1)}(z)$ は $S_k^1(N, \chi)$ の定義により

$$g^{(1)}(z)=\sum_\nu h_\nu(l_\nu z), \qquad h_\nu \in S_k^0(M_\nu, \chi) \quad (l_\nu M_\nu | N,\ M_\nu \neq N) \tag{4.6.16}$$

と書き表わされる．$S_k^0(M_\nu, \chi)$ は $T(n)$，$(n, L)=1$，の同時固有函数からなる基底を持つから，$h_\nu(z)$ は $T(n)$，$(n, N)=1$，の同時固有函数として差支えない．補題 4.6.2 により $h_\nu(l_\nu z)$ は $T(n)$，$(n, N)=1$，の同時固有函数である．異なる固有値に属する固有函数は 1 次独立であるから，$h_\nu(l_\nu z)$ のうちで $T(n)$ に関する固有値が a_n でないものの和は 0 となるので，それらを整理することによって (4.6.11) の右辺に表われるすべての h_ν は

$$h_\nu | T(n)=a_n h_\nu \qquad ((n, L)=1)$$

を満たすとして差支えない．よって h として h_ν のうち任意の 1 つをとり $M=M_\nu$ とすればよい．

(ii) $h(z)$ は (i) で求めた $S_k^0(M, \chi)$ の元とすると，h は $(n, L)=1$ となる n に関しては $T(n)$ $((n, L)=1)$ の同時固有函数であるから，$h(z)$ の Fourier 展開の $e^{2\pi i z}$ の係数を d とすると，補題 4.6.11 により $d \neq 0$ で

---

* $M|N$ であるならば，$(n, N)=1$ となる n に関しては ${}^N T(n)$ と ${}^M T(n)$ の $S_k(M, \chi)$ における作用は同じであるから (定理 4.5.10)，以降いずれも $T(n)$ と書くことにする．

あって (4.6.15) と同様に

$$h(z)-df(z)=\sum_{n=1}^{\infty} d_n e^{2\pi i n z}$$

と書くと $(n, L)=1$ ならば $d_n=0$ である．再び定理 4.6.8 を用いると

$$h(z)-df(z)\in S_k^1(N, \chi)$$

であるから，$f(z)=-\dfrac{1}{d}(h(z)-df(z))+\dfrac{1}{d}h(z)\in S_k^1(N, \chi)$ となるが，これは $f\in S_k^0(N, \chi)$ で $f\neq 0$ であることに矛盾するから，$g^{(1)}=0$ でなければならない． (証明終)

定理 4.6.13 $S_k^0(N, \chi)$ は，$R(N)$ および $R^*(N)$ の同時固有函数からなる基底を持つ．

証明 $S_k^0(N, \chi)$ は $(n, N)=1$ となるすべての $T(n)$ の同時固有函数からなる基底 $\{f_1, \cdots, f_r\}$ を持っている．f は $\{f_\nu\}$ のうちの1つとし，$(n, N)=1$ なる n に対して $f|T(n)=a_n f$ とおく．いま T が $R(N)$ の元ならば T は $(n, N)=1$ なる $T(n)$ とは可換であるから，$(f|T)|T(n)=(f|T(n))|T=a_n(f|T)$ となる．よって補題 4.6.12 により，常数 c が存在して $f|T=cf$ となる．次に T が $R^*(N)$ の元とする．$(n, N)=1$，ならば，$f|T(n)=\chi(n)(f|T^*(n))$ であるから T は $T(n)$，$(n, N)=1$，の作用と可換である．よって，$R(N)$ の場合と同様にして $f|T$ は f の常数倍である．故に $\{f_1\cdots f_r\}$ は $R(N)$ および $R^*(N)$ の同時固有函数である． (証明終)

定義 $S_k(N, \chi)$ の元 $f(z)$ が次の (i) および (ii) をみたすときに，$f(z)$ は level N の**原始的な cusp 形式** (primitive form) であると言う．

(i) $f\in S_k^0(N, \chi)$ で，$f(z)$ は $R(N)$ の同時固有函数である．

(ii) $f(z)=\sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{2\pi i n z}$ を $f(z)$ の Fourier 展開であるとすると，$a_1=1$ である．

定理 4.6.13 により，原始的な cusp 形式 $f(z)$ は $R^*(N)$ の同時固有函数でもあり，補題 4.6.10, 4.6.11 により $S_k^0(N, \chi)$ は原始的な cusp 形式からなる基底を持つ．

系 4.6.14 $S_k(N, \chi)$ の元 f が $T(n)$，$(n, N)=1$，の同時固有函数とす

る．$f|T(n)=a_nf$ とすると，N の約数 M と $S_k^0(M,\chi)$ の原始的な元 g で $g|T(n)=a_ng$, $(n,N)=1$ となるものが存在する．$f\notin S_k^0(N,\chi)$ ならば $M\neq N$ である．

証明 f が $S_k^0(N,\chi)$ の元ならば，定理 4.6.13 により明らかである．$f\notin S_k^0(N,\chi)$ ならば，補題 4.6.12 の証明中の（i）により，N の真の約数 M と $S_k^0(M,\chi)$ の元 g であって，n が N と互いに素ならば $g|T(n)=a_ng$ が成り立つようなものが存在する．$S_k^0(M,\chi)$ は原始的な元からなる基底を持つから g は原始的であるようにとれる．（証明終）

$S_k^0(N,\chi)$ の元 f は原始的な元であるとし，$f(z)=\sum_{n=1}^{\infty}a_ne^{2\pi inz}$ が f の Fourier 展開であるとする．定理 4.5.16 により $f|T(n)=a_nf$ であるが $T(n)$ と $T^*(n)$ は Petersson 内積に関して随伴作用素であるから

$$f|T^*(n)=\bar{a}_nf$$

である．さらに $(n,N)=1$ ならば定理 4.5.2 により

$$\bar{a}_n=\bar{\chi}(n)a_n \tag{4.6.17}$$

が成り立っていた．また $f|[\omega_N]_k\in S_k(N,\bar{\chi})$ であるが，定理 4.5.4 により任意の自然数 n に対して

$$\begin{aligned}(f|[\omega_N]_k)|T(n)&=\bar{a}_nf|[\omega_N]_k\\(f|[\omega_N]_k)|T^*(n)&=a_nf|[\omega_N]_k\end{aligned} \tag{4.6.18}$$

となることがわかる．

定理 4.6.15 （1） “$f\longmapsto f|[\omega_N]_k$” は $S_k^0(N,\chi)$ および $S_k^1(N,\chi)$ を $S_k^0(N,\bar{\chi})$ および $S_k^1(N,\bar{\chi})$ に写像し，この対応によって $S_k^0(N,\chi)\cong S_k^0(N,\bar{\chi})$, $S_k^1(N,\chi)\cong S_k^1(N,\bar{\chi})$ である．

（2） $f(z)$ は $S_k^0(N,\chi)$ の原始的な元とする．Fourier 展開を $f(z)=\sum_{n=1}^{\infty}a_ne^{2\pi inz}$ とするときに，$g(z)=\sum_{n=1}^{8}\bar{a}_ne^{2\pi inz}$ とおくと，$g(z)$ は $S_k(N,\bar{\chi})$ の原始的な元であって，$f|[\omega_N]_k$ は g の定数倍である．

証明 $[\omega_N]_k$ により $S_k^1(N,\chi)$ が $S_k^1(N,\chi)$ に写像されることを示そう．そのためには M が N の約数（$M\neq N$）でかつ $m_\chi|M$ となる自然数，l が $lM|N$ となる自然数であるときに，$f(z)=h|[\delta_l]_k$ （$h\in S_k(M,\chi)$）ならば

$f|[\omega_N]_k \in S_k^1(N, \bar{\chi})$ であることを示せばよい．$l'=N/lM$ とおくと $\delta_l\omega_N\delta_{l'}^{-1}=l\cdot\omega_M$ であるから

$$(4.6.19)\qquad f|[\omega_N]_k=h|[\delta_l\omega_N\delta_{l'}^{-1}\delta_{l'}]_k=(h|[\omega_M]_k)|[\delta_{l'}]_k$$

である．$h|[\omega_M]_k\in S_k(M, \bar{\chi})$ であるから，$f|[\omega_N]_k\in S_k^1(N, \chi)$ を得る．次に $f\in S_k^0(N,\chi)$ とする．$\omega'_N=-\omega_N$ とおくと定理 2.8.2 により，$S_k^1(N,\bar{\chi})$ の任意の元 g に対して

$$(f|[\omega_N]_k,\ g)=(f,\ g|[\omega'_N]_k)=(-1)^k(f,\ g|[\omega_N]_k)=0$$

となるから $f|[\omega_N]_k\in S_k^0(N, \chi)$ である．更に (4.6.18) と補題 4.6.12 により $g(z)$が存在し $f|[\omega_N]_k$ は $g(z)$ の常数倍となることがわかる．$g(z)$ が原始的な元であることは明らかである． （証明終）

$f(z)$ は $S_k(N, \chi)$ の原始的な元であるとし，$f(z)=\sum_{n=1}^{\infty}a_ne^{2\pi inz}$ を $f(z)$ の Fourier 展開であるとすると，定理 4.5.16 により

$$\begin{aligned}L(s;\ f)&=\prod_p(1-a_pp^{-s}+\chi(p)p^{k-1-2s})^{-1}\\&=\prod_{p\nmid N}(1-a_pp^{-s}+\chi(p)p^{k-1-2s})^{-1}\times\prod_{p|N}(1-a_pp^{-s})^{-1}\end{aligned}$$

なる Euler 積を持った．$p\nmid N$ であるならば $|a_p|\leqq 2p^{(k-1)/2}$ であることは，証明なしで述べたが，これに類似の評価は N を割る p については容易に求められるのでそれを述べる．N の各々の素因子 p に対して，N_p は N の p 巾成分とし，χ_p は (3.1.4) で定義される mod N_p の指標とする．N の素因子 q を 1 つ固定し，また，$\chi'=\prod_{p\neq q}\chi_p$ とおく．次に $SL_2(\boldsymbol{Z})$ の元 γ_q および γ'_q を

$$(4.6.20)\qquad \gamma_q\equiv\begin{cases}\begin{bmatrix}0&-1\\1&0\end{bmatrix} & (\mathrm{mod}\ N_q^2)\\ \begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix} & (\mathrm{mod}(N/N_q)^2),\end{cases}\qquad \gamma'_q\equiv\begin{cases}\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix} & (\mathrm{mod}\ N_q^2)\\ \begin{bmatrix}0&-1\\1&0\end{bmatrix} & (\mathrm{mod}(N/N_q)^2)\end{cases}$$

にとり

$$(4.6.21)\qquad \eta_q=\gamma_q\begin{bmatrix}N_q&0\\0&1\end{bmatrix},\qquad \eta'_q=\gamma'_q\begin{bmatrix}N/N_q&0\\0&1\end{bmatrix}$$

と定義する．$\eta_q\Gamma_0(N)\eta_q^{-1}=\Gamma_0(N)$，$\eta'_q\Gamma_0(N)\eta_q'^{-1}=\Gamma_0(N)$ となること，および，

γ が $\Gamma_0(N)$ の元ならば

$$\chi(\eta_q^{-1}\gamma\eta_q)=(\chi'\bar{\chi}_q)(\gamma),\qquad \chi(\eta_q'^{-1}\gamma\eta_q')=(\bar{\chi}'\chi_q)(\gamma)$$

となることは容易に確められる．よって

$$[\eta_q]_k : S_k(N,\chi) \xrightarrow{\sim} S_k(N,\chi'\bar{\chi}_q),\ [\eta_q'] : S_k(N,\chi) \xrightarrow{\sim} S_k(N,\bar{\chi}'\chi_q)$$

であるが，定理 4.5.3(2) および定理 4.5.5 と同様の議論で，次の 2 つの図式は可換であることがわかる．

(4.6.22)

$(n, N_q)=1$ ならば　　　　　　$(n, N/N_q)=1$ ならば

$$\begin{array}{ccc} S_k(N,\chi) & \xrightarrow{\bar{\chi}_q(n)T(n)} & S_k(N,\chi) \\ \downarrow{\scriptstyle [\eta_q]_k} & & \downarrow{\scriptstyle [\eta_p]_k} \\ S_k(N,\chi'\bar{\chi}_q) & \xrightarrow{T(n)} & S_k(N,\chi'\bar{\chi}_p), \end{array}\qquad \begin{array}{ccc} S_k(N,\chi) & \xrightarrow{\bar{\chi}'(n)T(n)} & S_k(N,\chi) \\ \downarrow{\scriptstyle [\eta'_q]_k} & & \downarrow{\scriptstyle [\eta'_q]_k} \\ S_k(N,\bar{\chi}'\chi_q) & \xrightarrow{T(n)} & S_k(N,\bar{\chi}'\chi_q) \end{array}$$

特に $S_k(N,\chi)$ の元 f が $T(n)$, $(n, N)=1$, の同時固有函数であるならば，$S_k(N,\chi'\bar{\chi}_q)$ の元 $f|[\eta_q]_k$ および $S_k(N,\bar{\chi}'\chi_q)$ の元 $f|[\eta_q']_k$ は $T(n)$, $(n, N)=1$, の同時固有函数である．このことを用いると，定理 4.6.15 と全く同様の議論で，次の定理の (1) が示される．

定理 4.6.16 [浅井]　上の記号と仮定の下に

(1)　$[\eta_q]_k$ は $S_k^0(N,\chi)\cong S_k^0(N,\chi'\bar{\chi}_q)$ および $S_k^1(N,\chi)\cong S_k^1(N,\chi'\bar{\chi}_q)$ を引き起こし，$[\eta_q']_k$ は $S_k^0(N,\chi)\cong S_k^0(N,\bar{\chi}'\chi_q)$ および $S_k^1(N,\chi)\cong S_k^1(N,\bar{\chi}'\chi_q)$ を引き起こす．

(2)　f を $S_k(N,\chi)$ の元とすると

$$f|[\eta_q^2]_k=\chi_q(-1)\bar{\chi}'(N_q)f,\quad f|[\eta_q'^2]_k=\chi'(-1)\bar{\chi}_q(N/N_q)f,$$
$$f|[\eta_q\eta_q']_k=\bar{\chi}'(N_q)f|[\omega_N]_k$$

が成り立つ．

(3)　f は $S_k^0(N,\chi)$ の原始的な元とする．$f|[\eta_q]_k=c\left(\sum_{n=1}^{\infty}b_ne^{2\pi inz}\right)$, $b_1=1$, と書き，$g_q(z)=\sum_{n=1}^{\infty}b_ne^{2\pi inz}$ とおくと $g_q(z)$ は $S_k(N,\chi'\bar{\chi}_q)$ の原始的な元であって，特に素数 p に対しては

$$b_p=\begin{cases}\bar{\chi}_q(p)a_p & (p\neq q)\\ \chi'(p)\bar{a}_p & (p=q)\end{cases}$$

が成り立つ.

証明 (2)を示そう. $\gamma=\eta_q\eta'_q\omega_N^{-1}$ とおくと

$$\gamma\equiv\begin{cases}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix} & (\mathrm{mod}\ N_q)\\ \begin{bmatrix}q^e & 0\\ 0 & q^{-e}\end{bmatrix} & (\mathrm{mod}\ (N/N_q))\end{cases} \tag{4.6.23}$$

が成り立つ. よって $f|[\eta_q\eta'_q]_k=f|[\gamma\omega_N]_k=\bar{\chi}'(q^e)f|[\omega_N]_k$ が成り立つ. 他の等式についても同様である. (3)を示そう. n が q と素であるならば (4.6.22) により

$$(f|[\eta_q]_k)|T(n)=\bar{\chi}_q(n)(f|T(n)|[\eta_q]_k=\bar{\chi}_q(n)a_nf|[\eta_q]_k \tag{4.6.24}$$

であり, n が (N/N_q) と素であるならば

$$(f|[\eta'_q]_k|)|T(n)=\bar{\chi}'(n)a_n(f|[\eta'_q]_k) \tag{4.6.25}$$

である. (1)により $f|[\eta_q]_k\in S_k^0(N,\chi\bar{\chi}_q)$ であるから, $f|[\eta_q]$ は原始的な元の定数倍となり前半がわかる. (4.6.24) において, 特に n を素数 p とすると,

$$b_p=\bar{\chi}_q(p)a_p \qquad (p\neq q)$$

である. さらに (2) より $f|[\eta_q]_k=cf|[\omega_N\eta'_q]_k$, $c=\chi'(-1)\bar{\chi}'(q^e)\bar{\chi}_q(N/q^e)$ $=\bar{\chi}'(N_q)\bar{\chi}_q(-N/N_q)$ と書けるから

$$(f|[\eta_q]_k)|T(q)=c(f|[\omega_N\eta'_q]_k)|T(q)$$

である. $f|[\omega_N]_k\in S_k(N,\bar{\chi})$ であるから (4.6.25) を適用すると

$$\begin{aligned}&=c\chi'(q)((f|[\omega_N])|T(q))|[\eta'_q]_k\\ &=c\chi'(q)\bar{a}_qf|[\omega_N\eta'_q]_k\\ &=\chi'(q)\bar{a}_q(f|[\eta_q]_k)\end{aligned}$$

である. 従って

$$b_q=\chi'(q)\bar{a}_q$$

を得る. (証明終)

定理 4.6.17 $f(z)$ は $S_k(N,\chi)$ の原始的な元とし, その Fourier 展開を $f(z)=\sum_{n=1}^{\infty}a_ne^{2\pi inz}$ と書く. χ の conductor は m とし, N の素因子 q に対

し，N_q および m_q でもって N および m の q 巾成分を表わす．

（1） $N_q=m_q$ ならば，$|a_q|=q^{(k-1)/2}$ である．

（2） $N_q=q$，$m_q=1$ ならば，$a_q^2=\bar{\chi}'(q)q^{k-2}$ である．

（3） （1）および（2）以外の場合（$q^2|N$ でかつ $N_q\neq m_q$）には，$a_q=0$ である．

証明 （1） γ_q および η_q は (4.6.20) および (4.6.21) で定義した $GL_2(\boldsymbol{Z})$ の元とする．自然数 a が q と素であるときに，自然数 b を $ab+1\equiv 0 \pmod{N_q}$ でかつ $a\equiv b \pmod{N/N_q}$ であるようにとり，γ を

$$\begin{bmatrix} 1 & a \\ 0 & q_e \end{bmatrix}\gamma_q=\gamma\begin{bmatrix} 1 & b \\ 0 & q^e \end{bmatrix}$$

でもって定義すると，$\gamma\in SL_2(\boldsymbol{Z})$ でありさらに

$$\gamma\equiv\begin{cases}\begin{bmatrix} a & * \\ 0 & -b \end{bmatrix} & \pmod{N_q} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} & \pmod{N/N_q}\end{cases}$$

が成り立っている．よって $\gamma\in\Gamma_0(N)$ で $\chi(\gamma)=\chi_q(-b)$ であるから

$$f\left|\left[\begin{bmatrix} 1 & a \\ 0 & N_q \end{bmatrix}\gamma_q\right]_k=\chi_q(-b)f\right|\begin{bmatrix} 1 & b \\ 0 & N_q \end{bmatrix}_k$$

が成り立つ．$N_q=q^e$ とおき，a が $(\boldsymbol{Z}/q^e\boldsymbol{Z})^\times$ の代表系を動く和を $\sum_a'$ と書くと

$$\begin{aligned}(4.6.26)\qquad & q^{e(k/2-1)}\left(\sum_a' f\left|\begin{bmatrix} 1 & a \\ 0 & q^e \end{bmatrix}_k\right.\right)\Bigg|[\eta_q]_k \\ &=q^{e(k/2-1)}\left(\sum_a'\chi_p(-a)f\left|\begin{bmatrix} 1 & a \\ 0 & q^e \end{bmatrix}_k\right.\right)\Bigg|\begin{bmatrix} q^e & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}_k \\ &=q^{e(k-1)}\chi_q(-1)\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_a'\chi_q(a)e^{2\pi ina/qe}\right)a_ne^{2\pi inz} \\ &=\left(q^{e(k-1)}W(\chi_q)\right)\sum_{n=1}^{\infty}\bar{\chi}_q(-n)a_ne^{2\pi inz}\end{aligned}$$

が成り立つ．一方，補題 4.5.6 により

$$(4.6.27)\qquad q^{e(k/2-1)}\sum_a{}' f\left|\begin{bmatrix}1 & a\\ 0 & q^e\end{bmatrix}_k\right. = f\,|\,T(q^e)-q^{k/2-1}f\,|\,T(q^{e-1})\left|\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & q\end{bmatrix}_k\right.$$
$$= a_q^e f - q^{k/2-1}a_q^{e-1}f\left|\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & q\end{bmatrix}_k\right.$$

であるから,

$$(4.6.28)\qquad q^{e(k/2-1)}\left(\sum_a{}' f\left|\begin{bmatrix}1 & a\\ 0 & q^e\end{bmatrix}_k\right.\right)|[\eta_q]_k$$
$$= a_q^e f\,|[\eta_q]_k - \chi'(q)q^{k/2-1}a_q^{e-1}(f\,|[\eta_q]_k)\left|\begin{bmatrix}q & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}_k\right.$$

である. $g(z)$ を $f|[\eta_q]$ の定数倍である $S_k(N,\chi'\bar{\chi}_q)$ の原始的な元とし, $g(z)=\sum_{n=1}^{\infty}b_n e^{2\pi inz}$ および $f|[\eta_q]=cg$ とおく. (4.6.25) と (4.6.28) の右辺の $e^{2\pi iz}$ および $e^{2\pi iqz}$ の係数を調べると

$$(4.6.29)\qquad \chi_q(-1)q^{e(k/2-1)}W(\chi_q)=ca_q^e$$

$$(4.6.30)\qquad ca_q^e b_q - c\chi'(q)q_k^{-1}a_q^{e-1}=0$$

を得る. (4.6.30) と定理 4.6.16(3) により $|a_q|^2=q^{k-1}$ を得る. また (4.6.31) により

$$(4.6.31)\qquad c=\chi_q(-1)W(\chi_q)q^{e(k/2-1)}/a_q^e$$

もわかる. 次に (2) を示そう. $N_q=q$ であるから, 補題 4.5.11 により

$$\Gamma_0(N)\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & q\end{bmatrix}\Gamma_0(N/q)=\Gamma_0(N)\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & q\end{bmatrix}\Gamma_0(N)\coprod\Gamma_0(N)\eta_q$$

がわかる. よって

$$f\,|\,\Gamma_0(N)\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & q\end{bmatrix}\Gamma_0(N/q)=f\,|\,T(q)+q^{k/2-1}\chi'(q)f\,|[\eta_q]_k$$

であるが, n を N と素な自然数とすると, $T(n)$ は $T(q)$ と可換であり, また (4.6.16) により $[\eta_q]_k$ は $T(n)$ と可換であるので,

$$g=f\,|\,\Gamma_0(N)\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & q\end{bmatrix}\Gamma_0(N/q)$$

とおくと g は $T(n)$, $(n,N)=1$, の同時固有函数で, f と同じ固有値に属す

る $S_k(N/q, \chi)$ の元である．補題 4.6.12 により

(4.6.32) $a_q f + q^{k/2-1}\chi'(q) f|[\eta_q]_k$ は f の常数倍となるが $g=0$ ならば f が原始的であることに矛盾するから $g=0$ である

となる．この両辺に $[\eta_q]_k$ を施して $q^{-k/2+1}a_q^2 = q^{k/2-1}\chi'(q)$，即ち

$$a_q^2 = \chi'(q)q^{k-2} \tag{4.6.33}$$

を得る．さらに (4.6.32) により

$$f|[\eta_q] = -a_q q^{1-k/2}\chi'(q) f \tag{4.6.34}$$

となることもわかる．最後に（3）をみよう．補題 4.5.11 によって

$$\Gamma_0(N)\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & q\end{bmatrix}\Gamma_0(N/q) = \Gamma_0(N)\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & q\end{bmatrix}\Gamma_0(N)$$

であるから，（2）と同様の理由で

$$f\,|\,T(q) = f\,|\,\Gamma_0(N)\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & q\end{bmatrix}\Gamma_0(N/q) = 0$$

となり，（3）が示された． （証明終）

この証明中の (4.6.31) および (4.6.34) を改めて系として述べておく．

系 4.6.18 記号および仮定は定理 4.6.16 および定理 4.6.17 の通りとすると

（1） $N_q = m_q$ ならば，$f|[\eta_q]_k = \chi_q(-1)W(\chi_q)q^{e(k/2-1)}/a_q^e)g$ である．ここで g は $S_k(N, \chi'\bar{\chi}_p)$ の原始的な元である．

（2） $N_q = q$, $m_q = 1$ ならば，$f|[\eta_q]_k = -a_q\chi'(q)q^{-k/2+1}f$ であり，$\bar{a}_q = \overline{\chi'(q)}a_q$ が成りたつ．

定理 4.6.19 $f(z)$ は $S_k(N, \chi)$ の元で $R(N)$ および $R^*(N)$ の同時固有函数とし，$g(z)$ は $S_k(M, \lambda)$ の原始的な元であるとする．$f(z)$ および $g(z)$ が

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{2\pi i n z},\quad a_1 = 1;\qquad g(z) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{2\pi i n z},\quad b_1 = 1$$

なる Fourier 展開を持つとする．もし自然数 L が存在して $(n, L) = 1$ であるならば $a_n = b_n$ が成り立つとすると，$N = M$, $\chi = \lambda$ で $f(z) = g(z)$ が成り立つ．

証明 L は N および M の倍数であると仮定して差支えない．もし p が L を割らない素数ならば，補題 4.5.7 (2) により

$$p^{k-1}\chi(p)=a_p^2-a_{p^2}=b_p^2-b_{p^2}=p^{k-1}\lambda(p)$$

が成り立つから，χ と λ は，本質的に同じで，$(n, NM)=1$ ならば $\chi(n)=\lambda(u)$ である．さて系 4.3.6 により

$$\frac{\Lambda_N(s;\ f)}{\Lambda_M(s;\ g)}=\frac{\psi(N)}{\psi(M)}\frac{\Lambda_N(k-s;\ f|[\omega_N]_k)}{\Lambda_M(k-s;\ g|[\omega_M]_k)} \tag{4.6.35}$$

が成り立つ．$\mathrm{Re}(s)>\dfrac{k}{2}+1$ においては $L(s;\ f)$ は Euler 積を持つから

$$\frac{\Lambda_N(s;\ f)}{\Lambda_M(s;\ g)}=\left(\frac{\sqrt{N}}{\sqrt{M}}\right)^s\prod_{p|L}\frac{1-b_pp^{-s}+\lambda(p)p^{k-1-2s}}{1-a_pp^{-s}+\chi(p)p^{k-1-2s}} \tag{4.6.36}$$

と書けるが，この右辺は s の有理型函数であるから (4.6.36) は実は全平面で成り立っている．定理 4.5.15 (2) を用いると，全く同様に全平面で

$$\frac{\Lambda_N(k-s;\ f|[\omega_N]_k)}{\Lambda_M(k-s;\ g\ |[\omega_M]_k)}=c\left(\frac{\sqrt{N}}{\sqrt{M}}\right)^{k-s}\prod_{p|L}\frac{1-\bar{b}_pp^{s-k}+\bar{\lambda}(p)p^{2s-k-1}}{1-\bar{a}_pp^{s-k}+\bar{\chi}(p)p^{2s-k-1}} \tag{4.6.37}$$

が成り立つことがわかる．(4.6.36) と (4.6.37) を (4.6.35) に代入すると

$$\left(\frac{N}{M}\right)^s\prod_{p|L}\frac{1-b_pp^{-s}+\lambda(p)p^{k-1-2s}}{1-a_pp^{-s}+\chi(p)p^{k-1-2s}}=c\left(\frac{\sqrt{N}}{\sqrt{M}}\right)^k\prod_{p|L}\frac{1-b_pp^{s-k}+\bar{\lambda}(p)p^{2s-k-1}}{1-\bar{a}_pp^{s-k}+\bar{\chi}(p)p^{2s-k-1}}$$

が成り立つ．M および N の p 巾成分を各々 M_p および N_p で表わすと，補題 3.2.1 により

$$\left(\frac{N_p}{M_p}\right)^s\frac{1-b_pp^{-s}+\lambda(p)p^{k-1-2s}}{1-a_pp^{-s}+\chi(p)p^{k-1-2s}}=c_p\frac{1-b_pp^{s-k}+\bar{\lambda}(p)p^{2s-k-1}}{1-\bar{a}_pp^{s-k}+\bar{\chi}(p)p^{2s-k-1}} \tag{4.6.38}$$

が L の任意の素因子 p について成り立つ．ここで c_p は定数である．さて $1-a_pp^{-s}+\chi(p)p^{k-1-2s}$ および $1-b_pp^{-s}+\lambda(p)p^{k-1-2s}$ を p^{-s} の多項式と考えたときの次数を各々 u および v とする．$0\leqq u, v\leqq 2$ である．

1° もし $u=v$ ならば，(4.6.38) により $M_p=N_p$ である．

2° $u=0$ で $v=1$ と仮定する．$(N_p/M_p)=p^e$ とし，$x=p^{-s}$ とおくと，(4.6.29) は

$$(1-b_px)=c_px^e(1-b_pp^{-k}x^{-1}),\qquad b_p\neq 0$$

と書けるから，$|b_p|^2=p^k$ となるが，これは定理 4.6.17 に矛盾する．よって

$u=0$ で $v=1$ となることはない．逆に $u=1$ で $v=0$ と仮定すると，$M_p=N_p p$ である．

3° $u=0$ で $v=2$ と仮定する．$(N_p/M_p)=p^e$ とし $x=p^{-s}$ とおくと，(4.6.38) は

$$(4.6.39)\quad 1-b_p x+\lambda(p)p^{k-1}x^2=c_p x^e(1-\bar{b}_p p^{-k}x^{-1}+\bar{\lambda}(p)p^{-k-1}x^{-2})$$

となる．両辺の次数を比べると $e=2$ でなければならないが，$\lambda(p)p^{k-1}\neq\lambda(p)p^{k+1}$ であるから，(4.6.39) が成立することはない．よって $u=0$ で $v=2$ となることはない．逆に $u=2$ で $v=0$ と仮定すると，$M_p=N_p p^2$ でなければならない．

4° $u=1$ で $v=2$ と仮定する．$(N_p/M_p)=p^e$ とし，$x=p^{-s}$ とおくと (4.6.38) は

$$(4.6.40)\quad \frac{1-b_p x+\lambda(p)p^{k-1}x^2}{1-a_p x}=c_p x^e\frac{1-\bar{b}_p p^{-k}x^{-1}+\bar{\lambda}(p)p^{-k-1}x^{-2}}{1-\bar{a}_p p^{-k}x^{-1}}$$

である．定理 4.5.17 により $t^2-b_p t+\lambda(p)p^{k-1}=0$ の２根の絶対値は $p^{(k-1)/2}$ に等しく，$\bar{\lambda}(p)p^{-k-1}t^2-\bar{b}_p p^{-k}t+1=\bar{\lambda}(p)p^{-k-1}(t^2-b_p pt+\lambda(p)p^{k+1})=0$ の２根の絶対値は $p^{(k+1)/2}$ であるから，(4.6.40) が成り立つことはない．よって $u=1$ で $v=2$ となることはない．逆に $u=2$ で $v=1$ と仮定すると $M_p=N_p p$ でなければならない．

以上によって，$N|M$ であることがわかった．そこで補題 4.6.12 および系 4.6.14 を用いることにより，$N=M$ で $f(z)=g(z)$ となることが示される．

（証明終）

この定理と系 4.6.14 により次の系を得る．

系 4.6.20 $f(z)$ は $S_k(N,\chi)$ の 0 でない元とする．$f|T(n)=a_n f$ が N と互いに素な任意の自然数 n に対して成り立つならば，N の約数 M と $S_k(M,\chi)$ の原始的な元 $g(z)$ で，$g|T(n)=a_n g$，$(n,N)=1$，となるものが一意的に存在する．

これから直ちに次の系を得る．

系 4.6.21 $f(z)$ は $S_k(N,\chi)$ の元とする．$f(z)$ が $R(N)$ および $R^*(N)$

の同時固有函数であるならば，$f(z)$ は $S_k^0(N, \chi)$ の元で原始的な元の定数倍である．

§4.7　Eisenstein 級数

§4.3 において，正則な modular 形式は対応する Dirichlet 級数の函数等式によって特徴づけられることを述べた．それでは一体正則な modular 形式に対応する Dirichlet 級数とは一体どのようなものであろうか．その1つの答として §4.1 において $N=1$ 即ち $SL_2(\boldsymbol{Z})$ の Eisenstein 級数に対応する Dirichlet 級数は Riemann の ζ 函数の積に外ならないことを見た．この節では，この一般化として，$G_k(N, \chi)$ における $S_k(N, \chi)$ の補空間（Eisenstein 級数の空間と呼ばれる）の元は2つの Dirichlet の L 函数の積に対応していることを示す．このことは Hecke によって (4.1.3) で定義した Eisenstein 級数を拡張することにより保型形式を具体的に構成することにより示された*．ここでは，$k=1, 2$ の場合も統一的に論じるために，Weil の定理を用いて逆に Dirichlet 級数から保型形式を構成する．

さて χ_1, χ_2 は各々 $\bmod M_1$ および $\bmod M_2$ で定義される Dirichlet の指標とする．χ_1, χ_2 を指標に持つ Dirichlet の L 函数の積

$$\varphi(s)=L(s, \chi_1)L(s-k+1, \chi_2)$$

を考える．ここで k は自然数である．$\varphi(s)$ は $\mathrm{Re}(s)>k$ において

$$\begin{aligned}\varphi(s)&=\prod_p[(1-\chi_1(p)p^{-s})(1-\chi_2(p)p^{k-1}p^{-s})]^{-1}\\&=\sum_{n=1}^{\infty}a_n n^{-s}\end{aligned}$$

と表わされる．ここで

(4.7.1)
$$a_n=\sum_{\substack{dd'=n\\ d,d'>0}}\chi_1(d)\chi_2(d')d'^{k-1}$$

である．χ_1, χ_2 を適当にとれば $\varphi(s)$ が保型形式に対応する Dirichlet 級数であ

---

*　$k=1, 2$ の場合には (4.1.3) の形の級数は収束しないので，助変数 s をつけて級数を定義し s に関して解析接続してやる必要がある．$k=1, 2$ の場合の Eisenstein 級数については §7.2 においても述べる．

ることを示そう．そのために $\chi=\chi_1\chi_2$, $M=M_1M_2$ とおく．以下 $\chi(-1)=(-)^k$ であり，更に χ_1 および χ_2 は次の（i）または（ii）を満たすとする．

（i） $k=2$ で χ_1 および χ_2 が単位指標ならば，$M_1=1$ で M_2 は相異なる素数の積である．

（ii）（i）以外の場合には χ_1 および χ_2 は原始的である．

先ず，$G_k(M,\chi)$ の元 f で $L(s;f)=\varphi(s)$ となるものが存在すると仮定する．

1° 上の（ii）の場合には，$\delta_i=\delta_{\chi_i}$ $(i=1,2)$ とおくと

$$\Lambda(s,\chi_1)\Lambda(s-k+1,\chi_2)=2\sqrt{\pi}\left(\frac{M_2}{\pi}\right)^{1-k/2}\mu(s)^{-1}\Lambda_M(s;f), \tag{4.7.2}$$

$$\mu(s)=\begin{cases}\left(\dfrac{s-k+1+\delta_2}{2}\right)\left(\dfrac{s-k+1+\delta_2}{2}+1\right)\cdots\left(\dfrac{s}{2}-1\right) & (k\neq1,2\ \text{で}\ \delta_1=1)\\ \left(\dfrac{s-k+1+\delta_2}{2}\right)\left(\dfrac{s-k+1+\delta_2}{2}+1\right)\cdots\left(\dfrac{s-1}{2}\right) & (k\neq1\ \text{で}\ \delta_1=0)\\ 1 & (k=1,\ \text{および}\ k=2\ \text{かつ}\ \delta_1=1)\end{cases}$$

であるから定理 3.2.2 と系 3.3.2 により $\Lambda_M(s;f)$ は $s=0,k$ 以外では正則であり $s=0,k$ では高々1位の極を持つ．$k\neq1$ ならば $\chi_1\neq$単位指標 のときに $\Lambda_M(s;f)$ は $s=0$ で正則であり，$k=1$ ならば χ_1 および χ_2 が共に単位指標でないときに $\Lambda_M(s;f)$ は $s=0$ で正則である．それ以外のときには $\Lambda_M(s;f)$ は $s=0$ において留数が

$$a_0=(-1)^{\delta_\chi}W(\chi)\frac{(k-1)!M^{k-1}}{(-2\pi i)^k}L(k,\bar{\chi}) \tag{4.7.3}$$

となる1位の極を持つ．

2° 上の（i）の場合（$k=2$ で χ_1, χ_2 が単位指標の場合）には，$\Lambda(s)=\pi^{-s/2}\Gamma\left(\dfrac{s}{2}\right)\zeta(s)$（$\zeta(s)$：Riemann ζ 函数）とおくと

$$\Lambda(s)\Lambda(s-1)=4\pi(s-1)^{-1}\prod_{p|M}(1-p^{1-s})^{-1}N^{-s/2}\Lambda_M(s;f)$$

である．故に $\Lambda_M(s;f)$ は $s=0,2$ 以外では正則で $s=0,2$ においては1位の極を持ち，$s=0$ における留数は

$$a_0=-\frac{1}{4\pi^2}\prod_{p|M}(1-p)\zeta(2) \tag{4.7.4}$$

である．

以上の考察により，もし $G_k(M,\chi)$ の元 $f(z)$ で $L(s;\ f)=L(s,\chi_1)\times L(s-k+1,\chi_2)$ となるものが存在するならば，$f(z)$ の定数項は上で得た a_0 でなければならない．

定理 4.7.1　χ_1,χ_2 は（i）または（ii）を満たす mod M_1 および mod M_2 の Dirichlet の指標とする．$M=M_1M_2$，$\chi=\chi_1\chi_2$ とおいたとき，k が $\chi(-1)=(-1)^k$ なる自然数ならば

$$L(s;\ f)=L(s,\chi_1)L(s-k+1,\chi_2)$$

となるような $G_k(M,\chi)$ の元 $f(z)$ が存在する．さらに $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_ne^{2\pi inz}$ とすると

$$a_0=\begin{cases}0 & \left(\begin{array}{l}k\neq 1 \text{ で } \chi_1\neq\text{単位指標，または } k=1 \text{ で}\\ \chi_1 \text{ および } \chi_2 \text{ が共に単位指標でない場合}\end{array}\right)\\[2mm] -\dfrac{1}{24}\prod_{p|M}(1-p) & (k=2 \text{ で } \chi_1,\chi_2 \text{ が単位指標})\\[2mm] \dfrac{(-1)^{k-1}}{2k}B_{k,\chi} & (\text{それ以外})\end{cases}$$

である．

証明　$a_n\ (n\geqq 1)$ は $L(s,\chi_1)L(s-k+1,\chi_2)$ の n^{-s} の係数とし，a_0 を χ_1 および χ_2 が（i）または（ii）を満たすに従って (4.7.3) または (4.7.4) で定義し

$$f(z)=f(z;\ \chi_1,\chi_2)=\sum_{n=0}^{\infty}a_ne^{2\pi inz}$$

とおく．(4.7.1) と補題 4.3.2 により，$f(z)$ は (4.3.7) の条件を満足している．この $f(z)$ が $G_k(N,\chi)$ に属することを Weil の定理（定理 4.3.14）を用いて示そう．ψ は原始的な Dirichlet の指標で conductor m が M と素なものとする．$L(s;\ f,\psi)$ を (4.3.18) で定義した Dirichlet 級数とすると

$$L(s;\ f,\psi)=L(s;\ \chi_1\psi)L(s-k+1;\ \chi_2\psi)$$

である．先ず χ_1,χ_2 が（ii）を満たすと仮定する．このときは (4.7.2) と同様に $\delta_i'=\delta_{\chi_i\psi}\ (i=1,2)$ とおくと

(4.7.5)
$$\begin{aligned}&\Lambda(s;\ \chi_1\psi)\Lambda(s-k+1;\ \chi_2\psi)\\&=2\sqrt{\pi}\left(\frac{mM_2}{\pi}\right)^{1-k/2}\mu(s)^{-1}\Lambda_M(s;\ f,\psi)\end{aligned}$$

と書ける．ここで

$$\mu(s)=\begin{cases}\left(\dfrac{s-k+1+\delta_2'}{2}\right)\left(\dfrac{s-k+1+\delta_2'}{2}+1\right)\cdots\left(\dfrac{s}{2}-1\right) & (k\neq 1,2 \text{ で } \delta_1'=1)\\ \left(\dfrac{s-k+1+\delta_2'}{2}\right)\left(\dfrac{s-k+1+\delta_2'}{2}+1\right)\cdots\left(\dfrac{s-1}{2}\right) & (k\neq 1 \text{ で } \delta_1'=0)\\ 1 & (k=1,\ \text{および } k=2 \text{ かつ } \delta_1'=1)\end{cases}$$

従って， Weil の定理を適用するには $\Lambda_M(s;\ f,\ \psi)$ の函数等式のみ示せば十分であるが， $\Lambda(s,\ \chi_1\psi)$ および $\Lambda(s,\ \chi_2\psi)$ の函数等式と (4.7.5) から

$$\Lambda_M(s;\ f,\ \psi)=i^k C_\psi \Lambda_M(s;\ g,\ \bar{\psi})$$

がわかる．ここで $C_\psi=\dfrac{W(\psi)^2\chi(m)\psi(M)}{m}=\chi(m)\psi(-M)\dfrac{W(\psi)}{W(\bar{\psi})}$ であり

$$g(z)=Cf(z;\ \bar{\chi}_2,\ \bar{\chi}_1),\qquad C=\begin{cases}\dfrac{W(\chi_1)\,W(\chi_2)}{\sqrt{M}}\left(\dfrac{M_1}{M_2}\right)^{(1-k)/2} & (k：偶数)\\ -\dfrac{W(\chi_1)\,W(\chi_2)}{\sqrt{M}}\left(\dfrac{M_1}{M_2}\right)^{(1-k)/2} & (k：奇数)\end{cases}$$

である．よって定理 4.3.14 により $f(z)\in G_k(N,\ \chi)$ となる．次に $k=2$ で χ_1 および χ_2 が単位指標のときには

$$(4.7.6)\qquad \Lambda(s,\ \psi)\Lambda(s-1,\ \psi)$$
$$=2\sqrt{\pi}\left(\frac{m}{\pi}\right)^{-1/2}\mu(s)^{-1}\prod_{p|M}(1-\psi(p)p^{1-s})^{-1}M^{-s/2}\Lambda_M(s;\ f,\ \psi)$$

$$\mu(s)=\begin{cases}1 & (\delta_\psi=1)\\ \dfrac{s-1}{2} & (\delta_\psi=0)\end{cases}$$

となり，上の場合と同様に

$$\Lambda_M(s;\ f,\ \psi)=-C_\psi\Lambda_M(s;\ g,\ \bar{\psi})$$

$$g(z)=(-1)^t f(z)\qquad (t=M \text{ を割る素数の個数})$$

が成り立つから，$f(z)\in G_k(M,\ \chi)$ である． (証明終)

以下 k を固定し， 定理の $f(z)$ を $f(z;\ \chi_1,\ \chi_2)$ と書くことにする．mod N で定義される Dirichlet の指標 χ で $\chi(-1)=(-1)^k$ なるものに対して

$$\mathcal{E}_k(N,\ \chi)=\{f(lz;\ \chi_1,\ \chi_2)\mid\ lM_1M_2|N \text{ で } \chi_1,\ \chi_2 \text{ は(i)または(ii)を満たす}\} \text{ で生成される } \boldsymbol{C} \text{ 上の vector 空間}$$

と定義する.

定理 4.7.2　$G_k(N, \chi)=\mathcal{E}_k(N, \chi)\oplus S_k(N, \chi)$

証明　定理 4.5.16 により $f(z;\ \chi_1, \chi_2)$ は ${}^M T_n$ $(n=1, 2, \cdots;\ M=M_1M_2)$ の同時固有函数であるから, l が $lM|N$ となる自然数ならば, $f(lz;\ \chi_1, \chi_2)$ は T_n, $(n, N)=1$, の同時固有函数である. 故に $\mathcal{E}_k(N, \chi)$ は $T_n, (n, N)=1$, の作用で自分自身に写像され, $T_n, (n,N)=1$, は $\mathcal{E}_k(N, \chi)$ において同時対角化される. さて $\mathcal{E}_k(N, \chi)\cap S_k(N, \chi)\neq\{0\}$ と仮定すると $S_k(N, \chi)\cap S_k(N, \chi)$ は $T_n, (n,N)=1$, の同時固有函数を基底に持つ. $S_k(N,\chi)\cap S_k(N,\chi)$ の元 $g(z)$ が T_n, $(n, N)=1$ の同時固有函数とすると, $g(z)$ は或る $f(z)=f(z;\ \chi_1,\chi_2)$ と任意の $T_n, (n,N)=1$, に関して同じ固有値に属する. 系 4.6.14 により N の約数 N' と $S_k(N',\chi)$ の原始的な元 $h(z)$ で $g(z)$ と $h(z)$ は T_n, $(n, N)=1$, に関して同じ固有値に属するようなものが存在する. 仮定により $L(s;\ f)$ と $L(s;\ h)$ は N を割らない素因子 p については同じ Euler 因子を持つ. もし, χ_2 が単位指標であるとすると, 上で見たように

$$\Gamma(s)L(s,\ \chi_1)L(s-k+1,\ \chi_2)$$

は $s=k$ で 1 位の極を持つ. 一方, $h(z)$ は cusp 形式であるから, $\Gamma(s)L(s;\ h)$ は全平面で正則であるので $L(s;\ h)=\sum_n a_n n^s$ と書くと

$$\frac{\Gamma(s)L(s,\ \chi_1)L(s-k+1,\ \chi_2)}{\Gamma(s)L(s;\ h)}=\prod_{p|N}\frac{1-a_p p^{-s}+\chi(p)p^{k-1-2s}}{(1-\chi_1(p)p^{-s})(1-\chi_2(p)p^{k-1-s})}$$

が $s=k$ で少くとも 1 位の極を持つことになるが, これは右辺の形から不可能である. もし χ_2 が単位指標でなければ, g の代わりに $g_{\bar{\varphi}_2}$ を考えると同様の矛盾が導かれる. 故に $\mathcal{E}_k(N, \chi)\cap S_k(N, \chi)=\{0\}$ である.

次に $G_k(N, \chi)$ が $\mathcal{E}_k(N, \chi)$ および $S_k(N, \chi)$ で生成されることを見よう.

1°　$k\geqq 2$ とし, $k=2$ ならば $\chi\neq$ 単位指標とする. $f(lz;\ \chi_1, \chi_2)$ は 1 次独立であることを示す. そのために

$$\sum_{l, \chi_1, \chi_2} c(l,\ \chi_1,\ \chi_2)f(lz;\ \chi_1,\ \chi_2)=0 \tag{4.7.7}$$

とおく. ここで l は $lM|N$ となる自然数を動き, χ_1, χ_2 は $\chi=\chi_1\chi_2$ となる指標を動く.

$$L(s,\chi_1)L(s-k+1,\chi_2)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n(\chi_1,\chi_2)n^{-s}$$

でもって $a_n(\chi_1,\chi_2)$ を定義すると，$f(lz;\chi_1,\chi_2)$ に関する $T_n((n,N)=1)$ の固有値は $a_n(\chi_1,\chi_2)$ である．もし $a_n(\chi_1,\chi_2)=a_n(\psi_1,\psi_2)$ が $(n,N)=1$ となる任意の n について成り立つならば $\chi_1=\psi_1$，$\chi_2=\psi_2$ となることがわかるから，(4.7.7) が成り立つならば，χ_1，χ_2 の組を1つ固定したときに

$$\sum_l c_{l,\chi_1,\chi_2}f(lz;\chi_1,\chi_2)=0 \tag{4.7.8}$$

でなければならない．$f(z;\chi_1,\chi_2)$ の $e^{2\pi iz}$ の係数は1であるので，任意の l に対して $c(l,\chi_1,\chi_2)=0$ でなければならないことがわかる．よって

$$\dim\mathcal{E}_k(N,\chi)=\#\{(l,\chi_1,\chi_2)\,|\,lM_1M_2|N,\ \chi_1,\ \chi_2\ \text{は (i) を満たす}\}$$

であるが，簡単な計算で

$$=\#\left\{(\chi_1,\ \chi_2)\,\middle|\,\begin{array}{l}\chi_1,\chi_2\ \text{は}\ \mathrm{mod}\,M_1,\ \mathrm{mod}\,M_2\ \text{で定義される原}\\ \text{始的とは限らぬ指標で}\ M_1M_2=N,\ \chi_1\chi_2=\chi\end{array}\right\}$$

となることがわかる．

2° $k=2$，$\chi=$単位指標とする．仮定により $N>1$ である．1° とほぼ同様の議論でもって

$$\begin{aligned}\dim\mathcal{E}_k(N,\chi)=&\dim\langle f(lz;\chi_1,\chi_2)\,|\,\chi_1,\chi_2\ \text{は共に単位指標},\ lM_1M_2|N\rangle\\ &+\dim\langle f(lz;\chi_1,\chi_2)\,|\,\chi_1,\chi_2\ \text{は共に単位指標ではない},\\ &\qquad lM_1M_2|N\rangle\end{aligned}$$

がわかる*．χ_1,χ_2 が共に単位指標でなければ，1° と全く同様に $f(lz;\chi_1,\chi_2)$ は1次独立であり，また 1° とほぼ同様の議論でもって

$$\dim\langle f(lz;\chi_1,\chi_2)\,|\,\chi_1,\chi_2\ \text{は単位指標}\rangle=\#\{N\ \text{を割る自然数}\}-1$$

がわかるので

$$\dim\mathcal{E}_k(N,\chi)=\#\left\{(\chi_1,\ \chi_2)\,\middle|\,\begin{array}{l}\chi_1,\ \chi_2\ \text{は}\ \mathrm{mod}\,M_1,\ \mathrm{mod}\,M_2\ \text{で定義}\\ \text{される原始的とは限らぬ Dirichlet}\\ \text{の指標で}\ M_1M_2=N,\ \chi_1\chi_2=\chi\end{array}\right\}-1$$

となる．

---

* $\langle f\rangle$ は f で生成される部分空間を表わす．

3°　$k=1$ とする．$G_k(N,\chi)\neq\{0\}$ とすると $N\geqq 3$ でなければならない．1° とほぼ同様であるが，このときには $f(z;\ \chi_1,\chi_2)=f(z;\ \chi_2,\chi_1)$ であることに注意すると

$$\dim \mathcal{E}_1(N,\chi)=\frac{1}{2}\#\left\{(\chi_1,\ \chi_2)\ \middle|\ \begin{array}{l}\chi_1,\ \chi_2\ \text{は}\ \mathrm{mod}\,M_1,\ \mathrm{mod}\,M_2\ \text{で定義}\\ \text{される原始的とは限らぬ Dirichlet}\\ \text{の指標で}\ M_1M_2=N,\ \chi_1\chi_2=\chi\end{array}\right\}$$

がわかる．

さて一般に $\mathcal{E}_k(\Gamma_1(N))=\sum_{\chi}\mathcal{E}_k(N,\chi)$ と定義する．ここで χ は $\mathrm{mod}\,N$ で定義される指標で，$\chi(-1)=(-1)^k$ なるものすべての上を動く．上の 1°, 2°, 3° より

$$\dim \mathcal{E}_k(\Gamma_1(N))=\begin{cases}\dfrac{1}{2}\displaystyle\sum_{M|N}\varphi(M)\varphi\Big(\frac{N}{M}\Big) & (k\geqq 3)\\ \dfrac{1}{2}\displaystyle\sum_{M|N}\varphi(M)\varphi\Big(\frac{N}{M}\Big)-1 & (k=2)\\ \dfrac{1}{4}\displaystyle\sum_{M|N}\varphi(M)\varphi\Big(\frac{N}{M}\Big) & (k=1,\ N\geqq 3,\ N\neq 4)\\ 1 & (k=1,\ N=4)\end{cases}$$

となるから，定理 4.2.10 により

$$=\dim G_k(\Gamma_1(N))-\dim S_k(\Gamma_1(N))$$

がわかる．$\mathcal{E}_k(\Gamma_1(N))\cap S_k(\Gamma_1(N))=\{0\}$ であるから

$$G_k(\Gamma_1(N))=\mathcal{E}_k(\Gamma_1(N))\oplus S_k(\Gamma_1(N))$$

である．故に $G_k(N,\chi)=\mathcal{E}_k(N,\chi)\oplus S_k(N,\chi)$ となり定理を得る．

(証明終)

(4.7.1) から $\mathcal{E}_k(N,\chi)$ の元の Fourier 係数に関する次のような評価式を得る．

定理 4.7.3　$f(z)\in\mathcal{E}_k(N,\chi)$ とする．$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n e^{2\pi i n z}$ と Fourier 展開すると

$$a_n=\begin{cases}O(n^{k-1}) & (k>2)\\ O(n^{k-1+\varepsilon}) & (k=1,\ 2)\end{cases}$$

である．ここで ε は任意の正数である．

証明 自然数 n に対して $\sigma_{k-1}(n)=\sum_{d\mid n, d>0} d^{k-1}$ とおく．$k-1\geqq 2$ ならば

$$\sigma_{k-1}(n)=n^{k-1}\sum_{\substack{d\mid n\\ d>0}} d^{-k+1}<n^{k-1}\zeta(k-1)$$

である．よって $\sigma_{k-1}(n)=O(n^{k-1})$ である．$k=2$ ならば

$$\sigma_1(n)=n\sum_{\substack{d\mid n\\ d<0}} d^{-1}<n\sum_{l=1}^{n} l^{-1}<n(1+\log n)$$

となる．よって $\sigma_1(n)=O(n^{1+\varepsilon})$ が任意の $\varepsilon>0$ について成り立つ．最後に $k=1$ とする．$n=\prod_i p_i{}^{a_i}$ と素因数分解すると，$\sigma_0(n)=\#\{n$ の正の約数$\}$ であるから

$$\frac{\sigma_0(n)}{n^\varepsilon}=\prod_i\left(\frac{a_i+1}{p_i^{a_i\varepsilon}}\right) \tag{4.7.9}$$

となる．$a\varepsilon\log 2\leqq e^{a\varepsilon\log 2}=2^{a\varepsilon}\leqq p^{a\varepsilon}$ であるから

$$\frac{a+1}{p^{a\varepsilon}}\leqq 1+\frac{a}{p^\varepsilon}\leqq 1+\frac{1}{\varepsilon\log 2}\leqq e^{1/(\varepsilon\log 2)} \tag{4.7.10}$$

である．p が $p\geqq 2^{1/\varepsilon}$ ならば $p^\varepsilon\geqq 2$ だから

$$\frac{a+1}{p^{a\varepsilon}}\leqq\frac{a+1}{2^a}\leqq 1 \tag{4.7.11}$$

である．よって (4.7.9) において $p_i<2^{1/\varepsilon}$ ならば (4.7.10)，$p_i\geqq 2^{1/\varepsilon}$ ならば (4.7.11) を用いると

$$\frac{\sigma_0(n)}{n^\varepsilon}\leqq\prod_{p<2^{1/\varepsilon}} e^{1/(\varepsilon\log 2)}\leqq\exp\left(\frac{2^{1/\varepsilon}}{\varepsilon\log 2}\right)$$

であるから

$$\sigma_0(n)=O(n^\varepsilon)$$

がわかる．よって (4.7.1) と合わせて定理を得る． (証明終)

特に $N=1$ で $\chi_1=\chi_2=\chi_0$ (単位指標) とする．k が 4 以上の偶数のときには §4.1 の注意により

$$f(z;\ \chi_0,\chi_0)=cE_k(z) \qquad (c=(k-1)!/2(2\pi i)^k)$$

となり，$f(z;\ \chi_0,\chi_0)$ は Eisenstein 級数である．同様に $N>1$ でも $k\geqq 3$ ならば $f(z;\ \chi,\chi_2)$ は (4.1.3) と類似の級数の 1 次結合で表わされる*．よっ

* p. 196 注でも述べたように $k=1,2$ の場合は適当な修正が必要がある．それについては §7.2 で少し述べる．

て $\mathcal{E}_k(N, \chi)$ の元を $k\leqq 2$ の場合も含めて Eisentein 級数と呼ぶ．定理 4.7.2 で見たように正則 modular 形式 $G_k(N, \chi)$ の中で Eisenstein 級数の空間は cusp 形式の空間の補空間であり，Eisenstein 級数は Dirichlet の L 函数の積に対応するものであるから比較的わかり易い．Eisenstein 級数については，$k=2$ で χ が単位指標ならば §4.6 の理論がうまく行かないことは容易に確められる．

§4.8　2次体の L 函数と cusp 形式

前節では，Eisenstein 級数は2つの Dirichlet の L 函数の積に対応していることを見た．それでは cusp 形式を mellin 変換して得られる Dirichlet 級数はどのようなものであろうか．特にその中に代数体の L 函数と対応するものがあるかと言う興味が起こる．もし代数体の L 函数に対応するものがあるとしたら，Euler 積の形から2次体の L 函数に限られる．K は2次体とし，ξ は K の Hecke の指標とする．もしも $L\left(s-\dfrac{k-1}{2}, \xi\right)$ が cusp 形式に対応すると仮定すると，§3.3 の記号を用いると，函数等式に現われる Γ 函数を比べて，

（i）　K は虚2次体，

（ii）　K は実2次体で $v_\alpha=0$ $(\alpha=1, 2)$ で $u=u_1+u_2=1$

でなければならない．実際 Hecke は，この場合には L 函数は cusp 形式に対応することを次節に述べる θ 函数を用いて示した． ここではこの結果を再び Weil の定理を用いて L 函数の函数等式から導く．

$K=\boldsymbol{Q}(\sqrt{d})$ は2次体とする．ここで d は K の判別式である．p は素数とし，ψ は mod p で定義される原始的な Dirichlet の指標とする．$\mathfrak{r}$ は K の整数環，I は K の ideal 群とし，K の Hecke の指標 $\psi\circ \mathrm{N}_K$ を

$$(\psi\circ\mathrm{N}_K)(\mathfrak{a})=\psi(\mathrm{N}_K(\mathfrak{a}))\qquad (\mathfrak{a}\in I)$$

でもって定義する．norm 写像 N_K は $(\mathfrak{r}/p\mathfrak{r})^\times$ から $(\boldsymbol{Z}/p\boldsymbol{Z})^\times$ への全射を引き起こすから $\psi\circ\mathrm{N}_K$ は mod $p\mathfrak{r}$ で定義される原始的な指標である．

補題 4.8.1　$\chi_d=\left(\dfrac{d}{\ }\right)$ とする．上の記号の下に次の（1）(2）が成り立つ．

（1）　$W(\chi_d)=\begin{cases}\sqrt{d} & (d>0)\\ i\sqrt{d} & (d<0).\end{cases}$

（2）　$(d, p)=1$ ならば

$$W(\psi\circ \mathrm{N}_K)=\chi_d(m)\psi(|d|)W(\psi)^2.$$

証明　定理 3.3.1 の記号を用いる．$\zeta_K(s)=\zeta(s)L(s, \chi_d)$ であるから，両辺の函数等式を比べて $1=T(\chi_d)$ である．K が実または虚に従って $\chi_d(-1)=1$ または -1 であるから（1）を得る．次に

$$L(s, \psi\circ \mathrm{N}_K)=L(s, \psi)L(s, \psi\chi_d)$$

であるので，$T(\psi\circ \mathrm{N}_K)=T(\psi)T(\psi\chi_d)$ となるから，(3.1.2) と（1）により（2）を得る．（証明終）

定理 4.8.2　$K=\boldsymbol{Q}(\sqrt{d})$ は虚2次体とし，ξ は $\bmod \mathfrak{n}$ で定義される Hecke の指標で，負でない整数 u が存在して

$$\xi((a))=\left(\frac{a}{|a|}\right)^u \qquad (a\equiv 1 \pmod{\mathfrak{n}})$$

なるものとする．$f(z)=\sum_{\mathfrak{a}}\xi(\mathfrak{a})N_K(\mathfrak{a})^{u/2}e^{2\pi i N(\mathfrak{a})z}$ と定義すると，ξ が単位指標でなければ

$$f(z)\in S_{u+1}(N, \chi)$$

である．ここで $N=|d|\mathrm{N}_K(\mathfrak{n})$ で χ は

$$\chi(n)=\left(\frac{d}{n}\right)\xi((n)) \qquad (n\in \boldsymbol{Z})$$

で定義される Dirichlet の指標である．特に ξ が原始的ならば $f(z)$ は原始的である．

証明　定義により $L(s; f)=L(s-u/2, \xi)$ である．補題 4.6.5 により ξ が原始的な場合に証明すればよい．ψ を $\bmod m$ で定義された Dirichlet の指標とする．$(m, N)=1$ ならば $L(s; f, \psi)=L(s+u/2, \xi(\psi\circ \mathrm{N}_K))$ であるから，定理 3.3.1 と補題 4.8.1 により

$$\begin{aligned}\Lambda_N(s; f, \psi)&=\left(\frac{m\sqrt{N}}{2\pi}\right)^s\Gamma(s)L(s-u/2, \xi(\psi\circ \mathrm{N}_K))\\ &=\left(\frac{m\sqrt{N}}{2\pi}\right)^{u/2}\Lambda(s-u/2, \xi(\psi\circ \mathrm{N}_K))\end{aligned}$$

$$=\left(\frac{m\sqrt{N}}{2\pi}\right)^{u/2} i^{-u}\frac{\xi(m)\chi_d(m)\psi(N)W(\xi)W(\psi)^2}{m\mathrm{N}_K(n)}$$

$$\times\Lambda(1+u/2-s,\ \xi(\bar{\varphi}\circ\mathrm{N}_K))$$

$$=C_\psi\Lambda_N(1+u-s;\ g,\ \bar{\psi})$$

となる．ここで

$$C_\psi=\chi(m)\psi(N)W(\psi)^2, \qquad g(z)=i^{-u}\frac{W(\xi)}{\mathrm{N}_K(\mathfrak{n})}\sum_{\mathfrak{a}}\bar{\xi}(\mathfrak{a})\mathrm{N}_K(\mathfrak{a})^{u/2}e^{2\pi i(\mathrm{N}\mathfrak{a})z}$$

である． $f(z)$ は定理 4.3.14 の函数等式以外の条件は明らかに満たしているから，上の函数等式により $S_{u+1}(N, \chi)$ の元である． さらに ξ が原始的ならば，系 4.6.20 により $f(z)$ は原始的である．　　　　(証明終)

K が実2次体の場合にも全く同様にして次の定理が成り立つ．

定理 4.8.3　$K=\boldsymbol{Q}(\sqrt{d})$ は実2次体とし，ξ を mod $\mathfrak{n}$ で定義される Hecke の指標で

$$\xi((a))=\frac{a}{|a|}=\mathrm{sgn}(a) \qquad (a\equiv 1 \pmod{\mathfrak{n}})$$

または

$$\xi((a))=\frac{a'}{|a'|}=\mathrm{sgn}(a') \qquad (a\equiv 1 \pmod{\mathfrak{n}})$$

となるものとする．ここで $a'=a^\tau$ (τ は K の恒等写像でない自己同型) である．ξ を用いて $f(z)=\sum_{\mathfrak{a}}\xi(\mathfrak{a})e^{2\pi i\mathrm{N}(\mathfrak{a})z}$ と定義すると

$$f(z)\in S_1(N, \chi)$$

である．ここで $N=d\mathrm{N}_K(\mathfrak{n})$ で，χ は $\chi(n)=(d/n)\xi((n))$ で定義される Dirichlet の指標である．特に ξ が原始的ならば，$f(z)$ は原始的である．

以下においては，類体論と Artin の L 函数の知識を仮定する．定理 4.8.2 および定理 4.8.3 において ξ が類指標となる場合を考えよう．これは K が実2次体であるか，または K が虚2次体であって $\xi(a)=1$ が $a\equiv 1 \pmod{m}$ なる a に対して成り立つ場合である．このときに ideal 群の部分群 J を

$$J=\{\mathfrak{a}\in I \mid \chi(\mathfrak{a})=1\}$$

と定義し，類体論によって J に対応する K の abel 拡大体を M とする．M

を含む $\boldsymbol{Q}$ 上の最小の Galois 拡大体を L とすると

$$G(L/K)/G(L/M)\cong G(M/K)\cong I(m)/J$$

であるから，χ は $G(L/K)$ の指標を引き起こす．それを $\tilde{\chi}$ で表わす．ρ を $\tilde{\chi}$ から引き起こされる $G(L/\boldsymbol{Q})$ の表現とすると

$$L(s,\ \rho)=L(s,\ \chi)$$

である．従って $L(s, \chi)$ は $\boldsymbol{Q}$ 上の Artin の L 函数である．言いかえると，Artin の L 函数 $L(s,\ \rho)$ は weight 1 の cusp 形式に対応している．このことから weight 1 の cusp 形式と $\boldsymbol{Q}$ 上の Galois 群の既約な 2 次の表現の Artin の L 函数は対応していることが予想される．事実 Deligne–Serre は weight 1 の cusp 形式は常に $\boldsymbol{Q}$ 上の Galois 群の 2 次の表現の Artin L 函数に対応することを示した．逆に，2 次の表現の Artin の L 函数は Weil の定理の条件の函数等式を満たすことも上の定理と同様に示される．従って，上の予想は $\boldsymbol{Q}$ 上の Galois 群の既約な 2 次の表現の Artin の L 函数に関する Artin の予想と同値である．

§4.9 θ 函 数

modular 形式の整数論への直接的な応用の最も著しいものの 1 つは，2 次形式が modular 形式の一般論から調べられることである．A は有理数を係数とする r 次の対称行列で固有値がすべて正であるものとし，r次元の縦 vector x に対して

$$A[x]={}^{t}xAx$$

と書き表わす．H の点 z に対して形式的に

$$f(z)=\sum_{m\in \boldsymbol{Z}^n} e(A[m]z)$$

とおく．ここで $e(z)=e^{2\pi iz}$ である． 以下 $\boldsymbol{C}^r$, $\boldsymbol{R}^r$, $\boldsymbol{Z}^r$ 等の vector は常に縦 vector と考える．$n=0, 1, 2, \cdots$ に対して $A[m]=n$ となる解 $m\in \boldsymbol{Z}^r$ の個数を $a(n, A)$ で表わすと，定義により $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a(n,\ A)e^{2\pi inZ}$ である．後で見るように $f(z)$ は収束し r が偶数ならば正則 modular 形式になることが示されるが，このことから modular 形式の係数の評価より $a(n, A)$ の評価が

得られる．また §4.7 の結果と cusp 形式の空間の trace の公式により有限個の $a(n, A)$ を知れば，一般の $a(n, A)$ を求めることが出来るのである．またこれは，正則 modular 形式を具体的に作る1つの有効な方法を与える．上の $f(z)$ が modular 形式となることを示すのがこの節の目的である．もう少し一般に2次形式から θ 函数を定義し，その変換公式を調べよう．以下の議論は[志村 7]に従う．

A は r 次の実対称行列で固有値はすべて正であるものとする．$A^{-1}=[b_{ij}]$ とするときに微分作用素 Δ_A を

$$\Delta_A=\sum_{i,j=1}^{r} b_{ij}\frac{\partial^2}{\partial x_i\partial x_j}$$

でもって定義する．変数 $x_1, \cdots, x_r$ の複素係数の ν 次の同次多項式 $P(x)$ が A に関する球函数であるとは

$$\Delta_A P=0$$

のときに言う．ν 次の球函数は

$$P(x)=\begin{cases} \text{常数} & (\nu=0) \\ {}^t qAx \ (q\in \boldsymbol{C}^r) \text{ の1次結合} & (\nu=1) \\ ({}^t qAx)^\nu \ (q\in \boldsymbol{C}^r,\ {}^t qAq=0) \text{ の1次結合} & (\nu>1) \end{cases}$$

と書ける．さて A は特に有理整数係数であるとする．$\boldsymbol{Z}^r$ の元 h と自然数 N を次のようにとる．

(4.9.1)　A, NA^{-1} は有理整数係数である．

(4.9.2)　$Ah\in N\boldsymbol{Z}^r$.

A, N, h と ν 次の球函数 P に対して

$$\theta(z;\ h, A, N, P)=\sum_{m\equiv h \pmod N} P(m)e\left(\frac{z}{2N^2}A[m]\right) \qquad (z\in H)$$

と定義する．$x\in \boldsymbol{R}^r$ ならば正数 c_1, c_2

$$c_1{}^t xx\leqq A[x]\leqq c_2{}^t xx$$

となるものが存在するから $a(n, A)=O(n^r)$ である．よって補題 4.3.2 により $\theta(z;\ h, A, N, P)$ は H 上の正則函数である．ここで

$$D=\det(A), \qquad k=\frac{r}{2}+\nu$$

とおく．r が奇数ならば k は半整数である．半整数 k に対しては z^k は

$$-\frac{\pi}{2}<\arg(z^{1/2})\leqq\frac{\pi}{2}, \qquad z^k=(z^{1/2})^{2k}$$

にとるものと約束する．

補題 4.9.1 $\theta(z;\ h,\ A,\ N,\ P)$ は次のような変換を持つ．

$$\theta\Bigl(-\frac{1}{z};\ h,\ A,\ N,\ P\Bigr)$$
$$=(-i)^{\nu}D^{-1/2}(-iz)^{k}\sum_{\substack{l\ (\mathrm{mod}\ N)\\ Al\equiv 0\ (\mathrm{mod}\ N)}} e\Bigl(\frac{{}^t lAh}{N^2}\Bigr)\theta(z;\ l,\ A,\ N,\ P)$$

証明　これは (3.2.12) の一般化である．証明は (3.2.12) の証明と同様に Poisson の和公式による．先ず $x\in\boldsymbol{R}^n$, $z\in H$ に対して

$$\theta(z,\ x)=\sum_{m\in\boldsymbol{Z}^r} e\Bigl(\frac{z}{2}A[m+x]\Bigr)$$

と定義する．次に $f(z)=e\Bigl(\frac{z}{2}A[x]\Bigr)$ とおき，$\hat{f}(u)$ で f の Fourier 変換を表わすと Poisson の和公式により

$$\theta(z,\ x)=\sum_{m\in\boldsymbol{Z}^r}\hat{f}(m)e({}^t mx)$$

であるが

$$\hat{f}(m)=D^{-1/2}\Bigl(\frac{z}{i}\Bigr)^{-r/2}e\Bigl(-\frac{1}{2z}A^{-1}[m]\Bigr)$$

であるから

$$\theta(z,\ x)=D^{-1/2}\Bigl(\frac{z}{i}\Bigr)^{-r/2}\sum_{m\in\boldsymbol{Z}^r}e\Bigl(-\frac{1}{2z}A^{-1}[m]+{}^t mx\Bigr) \tag{4.9.3}$$

を得る．補題を示すには $P(x)$ が $q\in\boldsymbol{C}^r$ によって $P(x)=({}^t qAx)^{\nu}$ と書かれる場合に示せば十分であるから，以下 $P(x)=({}^t qAx)^{\nu}$ と仮定する．$q={}^t(q_1,\ \cdots,\ q_r)$ と書き表わし，微分作用素 L を $L=\sum_{i=1}^{r}q_1\frac{\partial}{\partial x_1}$ でもって定義する．L^{ν} を (4.9.3) の両辺に施すと，$\nu>1$ のときには $L^2A[x]={}^t qAq=0$ であるから

$$\sum_{m\in\boldsymbol{Z}^r}P(m+x)e\Bigl(\frac{z}{2}A[m+x]\Bigr) \tag{4.9.4}$$
$$=(-i)^{\nu}D^{-1/2}\Bigl(\frac{z}{i}\Bigr)^{-r/2-\nu}\sum_{m\in\boldsymbol{Z}^r}({}^t qm)^{\nu}e\Bigl(-\frac{1}{2z}A^{-1}[m]+{}^t mx\Bigr)$$

$$=(-i)^{\nu}D^{-1/2}\left(\frac{z}{i}\right)^{-k}\sum_{m\in \boldsymbol{Z}^r}P(A^{-1}m)e\left(-\frac{1}{2z}A^{-1}[m]+{}^tmx\right)$$

となる．$x=h/N$ とおき，z を $-1/z$ とおきなおすと左辺は $N^{-\nu}\theta(-1/z;\ h, A, N, P)$ にほかならない．また右辺において $n=NA^{-1}m$ とおくと $n\in \boldsymbol{Z}^r$ であって $An\equiv 0 \pmod N$ である．逆に $u\in \boldsymbol{Z}^r$ が $An\equiv 0 \pmod N$ を満たすと，$m=N^{-1}An\equiv \boldsymbol{Z}^r$ であるから

$$\theta\left(-\frac{1}{z};\ h,\ A,\ N,\ P\right)$$

$$=(-i)^{\nu}D^{-1/2}(-iz)^{-k}\sum_{\substack{n\in \boldsymbol{Z}^r\\ An\equiv 0\ (\mathrm{mod}\ N)}}P(n)e\left(\frac{z}{2}A[n]+\frac{1}{N^2}{}^tnAh\right)$$

である．$e\left(\frac{1}{N}{}^tnAh\right)$ は n の $\mathrm{mod}\,N$ の剰余類で決まるから

$$=(-i)^{\nu}D^{-1/2}(-iz)^{-k}\sum_{\substack{l\ (\mathrm{mod}\ N)\\ Al\equiv 0\ (\mathrm{mod}\ N)}}\left\{e\left(\frac{{}^tnAh}{N^2}\right)\right.$$

$$\left.\times\sum_{n\equiv l\ (\mathrm{mod}\ N)}P(n)e\left(\frac{z}{2}A[n]\right)\right\}$$

$$=(-i)^{\nu}D^{-1/2}(-iz)^{-k}\sum_{\substack{l\ (\mathrm{mod}\ N)\\ Al\equiv 0\ (\mathrm{mod}\ N)}}e\left(\frac{{}^tlAh}{N^2}\right)\theta(z;\ l,\ A,\ N,\ P)$$

となり補題を得る．　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　(証明終)

以下，P は共通なので P を省略して $\theta(z;\ h,\ A,\ N)=\theta(z,\ h,\ A,\ N,\ P)$ と書き表わす．次の $\theta(z;\ h,\ A,\ N)$ の変換式は定義により明らかである．

(4.9.5)　c を自然数とすると

$$\theta(z;\ h,\ A,\ N)=\sum_{\substack{g\ (\mathrm{mod}\ cN)\\ g\equiv h\ (\mathrm{mod}\ N)}}\theta(cz;\ g,\ cA,\ cN).$$

(4.9.6)　$$\theta(z+2;\ h,\ A,\ N)=e\left(\frac{{}^thAh}{N^2}\right)\theta(z;\ h,\ A,\ N).$$

(4.9.7)　$$\theta(z;\ -h,\ A,\ N)=(-1)^{\nu}\theta(z;\ h,\ A,\ N).$$

さて $\delta=\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}\in SL_2(\boldsymbol{Z})$ とおくと $c\cdot\delta z=a-(cz+d)^{-1}$ である．よって $c>0$ でかつ $a\equiv d\equiv 0 \pmod 2$ と仮定すると (4.9.5), (4.9.6), 補題 4.9.1 を順に適用して

$$\theta(\delta z;\ h,\ A,\ N)$$
$$=(-i)^{\nu}D^{-1/2}c^{-r/2}(-i(cz+d))^{k}\sum_{\substack{l\ (\mathrm{mod}\ CN)\\ Al\equiv 0\ (\mathrm{mod}\ N)}}\Phi(h,\ l)\theta(cz;\ l,\ cA,\ cN)$$

を得る．ここで

$$\Phi(h,\ l)=\sum_{\substack{g\ (\mathrm{mod}\ cN)\\ g\equiv h\ (\mathrm{mod}\ N)}}e\Big(\frac{1}{cN^2}\Big[\frac{a}{2}{}^tgAg+{}^tlAg+\frac{d}{2}{}^tlAl\Big]\Big)$$

である．これは容易に

$$=e\Big(\frac{-b}{N^2}\Big[\frac{d}{2}{}^tlAl+{}^tlAh\Big]\Big)\Phi(h+d\boldsymbol{l},\ 0)$$

と変形されるから，$\Phi(h,\ l)$ は l に関しては $\mathrm{mod}\,N$ で決まる．従って (4.9.5) により

$$\theta(\delta z;\ h,\ A,\ N)$$
$$=(-i)^{\nu}D^{-1/2}c^{-r/2}(-i(cz+d))^{k}\sum_{\substack{l\ (\mathrm{mod}\ N)\\ Al\equiv 0\ (\mathrm{mod}\ N)}}\Phi(h,\ l)\theta(z;\ l,\ A,\ N)$$

が成り立つ．z を $-1/z$ と置き換えて，補題 4.9.1 を適用すると

$$\theta\Big(\frac{bz-a}{dz-c};\ h,\ A,\ N\Big)$$
$$=D^{-1}c^{-r/2}(-\mathrm{sng}(d)\,i)^{r}(dz-c)^{k}\sum_{\substack{n\ (\mathrm{mod}\ N)\\ An\equiv 0\ (\mathrm{mod}\ N)}}\Psi(n,\ h)\theta(z;\ n,\ A,\ N)$$

となる．ここで $\Psi(n,\ h)$ は

$$\Psi(n,\ h)=\sum_{\substack{l\ (\mathrm{mod}\ N)\\ Al\equiv 0\ (\mathrm{mod}\ N)}}e\Big(\frac{{}^tnAl}{N^2}\Big)\Phi(h,\ l)$$

であり，また $d=0$ のときには $\mathrm{sgn}(d)=1$ と約束する．さらに $d\equiv 0\ (\mathrm{mod}\ 2N)$ と仮定すると

$$\Phi(h,\ l)=e\Big(-\frac{b}{N^2}{}^tlAh\Big)\Phi(h,\ 0) \tag{4.9.8}$$

であるから

$$\Psi(n,\ h)=\Psi(h,\ 0)\sum_{\substack{l\ (\mathrm{mod}\ N)\\ Al\equiv 0\ (\mathrm{mod}\ N)}}e\Big(\frac{1}{N^2}[{}^t(n-bh)Al]\Big) \tag{4.9.9}$$
$$=\begin{cases}0 & (n\not\equiv bh\ \ (\mathrm{mod}\ N))\\ \Phi(h,\ 0)D & (n\equiv bh\ \ (\mathrm{mod}\ N))\end{cases}$$

である．よって

$$(4.9.10)\qquad \theta\Big(\frac{bz-a}{cz-d};\ h,\ A,\ N\Big)$$
$$=c^{-r/2}(-\mathrm{sgn}(d)i)^r(dz-c)^k\Phi(h,\ 0)\theta(z;\ bh,\ AN)$$

となる．$\gamma=\begin{bmatrix} b & -a \\ d & -c \end{bmatrix}$ とおくと $\gamma\in SL_2(\boldsymbol{Z})$ であるから，$\gamma=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ と書きなおし

$$M(\gamma)=|d|^{-r/2}(-\mathrm{sgn}(c)i)^r\sum_{\substack{g \pmod{dN} \\ g\equiv h \pmod N}} e\Big(\frac{-b}{2|d|N^2}{}^tgAg\Big)$$

とおくと，(4.9.10) は

(4.9.11)　$SL_2(\boldsymbol{Z})$ の元 $\gamma=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ が $c\equiv 0 \pmod{2N}$，$b\equiv 0 \pmod 2$ $d<0$ を満たすならば

$$\theta(\gamma z;\ h,\ A,\ N)=M(\gamma)(cz+d)^k\theta(z;\ ah,\ A,\ N)$$

が成り立つことがわかる．

補題 4.9.2　上の記号と仮定の下に

$$M(\gamma)=e\Big(\frac{ab}{2N^2}{}^thAh\Big)\Big(\frac{D}{d}\Big)\Big(\frac{2c}{d}\Big)^r\varepsilon_d^{-r},$$

が成り立つ．ここで $\varepsilon_d=\left\{\begin{matrix} 1 & (d\equiv 1 \pmod 4)) \\ i & (d\not\equiv 1 \pmod 4)) \end{matrix}\right\}$ である．

証明　$c=0$ ならば $a=d=-1$ であるから，補題は明らかであるので以下 $c\neq 0$ とする．$-d$ が素数のときには補題が示されたと仮定する．整数 n を $p=-d-2cn$ が素数であるようにとり $\alpha(2n)=\begin{bmatrix} 1 & 2n \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ とおく．$\gamma\alpha(2n)=\begin{bmatrix} a & b+2an \\ c & -p \end{bmatrix}$ であるから (4.9.5) と (4.9.11) によって

$$M(\gamma\alpha(2n))=M(\gamma)e\Big(\frac{a^2n}{N^2}{}^thAh\Big)$$

である．$\gamma\alpha(2n)$ については仮定により補題が成り立つから

$$M(\gamma)=e\Big(\frac{ab}{2N^2}{}^thAh\Big)\Big(\frac{D}{-p}\Big)\Big(\frac{2c}{-p}\Big)^r\varepsilon_{-p}^{-r}$$

であるが $d\equiv -p \pmod{2c}$ なので $\left(\frac{2c}{-p}\right)=\left(\frac{2c}{d}\right)$ かつ $\varepsilon_{-p}=\varepsilon_d$ である．D は N^n の約数であるから (3.1.11) により Dirichlet の指標 $\left(\frac{D}{\ }\right)$ は mod $4N$ で定義される．$d\equiv -p \pmod{4N}$ だから $\left(\frac{D}{-p}\right)=\left(\frac{D}{d}\right)$ となり一般の γ に対して成り立つ．以上により $-d$ が素数の場合にのみ示せばよいことがわかった．$-d$ が素数と仮定し，$p=-d$ とおくと $ad\equiv 1 \pmod N$ である．$g\equiv h \pmod N$ となる vector g に対して整数 u を $g=adh+Nu$ でもって定義すると，g の mod pN の同値類と u の mod p の類は 1 対 1 に対応するので，$M(\gamma)$ は

$$M(\gamma)=(-\mathrm{sgn}(c)i)^r e\left(\frac{ab}{2N^2}{}^t hAh\right)p^{-r/2}\sum_{u \pmod p} e\left(-\frac{b}{2p}{}^t uAu\right)$$

と書ける．$(p, D)=1$ であるから $M_r(\boldsymbol{Z})$ の元 S で $(\det(S), p)=1$ でかつ ${}^tSAS$ が mod p で考えると対角行列となるものが存在する．$b'=b/2\ (\in \boldsymbol{Z})$ とおき $t_1, \cdots, t_r$ を ${}^tSAS$ の対角成分とすると，補題 4.8.1(1) により*

$$p^{-r/2}\sum_{u \pmod p} e\left(\frac{b'}{p}{}^t uAu\right)=p^{-r/2}\prod_{i=1}^{r}\left(\sum_{x=1}^{p} e\left(\frac{b't_ix^2}{p}\right)\right)$$

$$=\varepsilon_p^r\left(\frac{b'^r t_1\cdots t_r}{p}\right)=\varepsilon_p^r\left(\frac{b'^r D}{p}\right)$$

が成り立つ．$2b'c-ap=1$ であるから $\left(\frac{b'}{p}\right)=\left(\frac{2c}{p}\right)=\mathrm{sgn}(c)\left(\frac{2c}{-p}\right)$ であり，$\varepsilon_p\varepsilon_{-p}=i$ であるから

$$\varepsilon_p^r\left(\frac{b'^r D}{p}\right)=(\mathrm{sgn}(c)i)^r\varepsilon_{-p}^{-r}\left(\frac{2c}{-p}\right)^r\left(\frac{D}{-p}\right)=(\mathrm{sgn}(c)i)^r\varepsilon_d^{-r}\left(\frac{2c}{d}\right)^r\left(\frac{D}{d}\right)$$

となり補題が示された．　(証明終)

以上から次の定理がわかる．

定理 4.9.3　A, h, N は (4.9.1), (4.9.2) を満たすとし，P は A に関する ν 次の球函数とする．$k=\frac{r}{2}+\nu$ とおくと $SL_2(\boldsymbol{Z})$ の元 $\gamma=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ が $b\equiv 0 \pmod 2$, $c\equiv 0 \pmod{2N}$ を満たすならば

---

* 素数 p に対し $W(a, p)=\sum_{n=1}^{p-1} e(an^2/p)$ とおくと，$W(a, p)=\left(\frac{a}{p}\right)W\left(\left(\frac{\ }{p}\right)\right)$ であることは容易に確められる．

$$\theta(\gamma z;\ h,\ A,\ N,\ P)$$
$$=e\left(\frac{ab}{2N^2}{}^t hAh\right)\left(\frac{\det A}{d}\right)\left(\frac{2c}{d}\right)^r \varepsilon_d^{-r}(cz+d)^k\theta(z;\ ah,\ A,\ N,\ P)$$

が成り立つ．ここで ε_d は $d\equiv 1 \pmod 4$ なら 1，$d\equiv 3 \pmod 4$ なら i を意味するものとする．

証明　$d<0$ の場合は上に示した．$d>0$ の場合は γ の代わりに $-\gamma$ を考えればよい．　　（証明終）

特別な場合として，次の 1°, 2° は容易にわかる．

1°　A の対角成分がすべて偶数であるとする．任意の $m\in \boldsymbol{Z}^r$ に対して $A[m]$ は偶数であるから $\theta(z+1;\ h,\ A,\ N)=e\left(\frac{{}^thAh}{2N^2}\right)\theta(z;\ h,\ A,\ N)$ が成り立つ．よって (4.9.6) の替わりにこの式を用いることにより，この場合には定理 4.9.3 の結果は $\Gamma_0(2N)$ の任意の元 γ に対して成り立つ．

2°　A および NA^{-1} の対角成分がすべて偶数であるとすると，$d\equiv 0 \pmod N$ に対して (4.9.8) が常に成立するから，この時には定理 4.9.3 の結果は $\Gamma_0(N)$ の任意の元 γ に対して成り立つ．

また r が偶数の場合と $r=1$ の場合を特に述べておく．

系 4.9.4　定理 4.9.3 の記号を用いる．r は偶数のとき，$k=\frac{r}{2}+\nu$ とおくと

$$\theta(z;\ h,\ A,\ N,\ P)\in G_k(\Gamma(2N))$$

である．更に $\nu\geqq 1$ ならば $\theta(z;\ h,\ A,\ N,\ P)$ は cusp 形式である．

証明　cusp における条件のみ確かめればよい．先ず A の対角成分は偶数であると仮定する．$\mathfrak{N}$ を $\{\theta(z;h,A,N,P)\,|\,h \pmod N\}$ で生成される空間とすると，補題 4.9.1 と上の注意 1° により，$\mathfrak{N}$ は $\begin{bmatrix}1&1\\0&1\end{bmatrix}$ と $\begin{bmatrix}0&-1\\1&0\end{bmatrix}$ の作用で不変である．$\mathfrak{N}$ の元は∞で正則である（$\nu\geqq 1$ ならば零点を持つ）ことは明らかであり，$\Gamma(N)$ の cusp は∞に $SL_2(\boldsymbol{Z})$ の元で同値であるから $\mathfrak{N}$ の元は任意の cusp で正則である（$\nu\geqq 1$ ならば零点を持つ）．一般には，(4.9.5) において $c=2$ ととると A の対角成分が偶数である場合に帰着される．（証明終）

系 4.9.5　定理 4.9.3 の記号を用いる．r は偶数とし $k=\frac{r}{2}+\nu$，$\chi(d)=\left(\frac{(-1)^{r/2}\det A}{d}\right)$ とおく．$\theta(z;\ A,P)=\sum_{m\in \boldsymbol{Z}^r}P(m)e\left(\frac{z}{2}A[m]\right)$ と定義すると

（1） $\theta(2z; A, P)\in G_k(4N, \chi)$

（2） A の対角成分がすべて偶数ならば，$\theta(z; A, P)\in G_k(2N, \chi)$

（3） A, NA^{-1} の対角成分がすべて偶数ならば，$\theta(z; A, P)\in G_k(N, \chi)$

が成り立ち，更に $A^*=NA^{-1}$，$P^*(x)=P(A^{-1}x)$ とおくと

$$(\sqrt{N}z)^{-k}\theta\left(\frac{-1}{Nz}; A, P\right)=\frac{\sqrt{N}^k}{\sqrt{D}}i^{r/2}\theta(z; A^*, P^*)$$

である．もし $\nu\geqq 1$ ならば $\theta(z; A, P)$ は cusp 形式である．

証明 定理 4.9.3 およびその後の注意と系 4.9.4 において $h=0$ とすることにより（1）（2）（3）がわかる．$\begin{bmatrix}0 & -1\\ N & 0\end{bmatrix}$ に関する変換式は（4.9.4）から明らかである． （証明終）

系 4.9.6 r を偶数とすると，r 次の有理整数係数の正値対称行列 A で

（1） $\det(A)=1$，（2） A, A^{-1} の対角成分はすべて偶数である

ようなものが存在する必要十分条件は $r\equiv 0 \pmod 8$ である．

証明 系 4.9.5 の記号を用いる．$P(x)=1$ ととり $\theta(z; A)=\theta(z; A, P)$，$\theta(z; A^{-1})=\theta(z; A^{-1}, P)$ とおくと，容易に $\theta(z; A)=\theta(z; A^{-1})$ であることがわかる．系 4.9.5 の（3）により $\theta(z; A)\in G_k(\Gamma(1))$ であるから

$$z^{-k}\theta\left(\frac{-1}{z}; A\right)=\theta(z; A)$$

である．系 4.9.5 で与えられた $\theta(z; A)$ の $\begin{bmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{bmatrix}$ に関する変換式と比べて $i^{r/2}=1$ を得る．従って $r\equiv 0 \pmod 8$ である．$r=8$ の場合には例えば

$$A=\begin{bmatrix}2 & 1 & & & & & & \\ 1 & 2 & 1 & & & \mathbf{0} & & \\ & 1 & 4 & 3 & & & & \\ & & 3 & 4 & 5 & & & \\ & & & 5 & 20 & 3 & & \\ & & & & 3 & 12 & 1 & \\ & \mathbf{0} & & & & 1 & 4 & 1\\ & & & & & & 1 & 2\end{bmatrix}$$

は求めるものである（Minkowski の例）．よって $r\equiv 0 \pmod 8$ は十分条件で

もある．　　(証明終)

系 4.9.7　ψ は mod$N$ で定義される原始的な Dirichlet の指標とする．$\nu=0, 1$ を $\psi(-1)=(-1)^\nu$ にとり

$$\theta_\psi(z)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}\psi(m)m^\nu e^{2\pi i m^2 z}$$

とおく．$\gamma\in\Gamma_0(4)$ に対して $J(\gamma, z)=\left(\dfrac{c}{d}\right)\varepsilon_d^{-1}(cz+d)^{1/2}$ と定義すると

(1)　$$\theta_\psi(\gamma z)=\psi(d)\left(\frac{-1}{d}\right)^\nu J(\gamma, z)^{2\nu+1}\theta_\psi(z)\qquad(\gamma\in\Gamma_0(4N^2))$$

(2)　$$\left(\frac{2Nz}{i}\right)^{-\nu-1/2}\theta_\psi\left(\frac{-1}{4N^2z}\right)=(-i)^\nu N^{-1/2}W(\psi)\theta_{\overline{\psi}}(z)$$

が成り立つ．

証明　定理 4.9.3 において $r=1$, $A=N$, $P(m)=m^\nu$ ととると

$$\theta_\psi(z)=\sum_{h\,(\mathrm{mod}\,N)}\psi(h)\theta(2Nz\,;\,h, N, N, P)$$

であるから（1）を得る．（2）は (4.9.4) より容易にわかる．　(証明終)

系 4.9.6 において特に ψ が単位指標ならば，$\theta(z)=\theta_\psi(z)$ と書き表わすと

$$\theta(\gamma z)=J(\gamma, z)\theta(z)\qquad(\gamma\in\Gamma_0(4))$$

が成り立つ．従って $J(\gamma, z)$ は $\gamma, \delta\in\Gamma_0(N)$ に対して

(4.9.12)　$$J(\gamma\delta, z)=J(\gamma, \delta z)J(\delta, z)$$

という関係を満たしている．一般に第1種の Fuchs 群 Γ の元 γ に対し H 上の零点を持たない正則函数 $J(\gamma, z)$ が与えられて (4.9.12) なる関係を満足するときに，J を Γ の**保型因子** (automorphic factor) と言う．Γ の保型因子が与えられた時に $j(\gamma, z)$ の場合と同様に保型形式を定義することが出来る．系 4.9.6 は $\theta_\psi(z)$ が $\Gamma_0(4N^2)$ の保型因子 $\psi(d)\left(\dfrac{-1}{d}\right)^\nu J(\gamma, z)^{2\nu+1}$ に関する保型形式であることを意味している．このような保型因子に関する保型形式 (weight が半整数の modular 形式と呼ばれる）は特に重要であり，普通の意味での (weight が整数の）modular 形式と密接な関係がある．このことについては，[志村 7]，[新谷] を参照されたい．また系 4.9.7 と定理 4.3.4 から，§3.3 で述べた Dirichlet の L-函数の函数等式が得られる．また定理 4.8.2 も同様に定理 4.9.3 から得られることもわかる．

第5章　四元数環の order の単数群

前章で数論と特に関係の深い modular 群と modular 形式を詳しく調べた．modular 群と数論の関係は，かなりの部分が，一般に Q 上の不定符号の四元数環の order の単数群 Γ に関しても成り立つ．この章では四元数環の基本的な性質を述べ，Γ の Hecke 環の構造を調べる．四元数環については本叢書中の土方「代数群の数論」に詳しく述べられる予定であるので．更に詳細な四元数環の数論については同書を読まれることをお薦めする．紙面の都合上，すべてを詳しくは説明出来ないので本書では現在のところ最も標準的な整数論の教科書である A. Weil, Basic Number Theory ([Weil]) から必要な知識を引用する．§5.2 については [Eichler], [清水 4] に，§5.3 については [志村 3], [清水 3] に従って述べる．

§5.1　多元環と adele

多元環の定義から始めよう．

定義　単位元を持つ環 B が，体 F 上の**多元環** (algebra over F) であるとは，次の 1°～3° が満たされているときに言う．

1°　$F\subset B$ であり F と B の単位元は一致する．

2°　F の元は B の任意の元と可換である．

3°　B は F 上の有限次の vector 空間である．

多元環 B の F 上の vector 空間としての次元 $\dim_F B$ を B の F 上の次数 (degree) と言う．B の部分集合

$$Z(B)=\{\beta\in B\,|\,\alpha\beta=\beta\alpha,\ {}^\forall\alpha\in B\}$$

を B の**中心** (center) と言う．特に $F=Z(B)$ ならば B を**中心的な多元環** (central algebra) と呼ぶ．A, B が F 上の多元環のときに，写像 $f: A \longrightarrow B$ が **F-準同型** (**F-同型**) であるとは，f が A, B を環と考えたときの準同型 (同型) であり，更に F 上の vector 空間としての準同型にもなっているときに言う．$\mathcal{E}(B)$ で B の vector 空間としての自己準同型全体を表わす．$\mathcal{E}(B)$ は F 上の多元環である．B の元 α を左から掛けて得られる B の vector 空間としての準同型 "$B \ni \beta \longmapsto \alpha\beta \in B$" を $\rho(\alpha)$ で表わす．ρ は B から $\mathcal{E}(B)$ への1対1の F 準同型である．ρ を B の**左正則表現** (left regular representation) と言う．B の元 α に対し $\rho(\alpha)$ が特に B の自己同型ならば，$\rho(\alpha)$ は全射であるから，$\rho(\alpha)(\beta)=\alpha\beta=1$ となる B の元 β が存在する．よって $\alpha \in B^{\times}$ がわかる．逆に，$\alpha \in B^{\times}$ なら $\rho(\alpha)$ は B の自己同型だから，

(5.1.1) B の元 α が $B^{\times}$ に属する必要十分条件は，$\rho(\alpha)$ が B の vector 空間としての自己同型であることである．

素数 p に対し $\boldsymbol{Q}_p$ は p 進体，$\boldsymbol{Z}_p$ は p 進整数環とする．$\boldsymbol{Q}_p$ の元 a_p に対し

$$|a_p|_p = \begin{cases} p^{-k} & (a_p \neq 0,\ k=\max\{n \in \boldsymbol{Z} \mid a \in p^n \boldsymbol{Z}_p\}) \\ 0 & (a_p=0) \end{cases}$$

と書く．更に $\boldsymbol{Q}_\infty=\boldsymbol{R}$ とおき，$\boldsymbol{Q}_\infty$ の任意の元 a に対して，$|a|_\infty$ でもって $\boldsymbol{R}$ の普通の意味での絶対値を表わす．以下 $\boldsymbol{Q}_p$ および $\boldsymbol{Q}_\infty$ を局所体 (local field) と言い，v は素数または∞を表わすことにする．我々の必要とするのは $\boldsymbol{Q}$ 上の多元環であるが，先ず局所体 $\boldsymbol{Q}_v$ 上の多元環 B_v から調べる．B_v は $\boldsymbol{Q}_v$ 上の vector 空間であるから，$\boldsymbol{Q}_v$ 上の基底を1組固定して，B_v の各元にその基底に関する座標を対応させることにより，$\boldsymbol{Q}_v$ の n 個の直積空間 $\boldsymbol{Q}_v^n$ と vector 空間として同型である．$\boldsymbol{Q}_v^n$ に $\boldsymbol{Q}_v$ の直積集合としての位相を入れ，B_v に上の同型が位相同型になるように位相を入れる．この位相は明らかに B_v の基底のとり方にはよらずに一意的に定まる．$\boldsymbol{Q}_v$ は局所 compact であるから，B_v も局所 compact であり，B_v の2元 α, β の和，差および積の座標は，α および β の座標の $\boldsymbol{Q}_v$ 係数の多項式で表わされるから，B_v の和，差および

積はこの位相に関して連続となり B_v は位相環である．位相の定義により，ρ は B_v から $\rho(B_v)\,(\subset\mathcal{E}(B_v))$ への位相同型である．よって (5.1.1) により，$B_v^\times$ は B_v の開集合であり，更に B_v の部分集合としての位相で，局所 compact な位相群である．

定義　$F=\boldsymbol{Q}$（または $\boldsymbol{Q}_p$）とし，$\mathfrak{r}=\boldsymbol{Z}$（または $\boldsymbol{Z}_p$）とする．F 上の多元環 B の部分集合 R が B の **order** であるとは，次の 1°, 2° が満たされているときに言う．

1°　R は B の単位元を含む部分環である．

2°　R は $\mathfrak{r}$ 上の有限生成の加群で，B の F 上の1組の基底を含む．

定義により，B の order は（B の部分加群として）互いに commensurable である．B の order は包含関係に関して極大であるときに**極大**（**maximal**）**order** と言う．

補題 5.1.1　（1）　B_p が $\boldsymbol{Q}_p$ 上の多元環で，R_p は B_p の order とすると，R_p は compact である．更に $R_p^\times$ は $B_p^\times$ の compact な開部分群である．

（2）　R は $\boldsymbol{Q}$ 上の多元環 B の order とする．$B_p=B\otimes_{\boldsymbol{Q}}\boldsymbol{Q}_p$ とし，R_p は R の B_p における閉包とすると R_p は B_p の order である．

証明　（1）R_p は $\boldsymbol{Z}_p$ 上の有限生成の加群であり $\boldsymbol{Q}_p$ 上の vector 空間 B_p の部分加群であるから，単因子論により $\alpha_1, \cdots, \alpha_n\in R_p$ が存在して $R_p=\boldsymbol{Z}_p\alpha_1\oplus\cdots\oplus\boldsymbol{Z}_p\alpha_n$ と書ける．R_p は B_p の基底を含むから $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ は B_p の基底でもある．従って R_p は位相空間としては，$\boldsymbol{Z}_p$ の直積と同型であり，$\boldsymbol{Z}_p$ が compact であるから R_p も compact である．(5.1.1) と同様にして，$R_p^\times=\{\alpha\in R_p\,|\,\det(\rho(\alpha))\in\boldsymbol{Z}_p^\times\}$ であるから $R_p^\times$ は R_p の閉かつ開集合となり compact である．（2）R は $\boldsymbol{Z}$ 上の有限生成の加群であり，$\boldsymbol{Q}$ 上の vector 空間の部分加群であるから，単因子論により Rの元$\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ が存在して $R=\boldsymbol{Z}\alpha_1\oplus\cdots\oplus\boldsymbol{Z}\alpha_n$ と書ける．よって $R_p=\boldsymbol{Z}_p\alpha_1\oplus\cdots\oplus\boldsymbol{Z}_p\alpha_n$ となり，R_p は $\boldsymbol{Z}_p$ 上有限生成である．R_p が B_p の単位元および1組の基底を含むことは明らかである．　　（証明終）

$\boldsymbol{Q}$ の adele 環を $\boldsymbol{Q}_A$ と書く．即ち $\boldsymbol{Q}_A$ は，（i）局所 compact な位相環

であり，(ii) 集合としては

$$\boldsymbol{Q}_A=\{(a_v)\in\prod_v \boldsymbol{Q}_v \mid \text{有限個の } p \text{ を除き } a_p\in\boldsymbol{Z}_p\}$$

であり，(iii) $\boldsymbol{Q}_A$ の部分集合 $\prod_p \boldsymbol{Z}_p\times\boldsymbol{R}$ は $\boldsymbol{Q}_A$ の開集合でその位相は直積集合としての位相に等しいことで特徴づけられる．$\boldsymbol{Q}_A^\times$ を $\boldsymbol{Q}_A$ の可逆元全体の集合とし，$a=(a_v)\in\boldsymbol{Q}_A^\times$ に対し

$$|a|_A=\prod_v |a_v|_v$$

と定義する．a_p は有限個の p を除き $\boldsymbol{Z}_p^\times$ に含まれるから，これは意味を持つ．有理数 x に，任意の v に対し $x_v=x$ となる $\boldsymbol{Q}_A$ の元 (x_v) を対応させる対応で，$\boldsymbol{Q}$ は $\boldsymbol{Q}_A$ の部分集合と考えられる．この同一視により $\boldsymbol{Q}^\times\subset\boldsymbol{Q}_A^\times$ であり

$$|x|_A=1 \qquad (x\in\boldsymbol{Q}^\times)$$

が成り立つ．$a=(a_v)\in\boldsymbol{Q}_A^\times$ とし，各素数 p に対し，素数 e_p を

$$a_p\boldsymbol{Z}_p=p^{e_p}\boldsymbol{Z}_p$$

でもって定義する．有限個の p を除き $e_p=0$ であるから $n=\prod_p p^{e_p}(\in\boldsymbol{Q})$ は意味を持つ．この n を用いて，$\boldsymbol{Q}$ の分数 ideal $\mathrm{id}(a)$ を

$$\mathrm{id}(a)=n\boldsymbol{Z}$$

と定義し，a に対応する ideal と言う．

さて $\boldsymbol{Q}$ 上の多元環 B に対して

$$B_A=B\otimes_{\boldsymbol{Q}}\boldsymbol{Q}_A$$

と定義する．B の $\boldsymbol{Q}$ 上の基底を1組定めると，B_A は $\boldsymbol{Q}_A$ の直積 $\boldsymbol{Q}_A^n$ と $\boldsymbol{Q}_A$ 加群として同型である．$\boldsymbol{Q}_A^n$ に直積集合としての位相を入れ，B_A にはこの同型が位相同型となるように位相を入れる．この位相は A の基底のとり方によらずに決まる．$\boldsymbol{Q}_A$ が局所 compact であるから B_A も局所 compact である．$\boldsymbol{Q}_v$ 上の多元環の場合と同様の理由で B_A も位相環である．$\boldsymbol{Q}_A$ は $\prod_v \boldsymbol{Q}_v$ の部分集合であるから，$B_v=B\otimes_{\boldsymbol{Q}}\boldsymbol{Q}_v$ とおくと，B_A は自然な対応で $\prod_v B_v$ の部分集合と考えられる．R を B の order とし，更に $v=p$ (素数) のときには R_p を B_p における R の閉包とすると

$$B_A=\{(\alpha_v)\in\prod_v B_v \mid \text{有限個の素数 } p \text{ を除き } \alpha_p\in R_p\}$$

であり，B_A の部分集合 $\prod_p R_p\times B_\infty$ の位相は直積集合としての位相に等しい．この B_A を B の **adele 環**と言う．次に $B_A^\times$ に $B_A^\times$ が位相群で $B_A^\times\longrightarrow B_A$ が連続になるような最も弱い位相を入れる．この位相群 $B_A^\times$ を B の **idele 群**と言う*．$B_A^\times$ は自然な対応で $\prod_v B_v^\times$ の部分集合と考えられるが，集合としては

$$B_A^\times=\{(\alpha_v)\in\prod_v B_v^\times \mid \text{有限個の素数 } p \text{ を除き } \alpha_p\in R_p^\times\}$$

である．また $B_A^\times$ の開部分集合 $\prod_p R_p^\times\times B_\infty^\times$ の位相は直積位相に等しい．

§5.2 四 元 数 環

体 F 上の多元環 B は，環として単純であるとき，即ち $\{0\}$ と B 自身以外には両側 ideal を持たないときに，**単純な多元環** (simple algebra) であると言われる．更に B の 0 以外の元が逆元を持つならば，B を特に **多元体** (division algebra) であると言う．β が多元環 B の可逆元ならば

$$B\ni\alpha\longmapsto\beta\alpha\beta^{-1}\in B$$

は明らかに B から自分自身への同型写像である．こうして得られる同型写像を B の**内部自己同型** (inner automorphism) と言う．

定理 5.2.1　B は体 F 上の中心的で単純な多元環とし，C_1 および C_2 は B に含まれる F 上の単純な多元環とする．C_1 から C_2 への F 上の同型写像は，B の内部自己同型に拡張される．特に B の自己同型はすべて内部自己同型である．

証明　B の左 ideal は F 上の vector 空間であるから，B の左 ideal に関して降鎖律が成り立つ．B の極小な左 ideal M をとると，M は単純な左 B 加群であり，B が単純であるから B の M における作用は忠実である．$D=\mathrm{End}_B(M)$ (M の B 加群としての自己準同型) とおくと，D は F 上の中心的な多元体であって，$\mathrm{End}_D(M)=B$ が成り立つ ([Weil] IX Prop. 2)．さて f は C_1 から C_2 への F 上の同型写像とする．C_1 の作用と D の作用は可換であるから，M は左 $C_1\otimes_F D$ 加群と見なせる．M をこの作用で $C_1\otimes_F D$

* 特に $B=\boldsymbol{Q}$ とすると位相群 $\boldsymbol{Q}_A^\times$ を得る．位相群 $\boldsymbol{Q}_A^\times$ を $\boldsymbol{Q}$ の idele 群と言う．

加群と見なしたものを M_1 と書く．同様に M は左 $C_2\otimes_F D$ 加群であるが，C_1 と C_2 の同型 f によって再び左 $C_1\otimes_F D$ 加群と見なせる．こうして M を左 $C_1\otimes_F D$ 加群と考えたものを M_2 と書く．さて C_1 の中心を K とすると，K は体であるから $C_1\otimes_F D=C_1\otimes_K(K\otimes_F D)$ となるので $C_1\otimes_F D$ は単純である（[Weil] IX, Prop. 3 - Cor. 1, Cor. 4）．よって M_1 および M_2 は単純な左 $C_1\otimes_F D$ 加群（同型を除き唯1つ）の直和である（[Weil] IX Prop. 1）ので，M_1 および M_2 の F 上の次元を比べると，左 $C_1\otimes_F D$ 加群として M_1 と M_2 は同型であることがわかる．この左 $C_1\otimes_F D$ 加群としての M_1 と M_2 の同型を φ と書くと，φ は M の F 上の自己同型で D の作用と可換であるから，上に述べたことから，$B^\times$ の元 β が存在して，$\varphi(m)=\beta m$, $m\in M_1$，と書ける．C_1 の作用は忠実だから $f(\gamma)=\beta\gamma\beta^{-1}$, $\gamma\in C_1$，となるので，B の自己同型 g を $g(\alpha)=\beta\alpha\beta^{-1}$, $\alpha\in B$，でもって定義すると g は f の拡張である．特に $C_1=C_2=B$ ととると後半を得る．（証明終）

定義　体 F 上の次数4の中心的で単純な多元環 B を F 上の**四元数環**（quaternion algebra over F）と呼ぶ．特に B が多元体ならば B を**四元数体**（division quaternion algebra）と言う．

B は体 F 上の四元数環とすると，Wedderburn の定理（[Weil] IX Th. 1, Prop. 3 - Cor. 1）により

(5.2.1)　$B\neq$ 四元数体 $\Longleftrightarrow B\cong M_2(F)$

である．F が代数的閉体ならば，F 上の四元数環は同型を除くと $M_2(F)$ が唯一のものである（[Weil] IX Prop. 3 - Cor. 2）．K を F の拡大体とすると，$B\otimes_F K$ は K 上の四元数環である（[Weil] XI Prop. 3 - Cor. 1）．$B\otimes_F K$ が四元数体または $M_2(K)$ と同型であるに従って B は K で**分岐する**，または B は K で**分解する**と言う．B が K で分解するときに K を B の分解体という．F の2次の分離拡大体 K が B の分解体となる必要十分条件は，B が K と同型の体を含むことである（[Weil] IX Th. 3 - Cor. 3）．

補題 5.2.2　B は体 F 上の四元数環とする．（1）$B^\times$ の元 α と β の最小多項式が等しければ，α と β は $B^\times$ の元で共役である．（2）α が B の

元で，F に含まれなければ α と可換な B の元全体は $F[\alpha]$ である．

証明 $f(X)\in F[X]$ を α および β の共通の最小多項式とすると，$F[\alpha]\cong F[X]/(f)\cong F[\beta]$ である．$f(X)$ が既約であるならば $F[\alpha]$ および $F[\beta]$ は体であるから，定理 5.2.1 により $F[\alpha]$ と $F[\beta]$ の同型は B の内部自己同型に拡張される．従って α と β は $B^\times$ の元で共役である．$f(X)$ が既約でないならば，$F[X]/(f)$ は体ではないから $B\cong M_2(F)$ であるから $B=M_2(F)$ と仮定して差支えない．α と β は同じ最小多項式を持つから，α と β は同じ Jordan の標準型を持つが，α および β の固有値が F に属することから，α および β は $GL_2(F)$ の元により Jordan の標準型に変形される．よって α と β は $B^\times=GL_2(F)$ の元で共役である．よって（1）が示された．β を α と可換な B の元であるとする．$F[\alpha,\beta]$ は F 上の多元環であるから $\dim_F F[\alpha,\beta]$ は 2 または 4 であるが，$F[\alpha,\beta]$ は可換で，B は可換でないから $\dim_F F[\alpha,\beta]=2$ で，よって $F[\alpha,\beta]=F[\alpha]$ が得られた． （証明終）

B は F 上の四元数環とする．$\bar{F}$ で F の代数的閉包を表わすと，$B\otimes_F\bar{F}$ は $\bar{F}$ 上の四元数環であるから $B\otimes_F\bar{F}\cong M_2(\bar{F})$ である．B の元 β に対して

$$\mathrm{N}_B(\beta)=\det(\beta),\qquad \mathrm{tr}_B(\beta)=\mathrm{tr}(\beta)$$

とおく．右辺の det および tr は，B の元 β を $B\otimes_F\bar{F}\,(\cong M_2(\bar{F}))$ の元と考えての行列式および trace を意味する．$B=M_2(F)$ ならば $\mathrm{N}_B(\beta)$ および $\mathrm{tr}_B(\beta)$ は各々 β の行列式および trace に外ならないから F の元であるが，B が四元数体であっても，$\mathrm{N}_B(\beta)$ および $\mathrm{tr}_B(\beta)$ は F の元である（[Weil] IX Prop. 6)．$\mathrm{N}_B(\beta)$ を β の (reduced) **norm**，$\mathrm{tr}_B(\beta)$ を β の (reduced) **trace** と言う．F が無限体であるならば，B の F 上の基底を 1 組固定したときに $\mathrm{tr}_B(\beta)$ および $\mathrm{N}_B(\beta)$ は β の座標の多項式である．特に $F=\boldsymbol{Q}$ とすると tr_B および N_B の引き起こす B_v から $\boldsymbol{Q}_v$ への写像は，B_v の $\boldsymbol{Q}_v$ 上の四元数環としての trace および norm に外ならない．これも便宜上 v を省略して tr_B および N_B と書き表わすことにする．また tr_B および N_B は，B_A から $\boldsymbol{Q}_A$ への連続写像を引き起こす．この写像も tr_B および N_B と書き表わすことにする．さて再び体 F 上の四元数環に戻り，B の元 β に対して，

$$f(X;\ \beta)=X^2-\mathrm{tr}_B(\beta)X+\mathrm{N}_B(\beta)\in F[X]$$

とおき，β の**主多項式** (principal polynomial) と言う．$f(X;\ \beta)$ の定義により $f(\beta;\ \beta)=0$ である．もし $f(X;\ \beta)$ が既約ならば，$F[\beta]$ は F の2次拡大体である．このときには，定義によって $F[\beta]$ の元については tr_B および N_B は2次拡大の trace および norm に等しい．$\boldsymbol{Q}_p$ 上の四元数環についての次の補題は，[Weil] I Th. 6, Prop. 5 および X Th. 1, Prop. 6 による．

補題 5.2.3　(1)　B_p が $\boldsymbol{Q}_p$ 上の四元数体ならば

$$R_p=\{\beta\in B_p\,|\,\mathrm{N}_B(\beta)\in\boldsymbol{Z}_p,\mathrm{tr}_B(\beta)\in\boldsymbol{Z}_p\}$$

とおくと，R_p は B_p の唯1つの極大 order である．R_p の右 ideal および左 ideal は R_p の両側 ideal であり，R_p は唯1つの極大 ideal を持つ．R_p の極大 ideal は R_p の元 π_p を用いて $R_p\pi_p=\pi_pR_p$ と書けて，$\pi_p^2R_p=pR_p$ が成り立つ．π_p を B_p の素元と言う．

(2)　$M_2(\boldsymbol{Z}_p)$ は $M_2(\boldsymbol{Q}_p)$ の極大 order であり，$M_2(\boldsymbol{Q}_p)$ の任意の極大 order は $M_2(\boldsymbol{Z}_p)$ と共役である．

(3)　B_p が $\boldsymbol{Q}_p$ 上の四元数環で，R_p がその極大 order とすると，R_p の左（右）ideal は単項 ideal である．また $\mathrm{N}_B(B_p)=\boldsymbol{Q}_p$，$\mathrm{N}_B(R_p)=\boldsymbol{Z}_p$，$\mathrm{N}_B(R_p^\times)=\boldsymbol{Z}_p^\times$ が成り立つ．

次の補題は [Weil] XI Prop. 4, Th. 1 による．

補題 5.2.4　B は $\boldsymbol{Q}$ 上の四元数環とする．

(1)　任意の order R に対し R を含む極大 order が存在する．B の order R が極大である必要十分条件は，任意の素数 p に対し R_p が B_p の極大 order となることである．

(2)　有限個の p を除き $B_p\cong M_2(\boldsymbol{Q}_p)$ で，R_p は B_p の極大 order である．

(3)　各素数 p に対し B_p の order R'_p が与えられたとする．B の order R で有限個の p を除き $R_p=R'_p$ なるものが存在すれば，B の order S で $S_p=R'_p$ が任意の p に対して成立するようなものが存在する．

(4)　任意の B の order R に対して $R=(\prod_p R_p\times B_\infty)\cap B$ が成立する．

さて $\boldsymbol{Q}$ 上の四元数環 B は $B\otimes_{\boldsymbol{Q}}\boldsymbol{R}$ が $M_2(\boldsymbol{R})$ に同型であるか，$\boldsymbol{R}$ 上の四

元数体になるかに従って**不定符号の四元数環**（indefinite quaternion algebra），**定符号の四元数環**（definite quaternion algebra）と呼ばれる．不定符号の四元数環についての近似定理を証明する．そのためにいくつかの補題を述べる．

補題 5.2.5 B を $\boldsymbol{Q}$ 上の四元数環とする．$\boldsymbol{Q}[X]$ の 2 次の多項式 $f(X)=X^2+aX+b$ が重根を持たないときに，次の 4 条件は同値である．

（1） $f(X)$ を主多項式に持つ B の元が存在する．

（2） B は $f(X)$ の分解体で分解する．

（3） 任意の v（素数または∞）に対して，B_v は $f(X)$ の $\boldsymbol{Q}_v$ 上の分解体で分解する．

（4） 任意の v（素数または∞）に対して，$f(X)$ は B_v の元の主多項式となる．

証明 （1）$\Longrightarrow$（2）：$f(X)=f(X;\ \beta)$ とおく．もし $f(X)$ が $\boldsymbol{Q}$ 上既約であるならば，$\boldsymbol{Q}[\beta]$ は B に含まれる 2 次体であるから，B の分解体となるので（2）が示される．もし $f(X)$ が $\boldsymbol{Q}$ 上分解するならば，$u, v(\in\boldsymbol{Q})$ を $f(X)=0$ の根とするとき $f(\beta)=(\beta-u)(\beta-v)=0$ となる．よって B は零因子を持つから $B\cong M_2(\boldsymbol{Q})$ である．この場合には $f(X)$ を主多項式に持つ B の元の存在は容易にわかる．（2）$\Longrightarrow$（1）は明らかである．（2）$\Longleftrightarrow$（3）は Hasse の原理（[Weil] XI Th. 2）に外ならない．（3）$\Longleftrightarrow$（4）は上の（1）$\Longleftrightarrow$（2）と同様である． （証明終）

補題 5.2.6 B は $\boldsymbol{Q}_p$ 上の四元数環で，R は B の極大 order であるとする．$\boldsymbol{Z}_p$ の元 b と自然数 h が与えられ $b\equiv 1 \pmod{p^h\boldsymbol{Z}_p}$ を満たすならば，R の元 β で

（1） $\mathrm{N}_B(\beta)=b$，　（2） $\beta\equiv 1 \pmod{p^h R}$，　（3） $f(X;\ \beta)$ は既約であるとなるものが存在する．

証明 K が $\boldsymbol{Q}_p$ の 2 次拡大ならば，[Weil] XII, Th. 2–Cor. 2 により B は K 上分解するから，K は B に含まれるとしてよい．特に K を $\boldsymbol{Q}_p$ 上不分岐であるようにとり，$\mathfrak{r}$ を K の整数環とする．$\mathfrak{r}$ を含む B の極大 order を R' とすると，R' と R は共役であるから，$\mathfrak{r}\subset R$ と仮定して差支えない．K の

$\boldsymbol{Q}$ に含まれない元の最小多項式は，B の元と考えての主多項式に等しいから，$\mathfrak{r}$ の元 β で（1），（2），（3）を満たすものの存在を示せばよい．そこで $\mathrm{N}_{K/\boldsymbol{Q}_p}$ を N と書き，$\mathfrak{r}$ の元の列 $\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty}$ を

（i）$\alpha_1=1$,　（ii）$\alpha_n\equiv\alpha_{n-1}(\mathrm{mod}\ p^{h(n-1)}\mathfrak{r})$,

(iii)　$N(\alpha_n)\equiv b(\mathrm{mod}\ p^{hn}\boldsymbol{Z}_p)$

であるように帰納的に作る．α_n まで作れたとし，α_{n+1} を作る．K は $\boldsymbol{Q}_p$ 上不分岐であるから，$\mathrm{tr}_{F/\boldsymbol{Q}_p}(\mathfrak{r})=\boldsymbol{Z}_p$ である．よって，$\mathfrak{r}$ の元 γ で $\mathrm{tr}_{F/\boldsymbol{Q}_p}(\gamma)=1$ となるものが存在する．（ii）により $\alpha_n\in\mathfrak{r}^{\times}$ であるから，$c=(b-\mathrm{N}(\alpha_n))/\mathrm{N}(\alpha_n)$ とおくと $c\equiv0(\mathrm{mod}\ p^{hn}\boldsymbol{Z}_p)$ である．よって $\alpha_{n+1}=\alpha_n(1+c\gamma)$ とおくと

$$\mathrm{N}(\alpha_{n+1})=\mathrm{N}(\alpha_n)\mathrm{N}(1+c\gamma)\equiv\mathrm{N}(\alpha_n)(1+c)=b\quad(\mathrm{mod}\ p^{h(n+1)}\boldsymbol{Z}_p)$$

が成り立つので α_{n+1} は求めるものである．そこで $\alpha=\lim_{n\to\infty}\alpha_n$ とおくと，α は補題の（1）および（2）を満たす．次に $\mathfrak{r}$ の $\boldsymbol{Z}_p$ 上の基底 ω_1, ω_2 をとり $\xi=1+p^h(n_1\omega_1+n_2\omega_2)$, $n_1, n_2\in\boldsymbol{Q}_p$, とおく．$\mathrm{Gal}(K/\boldsymbol{Q}_p)$ の生成元を σ とし $\beta=\alpha(\xi^\sigma/\xi)$ とおく．$n_1, n_2(\in\boldsymbol{Z}_p)$ を適当にとると，β が求めるものであることを示す．任意の n_1, n_2 に対して β が（1），（2）を満たすことは明らかであるから，適当な n_1, n_2 をとると $\beta^\sigma\neq\beta$ となることを示せばよい．β^σ/β を ω_1, ω_2 を用いて書き表わした係数は n_1 および n_2 の有理式であるから，β^σ/β がもし n_1, n_2 の函数として恒等的に 1 でないことが示されれば，$\boldsymbol{Z}_p$ は無限個の元を持つから $\boldsymbol{Z}_p$ の適当な元 n_1, n_2 をとると $\beta^\sigma\neq\beta$ となることが示される．そのために $\boldsymbol{Q}_p$ の元 n_1, n_2 を，ξ が $\mathfrak{r}$ の元であって $\bar{\xi}=\xi(\mathrm{mod}\ p\mathfrak{r})$ とおいたときに，$\bar{\xi}$ が $(\mathfrak{r}/p\mathfrak{r})^{\times}$ の生成元になるようにとる．n_1, n_2 をこのようにとったならば

$$\beta^\sigma/\beta(\mathrm{mod}\ p\mathfrak{r})=\bar{\xi}^{(p-1)}\neq1$$

であるから，β^σ/β は恒等的には 1 に等しくない．　　　　（証明終）

定義　体 F 上の四元数環 B の元 β が**正則** (regular) であるとは，$f(X;\ \beta)$ が重根を持たないときに言う．

補題 5.2.7　B は $\boldsymbol{Q}_p$ 上の四元数環，R は B の order とする．β が B

の元であって $N_B(\beta)=1$ となるものとすると，任意の自然数 k に対して，B の正則な元 α で

（1） $N_B(\alpha)=1$, （2） $\alpha\equiv\beta\ (\mathrm{mod}\ p^kR)$

となるものが存在する．

証明 もし β が正則ならば自明であるから，β は正則でないとする．先ず $B=M_2(\boldsymbol{Q}_p)$ とすると $\gamma\in B^\times$ が存在して $\gamma\beta\gamma^{-1}=\pm\begin{bmatrix}1 & b\\ 0 & 1\end{bmatrix}$, $b\in\boldsymbol{Q}_p$, と書ける．自然数 l を $p^l\gamma^{-1}M_2(\boldsymbol{Z}_p)\gamma\subset p^kR$ が成り立つように十分大きくとり，l を用いて

$$\alpha=\pm\gamma^{-1}\begin{bmatrix}1-p^l & b\\ 0 & (1-p^l)^{-1}\end{bmatrix}\gamma$$

とおけば，α は上の（1）および（2）を満たす．B が四元数体ならば，β が正則でないのは $\beta=\pm1$ のときであるが，このときには補題 5.2.6 により直ちにわかる． （証明終）

さて B は $\boldsymbol{Q}$ 上の四元数環とし，$\boldsymbol{Q}^2$ で $\boldsymbol{Q}$ の2個の直積を表わす．B の元 β に対し

(5.2.2) $$\varphi(\beta)=(\mathrm{tr}_B(\beta),\ N_B(\beta))\in\boldsymbol{Q}^2$$

と定義する．φ は明らかに，B_v から $\boldsymbol{Q}_v^2$ および B_A から $\boldsymbol{Q}_A^2$ への連続写像を引き起こす．これらの写像も（v および A を省略して）φ と書き表わすことにする．

補題 5.2.8 上の仮定と記号を用いる．B_p の元 β が正則ならば

（1） β に十分近い元は正則である．

（2） φ は β の近傍で開写像である．即ち V を β の開近傍とすると，$\varphi(V)$ は $\varphi(\beta)$ を含む開集合を含む．

証明 $(a,b)\in\boldsymbol{Q}_p^2$ とする．$g(X)=X^2+aX+b$ とおくと，$f(X)=0$ が重根を持つような (a,b) は $\boldsymbol{Q}_p^2$ の閉集合である．φ は連続であるから（1）がわかる．（2）を示そう．まず $f(X;\beta)=X^2+aX+b$ が既約とする．(a_1,b_1) (a,b) の近くにとり $g(X)=X^2+a_1X+b_1$ とおく．[Weil] XI Lemma 1 により (a_1,b_1) が (a,b) に十分近ければ $g(X)$ は既約で，$g(X)=0$ は $\alpha\in\boldsymbol{Q}_p[\beta]$

で，$\alpha\in V$ となる根 α を持つ．よって $\varphi(V)$ は $\varphi(\beta)=(a, b)$ の開近傍を含むことが示された．次に $f(X;\ \beta)=X^2+aX+b$ が可約であるとする．$f(X;\ \beta)$ は重根を持たないから，B_p は零因子を持つことになり，よって $B_p=M_2(\boldsymbol{Q}_p)$ であるとして差支えない．$f(X;\ \beta)=0$ の2根を u および v とすると，$\gamma\in B_p^\times$ が存在して $\gamma^{-1}\beta\gamma=\begin{bmatrix}u & 0\\ 0 & v\end{bmatrix}$ である．さて $g(X)=X^2+a_1X+b_1$ を (a_1, b_1) が (a, b) に近くとると，[Weil] XI Lemma 1 と同様の議論で $g(X)=0$ の2根 u_1, v_1 は $\boldsymbol{Q}_p$ に属し各々 u および v に近くなる．よって (a_1, b_1) を (a, b) に十分近くとると

$$\alpha=\gamma\begin{bmatrix}u_1 & 0\\ 0 & v_1\end{bmatrix}\gamma^{-1}\in V$$

で $f(X;\ \alpha)=g(X)$ である．よって $\varphi(V)$ は $\varphi(\beta)$ を含む開集合を含む．

（証明終）

定理 5.2.9　B は $\boldsymbol{Q}$ 上の不定符号の四元数環で，R は B の極大 order とする．自然数 N の各素因子 p に対して，B_p の元 β_p で $\mathrm{N}_B(\beta_p)=1$ となるものが与えられているとすると，B の元 β で次の3条件を満たすものが存在する．

（1）　$\mathrm{N}_B(\beta)=1$,　　（2）　$p|N$ ならば $\beta\equiv\beta_p \pmod{NR_p}$,

（3）　$p\nmid N$ ならば $\beta\in R_p$.

証明　先ず，注意と準備から始める．

(5.2.3)　補題 5.2.7 により，β_p は正則であると仮定して差支えない．

(5.2.4)　$k>0$ を $N^{k-1}\beta_p\in R_p$ が N を割る任意の p について成り立つようにとり $(R/N^kR)^\times$ の代表系を $\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_r$ とする．$(R/N^kR)^\times\cong\prod_{p|N}(R_p/N^kR_p)^\times$ であることに注意する．(これは $\boldsymbol{Z}$ が $\prod_p\boldsymbol{Z}_p$ において稠密であることからわかる.)

(5.2.5)　$(\prod_p R_p^\times\times B_\infty^\times)\backslash B_A^\times/B^\times$ の代表系を $\xi^{(1)}=(\xi_v^{(1)}), \cdots, \xi^{(s)}=(\xi_v^{(s)})$ とする*．$\{\xi^{(j)}\}$ は，どの j についても，N を割る p に対しては $\xi_p^{(j)}=1$ となる

* $(\prod_p R_p^\times\times B_\infty^\times)\backslash B_A^\times/B^\times$ が有限集合であることは，B が四元数体の場合には後で述べる定理 5.2.13 からわかる．$B=M_2(\boldsymbol{Q})$ の場合には直接容易にわかる．

ようにとれることが容易にわかる．

さて，L は自然数で L を割らない素数 p については，（i）$B_p\cong M_2(\boldsymbol{Q}_p)$ で，（ii）$\varepsilon_i\in R_p^\times(1\leqq i\leqq r)$，（iii）$\xi_p^{(j)}\in R_p^\times$ となるようなものとする．自然数 h をすべての (i, j) の組に対し

$$L^h\varepsilon_i\xi_p^{(j)-1}R_p\xi_p^{(j)}\varepsilon_i^{-1}\subset R_p \qquad (p|L)$$

が成り立つようにとる．L を割り N を割らない素数 p について，B_p の元 β_p を補題 5.2.6 により

(5.2.6)　　$\mathrm{N}_B(\beta_p)=1$，β_p は正則で $\beta_p\equiv 1\bmod(L^hR_p)$

ととる．こうして LN を割る任意の p に B_p の正則な元 β_p が与えられた．補題 5.2.8（1）により β_p の近傍 U_p を $U_p\subset\beta_p+L^hN^kR_p$ で U_p の元はすべて正則であるようにとる．$(a, 1)\in\boldsymbol{Q}^2$ を

$$(a, 1)\in\Big(\prod_{p\nmid LN}\varphi(U_p)\times\prod_{p\nmid LN}\boldsymbol{Z}_p^2\times R^2\Big)\cap\boldsymbol{Q}^2$$

にとり，$g(X)=X^2+aX+1$ とおく．補題 5.2.8（2）により $g(X)$ は任意の B_v（v は素数または∞）の元の主多項式になるから，補題 5.2.5 によって $g(X)$ は B の元の主多項式である．即ち B の元 α で $f(X;\ \alpha)=g(X)$ となるものが存在する．

$p|LN$ ならば，$\alpha_p\in U_p$ が存在して $g(X)=f(X;\ \alpha_p)$ である．補題 5.2.2 により（仮定により $g(X)=0$ は重根を持たないから），$\gamma_p\in B_p^\times$ が存在して $\alpha=\gamma_p^{-1}\alpha_p\gamma_p$ である．

$p\nmid LN$ ならば，$a\in\boldsymbol{Z}_p$ であるから α は B_p の極大 order の 1 つに含まれる．補題 5.2.3 により B_p の極大 order はすべて共役であるから，$B_p^\times$ の適当な元 γ_p が存在して $\gamma_p\alpha\gamma_p^{-1}\in\mathrm{R}_p$ である．α は有限個の p を除くと R_p に含まれるから，γ_p は有限個の p を除くと $\gamma_p=1$ であるとしてよい．

そこで $\gamma_\infty=1$ とし，$\gamma=(\gamma_v)\in B_A^\times$ とおく．$\{\xi^{(j)}\}$ のとり方により，j を適当にとると，

$$\gamma=\varepsilon\xi^{(j)}\delta \qquad (\varepsilon=(\varepsilon_v)\in\prod_p R_p^\times\times B_\infty^\times,\ \delta\in B^\times)$$

と書ける．$\{\varepsilon_i\}$ のとり方により，i を適当にとると，$\varepsilon_p\varepsilon_i^{-1}\in 1+N^kR_p$ である．

そこで $\beta=(\varepsilon_i\delta)\alpha(\varepsilon_i\delta)^{-1}$ とおき，β が求めるものであることを示す．$\mathrm{N}_B(\beta)=1$ となることは明らかであるから，（2）および（3）を示そう．

$p|N$ とすると，$\xi_p^{(j)}=1$ であったから，$\gamma_p=\varepsilon_p\delta$ である．よって $\beta=(\varepsilon_p\varepsilon_i^{-1})^{-1}(\gamma_p\alpha\gamma_p^{-1})(\varepsilon_p\varepsilon_i^{-1})=(\varepsilon_p\varepsilon_i^{-1})^{-1}\alpha_p(\varepsilon_p\varepsilon_i^{-1})$ であるので，k のとり方により

$$\beta-\beta_p=(\varepsilon_p^{-1}\varepsilon_i)\alpha_p(\varepsilon_p^{-1}\varepsilon_i)^{-1}-\beta_p\equiv 0 \pmod{NR_p}$$

がわかる．

$p|L$, $p\nmid N$ とすると，$\beta=(\varepsilon_i\delta)\alpha(\varepsilon_i\delta)^{-1}=\varepsilon_i\xi_p^{(j)-1}(\varepsilon_p^{-1}\alpha_p\varepsilon_p)\xi_p^{(j)}\varepsilon_i^{-1}$ であるが $\alpha_p\in U_p$ であるから，$\alpha_p\equiv\beta_p\equiv 1 \pmod{L^hR_p}$ である．ε_p は $R_p^\times$ の元であるから $\varepsilon_p^{-1}\alpha\varepsilon_p\equiv 1 \pmod{L^hR_p}$ となる．h のとり方により $\varepsilon_i\xi_p^{(j)-1}(L^hR_p)\xi_p^{(j)}\varepsilon_i^{-1}\subset R_p$ であるから，$\beta\in R_p$ である．

$p\nmid LN$ とする．$\beta=(\varepsilon_i\delta\gamma_p^{-1})(\gamma_p\alpha\gamma_p^{-1})(\varepsilon_i\delta\gamma_p^{-1})^{-1}$ と書くと，$\gamma_p\alpha\gamma_p^{-1}\in R_p$ である．L のとり方により，ε_i および $\xi_p^{(j)}$ は $R_p^\times$ に含まれる．従って

$$\delta\gamma_p^{-1}=(\varepsilon_p\xi_p^{(j)})^{-1}\in R_p^\times$$

であるから，$\varepsilon_i\delta\gamma_p^{-1}\in R_p^\times$ で $\beta\in R_p$ となる． （証明終）

定理 5.2.10（近似定理） B は $\boldsymbol{Q}$ 上の不定符号の四元数環とし，R は B の極大 order とする．N は自然数とする．整数 n と N を割る素数 p に $\beta_p\in R_p$ が与えられており

$$n/\mathrm{N}_B(\beta_p)\equiv 1 \pmod{N\boldsymbol{Z}_p}$$

が成り立っているとすると，B の元 β で

（1） $\mathrm{N}_B(\beta)=n$, （2） $\beta\in R$, （3） $p|N$ ならば $\beta\equiv\beta_p \pmod{NR_p}$

となるものが存在する．

証明 B は不定符号だから，[Weil] XI Prop. 3 により B の元 α で $\mathrm{N}_B(\alpha)=n$ となるものが存在する．L を $\alpha\notin R_p^\times$ となるような素数 p の積とする．NL を割る素数 p について R_p の元 δ_p を次のように作る．先ず $p|N$ ならば，補題 5.2.6 によって B_p の元 γ_p を $\gamma_p-1\equiv 0 \pmod{NR_p}$ でかつ $\mathrm{N}_B(\gamma_p)=n/\mathrm{N}_B(\beta_p)$ にとり，$\delta_p=\alpha^{-1}\gamma_p\beta_p$ とおく．とり方により $\mathrm{N}_B(\delta_p)=1$ である．次に $p|L$ で $p\nmid N$ であるならば，補題 5.2.3（3）を用いて R_p の元 γ_p を $\mathrm{N}_B(\gamma_p)=n$ ととり，$\delta_p=\alpha^{-1}\gamma_p$ とおく．さて LN の巾となる自然数 M を

（i） $p|N$ ならば $\alpha MR_p \subset NR_p$，（ii） $p|L$, $p\nmid N$ ならば $\alpha MR_p \subset R_p$

ととる．定理 5.2.9 における N および β_p として，M および δ_p をとることにより，B の元 δ で

（a） $\mathrm{N}_B(\delta)=1$，（b） $p|M$ ならば $\delta \equiv \delta_p (\mathrm{mod}\, MR_p)$，（c） $p\nmid M$ ならば $\delta \in R_p$,

の3条件を満たすものが存在する．この δ を用いて $\beta=\alpha\delta$ と定義し，β が求めるものであることを示す．$\mathrm{N}_B(\beta)=n$ となることは明らかであるから，（2）および（3）を示す．

$p|N$ とすると，$\beta-\beta_p=\alpha\delta-\beta_p \equiv \alpha\delta_p-\beta_p=(\gamma_p-1)\beta_p \equiv 0 (\mathrm{mod}\, NR_p)$ である．次に $p|L, p\nmid N$ とすると $\beta-\gamma_p=\alpha\delta-\gamma_p \equiv \alpha\delta_p-\gamma_p=0 (\mathrm{mod}\, R_p)$ である．$\gamma_p \in R_p$ であったから，$\beta \in R_p$ である．最後に，$p\nmid LN$ ならば $\alpha \in R_p^\times$ で $\delta \in R_p$ であるから $\beta=\alpha\delta \in R_p$ である．　　　　（証明終）

定理 5.2.11 B を $\boldsymbol{Q}$ 上の不定符号の四元数環とし，R を $\mathrm{N}_B(R_p^\times)=\boldsymbol{Z}_p^\times$ が任意の p に対して成り立つような order とすると

$$B_A^\times = B^\times \cdot (\prod_p R_p^\times \times GL_2^+(\boldsymbol{R}))$$

が成り立つ．

証明 $\beta=(\beta_v)$ が $B_A^\times$ の任意の元であると仮定して，$\beta \in B^\times \cdot (\prod_p R_p^\times \times GL_2^+(\boldsymbol{R}))$ を示そう．適当な $\boldsymbol{Q}^\times$ の元を掛けてやることにより，任意の素数 p に対して $\beta_p \in R_p$ であると仮定してよい．さて $\boldsymbol{Q}_A^\times=\boldsymbol{Q}^\times \cdot (\prod_p \boldsymbol{Z}_p^\times \times \boldsymbol{R}_+^\times)$ であるから

$$\mathrm{N}_B(\beta)=nu \qquad (n \in \boldsymbol{Z},\ u=(u_v) \in \prod_p \boldsymbol{Z}_p^\times \times \boldsymbol{R}_+^\times)$$

と書ける．仮定により $\mathrm{N}_B(R_p^\times)=\boldsymbol{Z}_p^\times$ であるから，$\mathrm{N}_B(\gamma_p)=u_p$ となる $\gamma_p \in R_p^\times$ が存在する．$\gamma_\infty=1$ とし $\gamma=(\gamma_v) \in B_A^\times$ とおく．$\gamma \in \prod_p R_p^\times \times GL_2^+(\boldsymbol{R})$ であるから必要があれば β を $\beta\gamma^{-1}$ ととり替えて $\mathrm{N}_B(\beta)=n$ と仮定してよい．R_0 は R を含む極大 order とし，$\beta_p \notin R_p^\times$ なる p および $R_{0p} \neq R_p$ なる p に対して f を

$$p^f \beta_p^{-1} R_{0p} \subset pR_p$$

にとる．$N=\prod p^f$ とおき，定理 5.2.10 をこの N, n, β_p に対して適用する

と，R の元 α が存在して

$$\begin{cases} \mathrm{N}_B(\alpha)=n, \\ \alpha\equiv\beta_p \qquad (\mathrm{mod}\, NR_0) \qquad (p|N) \end{cases}$$

が成り立つ．$\alpha^{-1}\beta\in\prod_p R_p^\times\times GL_2^+(\boldsymbol{R})$ となることを見よう．$p\nmid N$ なら $n\in\boldsymbol{Z}_p^\times$ であるから $\alpha^{-1}\beta_p\in R_p^\times$ であり，また $\alpha^{-1}\beta_\infty\in GL_2^+(\boldsymbol{R})$ は明らかである．次に p が N を割るとすると，$\alpha-\beta_p\in p^f R_{0p}$ であるから

$$\beta_p^{-1}\alpha-1\in\beta_p^{-1}p^f R_{0p}\subset pR_p$$

となり $\beta_p^{-1}\alpha\in R_p^\times$ がわかる．よって $\alpha^{-1}\beta\in\prod_p R_p^\times\times GL_2^+(\boldsymbol{R})$ である．

(証明終)

R が B の極大 order ならば補題 5.2.3（3）により，定理の条件を満たしている．また R が後に述べる Eichler 型の order ときにも，上の定理の条件が容易に確かめられることを注意しておく．

定理 5.2.12　$\boldsymbol{Q}$ 上の不定符号の四元数環 B の極大 order は互いに共役である．

証明　R と S は B の極大 order とする．各 p に対し補題 5.2.3 により $\beta_p\in B_p^\times$ が存在して

$$S_p=\beta_p R_p \beta_p^{-1}$$

が成り立つ．$\beta_\infty=1$ とおき，$\beta=(\beta_v)$ と定義すると定理 5.2.11 により $\alpha\in B^\times$, $u\in\prod_p R_p^\times\times GL_2^+(\boldsymbol{R})$ が存在して $\beta=\alpha u$ が成り立つ．よって

$$S_p=\alpha R_p\alpha^{-1}=(\alpha R\alpha^{-1})_p$$

となるから，補題 5.2.4（4）によって $S=\alpha R\alpha^{-1}$ がわかる．　(証明終)

B は $\boldsymbol{Q}$ 上の不定符号の四元数環とする．$B\otimes_{\boldsymbol{Q}}\boldsymbol{R}$ と $M_2(\boldsymbol{R})$ の同型を1つ固定し $B\subset M_2(\boldsymbol{R})$ と考える．定義により B の元の norm と，B の元を $M_2(\boldsymbol{R})$ の元と考えての行列式は一致する．B の order R に対し

$$\Gamma_R=\{\beta\in R\,|\,\mathrm{N}_B(\beta)=1\}\subset GL_2^+(\boldsymbol{R})$$

とおき，Γ_R を R の norm 1 の単数群と言う．Γ_R が第1種の Fuchs 群となることを示そう．次の定理は [Weil] IV Th. 4 の特別な場合である．

定理 5.2.13　B は $\boldsymbol{Q}$ 上の四元数体とし，$B_A^{(1)}=\{\beta\in B_A\,|\,|\mathrm{N}_B(\beta)|_A=1\}$ と

すると $B^\times\backslash B_A^{(1)}$ は compact である．

この定理より直ちに次の定理が導かれる．

定理 5.2.14　B は $\boldsymbol{Q}$ 上の不定符号の四元数環とし，R は B の order とすると，R の norm 1 の単数群 Γ_R は第1種の Fuchs 群である．更に B が四元数体ならば $\Gamma_R\backslash H$ は compact である．

証明　B が四元数体とする．系 1.2.2 により位相空間として $H\cong SL_2(\boldsymbol{R})/SO_2(\boldsymbol{R})$ であり，$SO_2(\boldsymbol{R})$ は compact であるから，$\Gamma_R\backslash H$ が compact であることは $\Gamma_R\backslash SL_2(\boldsymbol{R})$ が compact であることと同値である．$\prod_p R_p^\times\times SL_2(\boldsymbol{R})$ は $B_A^{(1)}$ の開集合であり

$$(\prod_p R_p^\times\times SL_2(\boldsymbol{R}))\cap B^\times\backslash(\prod_p R_p^\times\times SL_2(\boldsymbol{R}))\subset B^\times\backslash B_A^{(1)}$$

であるから，$(\prod_p R_p^\times\times SL_2(\boldsymbol{R}))\cap B^\times\backslash(\prod_p R_p^\times\times SL_2(\boldsymbol{R}))$ は compact である．補題 5.2.4（4）により $(\prod_p R_p^\times\times SL_2(\boldsymbol{R}))\cap B^\times=\Gamma_R$ であるから $\Gamma_R\backslash(\prod_p R_p^\times\times SL_2(\boldsymbol{R}))$ は compact である．この集合の $\Gamma_R\backslash SL_2(\boldsymbol{R})$ への射影は全射だから，$\Gamma_R\backslash SL_2(\boldsymbol{R})$ は compact である．次に B が四元数体ではないとする．R_0 が R を含む B の極大 order とする．(5.2.1) により B は $M_2(\boldsymbol{Q})$ と同型であり，同型を固定して $B=M_2(\boldsymbol{Q})$ としたときに定理 5.2.12 により R_0 は $M_2(\boldsymbol{Z})$ と共役であるから，R_0 は norm が -1 の元を含む．よって再び定理 5.2.12 により R_0 は norm が正であるような $B^\times$ の元によって $M_2(\boldsymbol{Z})$ に共役であるから，$\Gamma_{R_0}=SL_2(\boldsymbol{Z})$ と考えてよい．R_0 と R は加群として commensurable であるから，整数 N が存在して $NR_0\subset R$ である．従って

$$SL_2(\boldsymbol{Z})\supset\Gamma_R\supset\Gamma(N)$$

である．$SL_2(\boldsymbol{Z})$ および $\Gamma(N)$ は第1種の Fuchs 群であったから，Γ_R も第1種の Fuchs 群である．　(証明終)

§5.3　四元数環の単数群の Hecke 環

前節で，$\boldsymbol{Q}$ 上の不定符号の四元数環 B の order R の norm 1 の単数群 Γ_R は第1種の Fuchs 群であることを見た．この Γ_R について Hecke 環を定義しよう．

補題 5.3.1 [土方]　e は非負の整数とし $R_p=\left\{\begin{bmatrix} a & b \\ p^e c & d \end{bmatrix} \middle| \ a, b, c, d\in \boldsymbol{Z}_p\right\}$ とおくと，R_p は $M_2(\boldsymbol{Q}_p)$ の order である．もし $e\geqq 1$ ならば，R_p は2つの極大 order $R_p^{(1)}$ と $R_p^{(2)}$ によって

$$R_p=R_p^{(1)}\cap R_p^{(2)}$$

と書ける．極大 order $R_p^{(1)}$ と $R_p^{(2)}$ の組は R_p により唯1組定まる．

証明　R_p が order になることおよび $R_p=M_2(\boldsymbol{Z}_p)\cap\begin{bmatrix} p^e & 0 \\ 0 & 1\end{bmatrix}^{-1}M_2(\boldsymbol{Z})\begin{bmatrix} p^e & 0 \\ 0 & 1\end{bmatrix}$ となることは明らかである．R_p を含む極大 order を調べよう．補題 5.2.3 (2) により $M_2(\boldsymbol{Q}_p)$ の任意の極大 order は $\beta^{-1}M_2(\boldsymbol{Z}_p)\beta$ $(\beta\in GL_2(\boldsymbol{Q}_p))$ であるが $M_2(\boldsymbol{Q}_p)=\boldsymbol{Q}_p\cdot M_2(\boldsymbol{Z}_p)$ であるので，β は $M_2(\boldsymbol{Z}_p)\cap GL_2(\boldsymbol{Q}_p)$ の元であるようにとれる．γ が $GL_2(\boldsymbol{Z}_p)(=M_2(\boldsymbol{Z}_p)^\times)$ の元であるとすると $(\gamma\beta)^{-1}M_2(\boldsymbol{Z}_p)(\gamma\beta)=\beta^{-1}M_2(\boldsymbol{Z}_p)\beta$ であるから，$M_2(\boldsymbol{Q}_p)$ の極大 order 全体は

$$\beta^{-1}M_2(\boldsymbol{Z}_p)\beta, \qquad \beta\in GL_2(\boldsymbol{Z}_p)\backslash(M_2(\boldsymbol{Z}_p)\cap GL_2(\boldsymbol{Q}_p))$$

となる．$GL_2(\boldsymbol{Z}_p)\backslash M_2(\boldsymbol{Z}_p)\cap GL_2(\boldsymbol{Q}_p)$ の代表系としては

$$p^g\begin{bmatrix} 1 & u \\ 0 & p^f\end{bmatrix} \qquad (f, g \text{ は非負なる整数で，} u \text{ は } \boldsymbol{Z}_p/p^f\boldsymbol{Z}_p \text{ の代表系を動く})$$

$$p^g\begin{bmatrix} p^f & 0 \\ 0 & 1\end{bmatrix} \qquad (f, g \text{ は非負なる整数})$$

がとれることがわかるが，$\beta=\begin{bmatrix} 1 & u \\ 0 & p^f\end{bmatrix}$ $(f\geqq 1)$ とすると

$$\beta^{-1}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d\end{bmatrix}\beta=\begin{bmatrix} a+cup^{-f} & au+cu^2p^{-f}+bp^f+du \\ cp^{-f} & d+cup^{-f}\end{bmatrix}$$

であるから $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0\end{bmatrix}\notin\beta^{-1}M_2(\boldsymbol{Z}_p)\beta$ となるので，R_p を含む極大 order の全体は

$$\begin{bmatrix} p^f & 0 \\ 0 & 1\end{bmatrix}^{-1}M_2(\boldsymbol{Z}_p)\begin{bmatrix} p^f & 0 \\ 0 & 1\end{bmatrix}=\left\{\begin{bmatrix} a & bp^{-f} \\ cp^f & d\end{bmatrix}\middle| a, b, c, d\in\boldsymbol{Z}_p\right\} \quad (0\leqq f\leqq e)$$

である．特に $R_p^{(1)}\cap R_p^{(2)}=R_p$ となる極大 order の組 $\{R_p^{(1)}, R_p^{(2)}\}$ は

$$\left\{M_2(\boldsymbol{Z}_p), \begin{bmatrix} p^e & 0 \\ 0 & 1\end{bmatrix}^{-1}M_2(\boldsymbol{Z}_p)\begin{bmatrix} p^e & 0 \\ 0 & 1\end{bmatrix}^{-1}\right\}$$

である．　(証明終)

定義　B は $\boldsymbol{Q}$ 上の不定符号の四元数環とする．B_p が四元数体となるような素数 p の積の2乗を d_B と書き，B の**判別式**と言う．

定義　B は $\boldsymbol{Q}$ 上の判別式 d_B の不定符号の四元数環とし，N は d_B と互いに素な自然数とする．B の order R が **level N の Eichler 型の order** であるとは，R が次の (i)(ii) を満たすときに言う．

(i)　$p \nmid N$ ならば R_p は B_p の極大 order である．

(ii)　$N=\prod_p p^e$ を N の素因数分解とする．$p|N$ ならば R_p は $\left\{\begin{bmatrix} a & b \\ p^e c & d \end{bmatrix} \middle| a, b, c, d \in \boldsymbol{Z}_p\right\}$ と共役な B_p の order である．

Eichler 型の order について単数群と Hecke 環を調べてみよう．以下，B は $\boldsymbol{Q}$ 上の判別式 d_B の不定符号の四元数環とし，R は level N の (Eichler 型の) order とする*．便宜上 $p \nmid d_B$ ならば，B_p と $M_2(\boldsymbol{Q}_p)$ の同型を1つ固定して

$$(5.3.1)\qquad R_p=\begin{cases} M_2(\boldsymbol{Z}_p) & (p \nmid N) \\ \left\{\begin{bmatrix} a & b \\ p^e c & d \end{bmatrix} \middle| a, b, c, d \in \boldsymbol{Z}_p\right\} & (p|N) \end{cases}$$

と考える．$B_A^\times$ の部分群 U_R を

$$U_R=\prod_p R_p^\times \times GL_2^+(\boldsymbol{R})$$

とおく．S が R を含む B の極大 order であるとすると，定理 5.2.11 によって $B_A^\times=U_R \cdot B^\times=U_S \cdot B^\times$ である．また $\Gamma_R=U_R \cap B^\times$，$\Gamma_S=U_s \cap B^\times$ であるから

$$|\Gamma_S/\Gamma_R|=|U_S \cap B^\times/U_R \cap B^\times|=|U_R/U_S|=\prod_{p|N}|S_p^\times/R_p^\times|$$

であるが，定理 4.5.2 (2) と同様にして (この場合の方が易しい)，

$$|S_p^\times/R_p^\times|=p^e\left(1+\frac{1}{p}\right)$$

がわかるので，次の補題を得る．これは定理 4.2.5 (2) の拡張にあたる．

---

*　以下 Eichler 型は省略して単に level N の order と言う．

補題 5.3.2 B は $\boldsymbol{Q}$ 上の不定符号の四元数環とし，R は level N の order とする．S が R を含む B の極大 order ならば

$$[\Gamma_S:\Gamma_R]=N\prod_{p|N}\left(1+\frac{1}{p}\right)$$

が成り立つ．

次に $B_A^\times$ の部分半群 D_R を

$$D_R=\left(\prod_p D_p\times GL_2^+(\boldsymbol{R})\right)\cap B_A^\times$$

と定義する．ここで各素数 p に対して，D_p は

$$D_p=\begin{cases} R_p & (p\nmid N) \\ \left\{\begin{bmatrix} a & b \\ p^e c & d \end{bmatrix}\in R_p \,\middle|\, a\in \boldsymbol{Z}_p^\times\right\} & (p|N) \end{cases}$$

である．次の補題は $p\nmid d_B$ なる p については補題 4.5.2 と同様であり，d_B を割る p については補題 5.2.3（1）により直ちにわかる．

補題 5.3.3 上の記号の下に

$$D_p=\begin{cases} \coprod_{0\leq l\leq m} R_p^\times\begin{bmatrix} p^l & 0 \\ 0 & p^m \end{bmatrix}R_p^\times & (p\nmid Nd_B) \\ \coprod_{0\leq m} R_p^\times\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & p^m \end{bmatrix}R_p^\times & (p|N) \\ \coprod_{0\leq m} R_p^\times\pi_p^m R_p^\times & (p|d_B) \end{cases}$$

である．ここで $p|d_B$ のときの π_p は B_p の素元であり

$$R_p^\times\pi_p^m R_p^\times=R_p^\times\pi_p^m=\pi_p^m R_p^\times$$

が成り立つ．

補題 5.3.4 上の記号の下に次の（1）（2）（3）が成り立つ．

（1） $g_p\in B_p^\times$ とすると $g_p R_p^\times g_p^{-1}\approx R_p^\times$ である．

（2） $g\in B_A^\times$ とすると $gU_R g^{-1}\approx U_R$ である．

（3） $\alpha\in B^\times$ とすると $\alpha\Gamma_R\alpha^{-1}\approx\Gamma_R$ である．

証明 $R_p^\times$ および $g_p R_p^\times g_p^{-1}$ は $B_p^\times$ の compact な開部分群であるから $g_p R_p^\times g_p^{-1}\approx R_p^\times$ である．$g=(g_v)\in B_A^\times$ とおくと，有限個の p を除き $g_p R_p^\times g_p^{-1}=R_p^\times$ で

あり，$g_\infty GL_2^+(\boldsymbol{R})g_\infty^{-1}=GL_2^+(\boldsymbol{R})$ であるから $gU_Rg^{-1}\approx U_R$ である．最後に $\alpha\in B^\times$ ならば

$$|\alpha\Gamma_R\alpha^{-1}\cap\Gamma_R\backslash\Gamma_R|\leqq|\alpha U_R\alpha^{-1}\cap U_R\backslash U_R|<\infty,$$

$$|\alpha\Gamma_R\alpha^{-1}\cap\Gamma_R\backslash\alpha\Gamma_R\alpha^{-1}|\leqq|\alpha U_R\alpha^{-1}\cap U_R\backslash\alpha U_R\alpha^{-1}|<\infty$$

であるから $\alpha\Gamma_R\alpha^{-1}\approx\Gamma_R$ である．　（証明終）

$\Delta_R=D_R\cap B$ とおくと，この補題により，Hecke 環 $R(\Gamma_R,\Delta_R)$，$R(U_R, D_R)$，$R(R_p^\times, D_p)$ が定義される．さて χ を $\bmod N$ で定義される Dirichlet の指標とする．$(\boldsymbol{Z}/N\boldsymbol{Z})^\times\cong\prod_{p|N}(\boldsymbol{Z}_p/N\boldsymbol{Z}_p)^\times$ であるから，χ_p で上の同型によって引き起こされる $(\boldsymbol{Z}_p/N\boldsymbol{Z}_p)^\times$ の指標を表わす．D_R の元 $g=(g_v)\in D_R$ の各 p 成分 $(p|N)$ を $g_p=\begin{bmatrix}a_p & b_p\\ c_p & d_p\end{bmatrix}$ と書いて

$$\chi(g)=\prod_{p|N}\chi_p(a_p^{-1}) \tag{5.3.2}$$

と定義すると，χ は D の指標である．$\Delta_R\subset D_R$ であるので，χ を Γ_R, Δ_R に制限したものも χ で表わすと，χ は (2.8.1) を満たすことがわかる．よって Hecke 環 $R(\Gamma_R,\Delta_R)$ は保型形式の空間 $G_k(\Gamma_R,\chi)$ に作用する．特に $B=M_2(\boldsymbol{Q})$ とし，R を

$$R=\left\{\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}\in M_2(\boldsymbol{Z})\,|\,c\equiv 0 \pmod N\right\}$$

ととると，$\Gamma_R=\Gamma_0(N)$，$\Delta_R=\Delta_N$ で $G_K(\Gamma_R,\chi)=G_K(N,\chi)$ である．

次に $\bigotimes_p R(U_p, D_p)$ で $R(R_p^\times, D_p)$ のすべての素数 p にわたる tensor 積を表わすと，次の定理は局所的な Hecke 環と Γ_R の Hecke 環の関係を示す．

定理 5.3.5　上の記号の下に，次の（1）および（2）が成り立つ．

（1）　$\Gamma_R\alpha\Gamma_R\longmapsto U_R\alpha U_R$ によって $R(\Gamma_R,\Delta_R)\cong R(U_R, D_R)$ である．

（2）　$U_RgU_R\longmapsto\bigotimes_p R_p^\times g_pR_p^\times$ によって $R(U_R, D_R)\cong\bigotimes_p R(R_p^\times, D_p)$ である．

証明　(2)は明らかである．(1)を示すのには定理 2.7.6(1)の3条件(i)(ii)(iii) を示せばよい．R を含む極大 order R_0 を取る．$g=(g_v)$ を D_R の元とする．自然数 n を $\mathrm{id}(N_B(g_p))=(n)$ ととると各素数 p に対し $n/N_B(g_p)\in\boldsymbol{Z}_p^\times$ であるから，$\boldsymbol{R}_p^\times$ の元 h_p で

$$N_B(h_p)=n/N_B(g_p)$$

なるものが存在する（$p\nmid N$ ならば補題 5.2.3（3）により，$p|N$ ならば直接に存在がわかる.）$h_\infty=1$ とおき $B_A^\times$ の元 h を $h=(h_v)$ と定義すると $h\in U_R$ である．n を割る p および $R_p\neq R_{0p}$ なる p に対し自然数 f を

$$p^f R_{0p}(h_pg_p)^{-1}\subset pR_p$$

となるようにとる．$M=\prod_p p^f$ とおき，定理 5.2.10 を M, n, h_pg_p に適用すると，R_0 の元 β で $N_B(\beta)=n$ で且つ

$$\beta\equiv h_pg_p \qquad (\mathrm{mod}\, MR_{0p}) \qquad (p|M)$$

となるものが存在する．$h_pg_p\in D_p$ だから $\beta\in\Delta_R$ であり，

$$\beta(h_pg_p)^{-1}-1=(\beta-h_pg_p)(h_pg_p)^{-1}\in pR_p$$

だから $\beta(h_pg_p)^{-1}\in R_p^\times$ である．故に $\beta\in R$ で $D_R=U_R\Delta_R$ である．次に Δ_R の任意の元 α に対して $U_R\alpha U_R=U_R\alpha\Gamma_R$ となることを示そう．そのためには U_R の任意の元 h に対して $\alpha h\in U_R\alpha\Gamma_R$ となることが示されればよい．補題 5.3.3 により d_B を割らない各素数 p に対し δ_p, $\varepsilon_p\in U_p$ が存在し

$$\delta_p\alpha\varepsilon_p=\begin{bmatrix} p^l & 0 \\ 0 & p^m \end{bmatrix} \qquad (0\leqq l\leqq m)$$

と書ける．U_R の元 $w=(w_v)$ を

$$\begin{cases} p\nmid d_B \text{ ならば } w_p=\varepsilon_p\begin{bmatrix} N_B(h_p^{-1}) & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\varepsilon_p^{-1} \\ p|d_B \text{ ならば } w_p=h_p^{-1} \\ w_\infty=1 \end{cases}$$

とおくと $\alpha h\in U_R\alpha(wh)$ であり，wh は $N_B(w_ph_p)=1$ となる U_R の元である．$N_B(\alpha)$ を割る p および $R_{0p}\neq R_p$ となる p に対して，f を

$$p^f(\alpha(w_ph_p)^{-1}R_{0p}\alpha^{-1})\subset pR_p, \qquad p^fR_{0p}\subset R_p$$

であるようにとる．$M=\prod p^f$ とおき定理 5.2.10 を $M, 1, w_ph_p$ に適用すると，R の元 γ で $N_B(\gamma)=1$ であり

$$M \text{ を割る素数 } p \text{ については } \gamma\equiv w_ph_p \qquad (\mathrm{mod}\, MR_{0p})$$

となるものが存在する．とり方により $\gamma\in\Gamma_R$ である．$B_A^\times$ の元 $z=(z_v)$ を $\alpha\gamma$

$=z\alpha(wh)$ で定義すると，$p\nmid M$ なら明らかに $z_p\in U_p$ であり，$p|M$ ならば

$$z_p-1=\alpha(\gamma(w_ph_p)^{-1}-1)\alpha^{-1}\in pR_p$$

となるので $z_p\in R_p^\times$ である．よって $z\in U_R$ であるから，$\alpha wh\in U_R\alpha\gamma\subset U_R\alpha\Gamma_R$ がわかる．従って $\alpha h\in U_R\alpha(wh)\subset U_R\alpha\Gamma_R$ である．(iii) は明らかである．

(証明終)

定理 5.3.6 任意の素数 p に対して，$R(R_p^\times, D_p)$ は可換であり更に次の (1)(2)(3) が成り立つ．

(1) $p\nmid d_BN$ ならば $R(R_p^\times, D_p)=\boldsymbol{Z}\left[R_p^\times\begin{bmatrix}1&0\\0&p\end{bmatrix}R_p^\times,\ R_p^\times\begin{bmatrix}p&0\\0&p\end{bmatrix}R_p^\times\right]$ であり，e, f を自然数とすると

$$\left(R_p^\times\begin{bmatrix}1&0\\0&p\end{bmatrix}R_p^\times\right)\left(R_p^\times\begin{bmatrix}1&0\\0&p^e\end{bmatrix}R_p^\times\right)$$

$$=R_p^\times\begin{bmatrix}1&0\\0&p^{e+1}\end{bmatrix}R_p^\times+\begin{cases}(p+1)\left(R_p^\times\begin{bmatrix}p&0\\0&p\end{bmatrix}R_p^\times\right) & (e=1)\\ p\left(R_p^\times\begin{bmatrix}p&0\\0&p\end{bmatrix}R_p^\times\right)\left(R_p^\times\begin{bmatrix}1&0\\0&p^{e-1}\end{bmatrix}R_p^\times\right) & (e>1),\end{cases}$$

$$\left(R_p^\times\begin{bmatrix}p&0\\0&p\end{bmatrix}R_p^\times\right)\left(R_p^\times\begin{bmatrix}p^e&0\\0&p^f\end{bmatrix}R_p^\times\right)=R_p^\times\begin{bmatrix}p^{e+1}&0\\0&p^{f+1}\end{bmatrix}R_p^\times$$

が成り立つ．

(2) $p|N$ ならば $R(R_p^\times, D_p)=\boldsymbol{Z}\left[R_p^\times\begin{bmatrix}1&0\\0&p\end{bmatrix}R_p^\times\right]$ であり，自然数 e に対して

$$\left(R_p^\times\begin{bmatrix}1&0\\0&p\end{bmatrix}R_p^\times\right)\left(R_p^\times\begin{bmatrix}1&0\\0&p^e\end{bmatrix}R_p^\times\right)=R_p^\times\begin{bmatrix}1&0\\0&p^{e+1}\end{bmatrix}R_p^\times$$

である．

(3) $p|d_B$ ならば $R(R_p^\times, D_p)=\boldsymbol{Z}[R_p^\times\pi_pR_p^\times]$ であり，自然数 e に対して

$$(R_p^\times\pi_pR_p^\times)(R_p^\times\pi_p^eR_p^\times)=R_p^\times\pi_p^{e+1}R_p^\times,\qquad R_p^\times\pi_p^2R_p^\times=R_p^\times pR_p^\times$$

である．ここで π_p は B_p の任意の素元である．

証明 $p\nmid d_B$ の場合の可換性および (1), (2) は，定理 4.5.2 および補題 4.5.6 の場合と同様である ($\boldsymbol{Z}_p$ が局所環であるから証明は更に容易である)．

$p|d_B$ とすると，補題 5.3.3 により $R(R_p^\times, D_p)$ の任意の元は，$R_p^\times \pi_p^e R_p^\times$ (eは非負の整数）の1次結合で書ける．$R_p^\times \pi_p^e R_p^\times = R_p \pi_p^e$ であるので，積の定義により

$$(R_p^\times \pi_p R_p^\times)(R_p^\times \pi_p^e R_p^\times) = R_p^\times \pi_p^{e+1} R_p^\times$$

を得る．特に $R(R_p^\times, D_p)$は可換である．また $R_p^\times \pi_p^2 = R_p^\times p$ であるから $R_p^\times \pi_p^2 R_p^\times = R_p^\times p R_p^\times$ を得る．（証明終）

任意の自然数 n に対して，$R(\Gamma_R,\ \Delta_R)$ の元 $T(n)$ を

$$T(n) = \sum_{\mathrm{N}_B(\alpha)=n} \Gamma_R \alpha \Gamma_\alpha \tag{5.3.3}$$

と定義する．ここで積は $\mathrm{N}_B(\alpha)=n$ となる．すべての両側 Γ_R 剰余類にわたる．更に n が N と互いに素な自然数ならば

$$T(n,\ n) = \Gamma_R n \Gamma_R \tag{5.3.4}$$

と定義する．$R(R_p^\times,\ D_p)$ を自然な対応でもって $\bigotimes_p R(R_p^\times,\ D_p)$ に埋め込んで $\bigotimes_p R(R_p^\times,\ D_p)$ の部分環とみると，定理 5.3.5 における同型によって

1° $p\nmid Nd_B$ ならば，$T(p^l)$ と $\sum_{\substack{e+f=l \\ f\geqq e\geqq 0}} R_p^\times \begin{bmatrix} p^e & 0 \\ 0 & p^f \end{bmatrix} R_p^\times$ は対応し，更に $T(p,p)$ と $R_p^\times p R_p^\times$ は対応する．

2° $p|N$ ならば，$T(p^l)$ と $R_p^\times \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & p^l \end{bmatrix} R_p^\times$ は対応する．

3° $p|d_B$ ならば，$T(p^l)$ と $R_p^\times \pi_p^l R_p^\times$ は対応する．

以上により次の系がわかる．

系 5.3.7 $R(\Gamma_R,\ \Delta_R)$ は可換環であり，$R(\Gamma_R,\ \Delta_R) = \boldsymbol{Z}[T(p),\ T(p,\ p),\ T(q) \mid p\nmid Nd_B,\ q|Nd_B]$ である．更に次の（1）（2）がわかる．

（1） $(n,\ m)=1$ ならば，$T(n)\,T(m) = T(nm)$ である．

（2） $$T(p)\,T(p^e) = \begin{cases} T(p^{e+1}) + p\,T(p,\ p)\,T(p^{e-1}) & (p\nmid Nd_B) \\ T(p^{e+1}) & (p|Nd_B). \end{cases}$$

modular 群の場合と同様に，Hecke 環 $R(\Gamma_R,\ D_R)$ の元を係数とする形式的な Dirichlet 級数を

$$D(s) = \sum_{n=1}^{\infty} T(n)\,n^{-s} \tag{5.3.5}$$

と定義すると，系 5.3.7 の（1），（2）は $D(s)$ が形式的な Euler 積

$$(5.3.6) \qquad D(s)=\prod_{p\nmid Nd_B}(1-T(p)p^{-s}+pT(p,p)p^{-2s})^{-1} \times \prod_{p\mid Nd_B}(1-T(p)p^{-s})^{-1}$$

を持つこととは同値である.

さて α は B の元とする. B_v が $M_2(\boldsymbol{Q}_v)$ に同型ならば, B を B_v に埋め込んだときに, $\det(\alpha)\alpha^{-1}=\mathrm{N}_B(\alpha)\alpha^{-1}$ となるから, $\det(\alpha)\alpha^{-1}$ は v に関係なく α のみで決まることに注意すると, 定理 4.5.3 と同様の議論で次の定理を得る.

定理 5.3.8 (1) $S_k(\Gamma_R,\chi)$ 上の作用素として, $(n, N)=1$ ならば $T(n)$ と $\bar{\chi}(n)T(n)$ は Petersson 内積に関して随伴作用素である.

(2) $S_k(\Gamma_R,\chi)$ は $T(n)$, $(n, N)=1$, の同時固有函数からなる基底に持つ.

第6章　Hecke 作用素の trace

この章では Hecke 作用素の trace を Selberg の方法によって計算する．以下 §6.1～§6.3 は [Godement]，§6.4 は [清水3]，§6.5～§6.8 は [土方] に従って述べる．

§6.1　H 上の函数のなす函数空間

以下この節では k は実数とし，p は $1\leqq p$ なる実数或いは ∞ とする．上半平面 H の測度 dv は，§1.4 で定義した $GL_2^+(\boldsymbol{R})$ の作用で不変な測度 $dv(z)=y^{-2}dx\,dy$ を常に意味するものとする．H 上の複素数値をとる可測な函数 f に対し f の norm $\|f\|_p$ を

$$\|f\|_p=\left(\int_H|f(z)\mathrm{Im}(z)^{k/2}|^p\,dv(z)\right)^{1/p}\qquad(1\leqq p<\infty)$$

$$\|f\|_\infty=\sup\{|f(z)\mathrm{Im}(z)^{k/2}|\,|\,z\in H\}$$

と定義する．$\mathcal{L}_k^p(H)$ でもって $\|f\|_p<\infty$ となる H 上の可測函数全体のなす集合を表わす．$\mathcal{L}_k^p(H)$ は上の norm によって norm 空間である．特に $\mathcal{L}_0^p(H)$ は，普通の意味での，H 上の p 乗可積分な函数全体のなす空間である．従って良く知られたように $\mathcal{L}_0^p(H)$ は Banach 空間であり，$1/p+1/q=1$ ならば $\mathcal{L}_0^p(H)$ と $\mathcal{L}_0^q(H)$ は

$$(f,\,g)_H=\int_H f(z)\overline{g(z)}\,dv(z)\qquad(f\in\mathcal{L}_0^p(H),\quad g\in\mathcal{L}_0^q(H))$$

によって互いに双対空間となる．さて一般に，$\mathcal{L}_k^p(H)$ と $\mathcal{L}_0^p(H)$ は $f(z)\longmapsto f(z)\mathrm{Im}(z)^{k/2}$ なる対応により norm 空間として同型であるから，任意の実数 k に対して $\mathcal{L}_k^p(H)$ も Banach 空間であり，$1/p+1/q=1$ であるならば

$\mathcal{L}_k^p(H)$ と $\mathcal{L}_k^q(H)$ は

$$(6.1.1)\quad (f,\ g)_H=\int_H f(z)\bar{g}(z)\mathrm{Im}(z)^k\,dv(z)\quad (f\in\mathcal{L}_k^p(H),\ g\in\mathcal{L}_k^q(H))$$

により互いに双対空間となる．特に $p=2$ の時には (6.1.1) は $\mathcal{L}_k^2(H)$ の内積を与えるから $\mathcal{L}_k^2(H)$ は Hilbert 空間である．$\mathcal{L}_k^p(H)$ の元で特に H で正則なもの全体のなす部分空間を $\mathcal{H}_k^p(H)$ でもって書き表わす．

定理 6.1.1 $\mathcal{H}_k^p(H)$ は $\mathcal{L}_k^p(H)$ の閉部分空間である．

証明 f を $\mathcal{H}_k^p(H)$ の閉包に含まれる元とする．$\{f_n\}$ を f に収束する $\mathcal{H}_k^p(H)$ の元の列とすると，系 2.6.5 を $U=H$ として適用すると，$\{f_n\}$ は f に広義一様に収束し f は H 上の正則函数である． (証明終)

$\mathcal{H}_k^2(H)$ の核函数を定めよう．先ず核函数の一般的な定義から始める．

定義 $\mathcal{H}$ は集合 X 上の複素数値をとる函数からなる Hilbert 空間とし，$\mathcal{H}$ の内積を $(f,\ g)$ $(f,\ g\in\mathcal{H})$ と書き表わす． $X\times X$ 上の複素数値をとる函数 $K(x,\ y)$ が存在して次の 1° および 2° を満たすならば， $K(x,\ y)$ は $\mathcal{H}$ の**核函数** (kernel function) と呼ばれる．

1° $K(x,\ y)$ は y を固定した時に x の函数として $\mathcal{H}$ に属する．

2° 任意の $f\in\mathcal{H}$ に対して

$$f(y)=(f(x),\ K(x,\ y))\qquad (y\in X)$$

が成り立つ．ここで右辺の内積は x の函数とみての内積である．

核函数は一般には存在するとは限らないが，もし存在するならば唯 1 つである．実際 K_1 および K_2 が核函数であるとすると，任意の $f\in\mathcal{H}$ に対して

$$f(y)=(f(x),\ K_1(x,\ y))=(f(x),\ K_2(x,\ y))\qquad (y\in X)$$

となるから，y を固定したときに x の函数として $K_1(x,\ y)=K_2(x,\ y)$ であるが，y は任意なので $K_1=K_2$ がわかる．もしも $\mathcal{H}$ が有限次元ならば $\mathcal{H}$ は核函数を持ち，それは $\mathcal{H}$ の正規直交基 $\{f_1,\ \cdots,\ f_n\}$ を用いて

$$K(x,\ y)=\sum_{\nu=1}^{n}f_\nu(x)\overline{f_\nu(y)}$$

と書き表わされる．核函数は定義から直ちに

(6.1.2)　$K(x,\ y)=(K(u,\ y),\ K(u,\ x))$

$$=\overline{(K(u,\ x),\ K(u,\ y))}=\overline{K(y,\ x)}$$

なる性質を持っていることがわかる．

さて上で定義した Hilbert 空間 $\mathcal{H}_k^2(H)$ の核函数を調べよう．$z\in H$ とする．系 2.6.2 において $U=H$ とすると，定数 C が存在して $\mathcal{H}_k^2(H)$ の任意の元 f に対して

$$|f(z)|\leqq C\|f\|_2$$

が成り立つ．C は z と k のみで決まり f には関係しないから "$f\longmapsto f(z)$" は $\mathcal{H}_k^2(H)$ の連続な線型汎函数である．$\mathcal{H}_k^2(H)$ は Hilbert 空間であるから $\mathcal{H}_k^2(H)$ の元 g_z が存在して

$$f(z)=(f,\ g_z)_H$$

が成り立つ．$H\times H$ 上の函数 K_k を

$$K_k(w,\ z)=g_z(w)\qquad ((w,\ z)\in H\times H)$$

でもって定義すると，$K_k(w,\ z)$ は z を固定したとき w の函数として $\mathcal{H}_k^2(H)$ の元であり更に

(6.1.3)　$f(z)=(f,\ g_z)_H=(f(w),\ K_k(w,\ z))_H \qquad (f\in\mathcal{H}_k^2(H))$

であるから K_k は $\mathcal{H}_k^2(H)$ の核函数である．(6.1.3) は $\mathcal{H}_k^2(H)$ の内積の定義と (6.1.2) により

(6.1.4)　$f(z)=\int_H K_k(z,\ w)f(w)\mathrm{Im}(w)^k\,dv(w) \qquad (f\in\mathcal{H}_k^2(H))$

と書き替えられる．測度 dv は $SL_2(\boldsymbol{R})$ の作用で不変であるから，任意の $f\in\mathcal{H}_k^2(H)$ と任意の $\alpha\in SL_2(\boldsymbol{R})$ に対して

$$\int_H K_k(\alpha z_1,\ \alpha z_2)j(\alpha,\ z_1)^{-k}\overline{j(\alpha,\ z_2)}^{-k}f(z_2)\mathrm{Im}(z_2)^k\,dv(z_2)$$

$$=j(\alpha,\ z_1)^{-k}\int_H K_k(\alpha z_1,\ z_2)f(\alpha^{-1}z_2)j(\alpha,\ \alpha^{-1}z_2)^k\,\mathrm{Im}(z_2)^k\,dv(z_2)$$

$$=j(\alpha,\ z_1)^{-k}f(\alpha^{-1}\alpha z_1)j(\alpha,\ \alpha^{-1}\alpha z_1)^k$$

$$=f(z_1)$$

となるので，核函数の一意性によって

(6.1.5)　$K_k(\alpha z_1,\ \alpha z_2)=K_k(z_1,\ z_2)j(\alpha,\ z_1)^k\overline{j(\alpha,\ z_2)}^k \qquad (\alpha\in SL_2(\boldsymbol{R}))$

が成り立つ．特に α として $\begin{bmatrix}1 & b\\ 0 & 1\end{bmatrix}$, $b\in\boldsymbol{R}$, なる形の元をとると

(6.1.6)　$K_k(z_1+b,\ z_2+b)=K_k(z_1,\ z_2) \qquad (b\in\boldsymbol{R})$

である．さて $w=z_1-\bar{z}_2$ とおくと $z_2=\overline{z_1-w}$ であるので，$\boldsymbol{C}^2$ の領域 M を

$$M=\{(z_1,\ w)\in\boldsymbol{C}^2 \mid z_1\in H,\ \ \overline{z_1-w}\in H\}$$

と定義し，M 上の函数 h を

$$h(z_1,\ w)=K_k(z_1,\ \overline{z_1-w}) \qquad ((z,\ w)\in M)$$

でもって定義すると h は M 上の正則函数である．(6.1.6) により $h(z_1+b,\ w)=h(z_1,\ w)$ であるから h は z_1 に無関係である．そこで $P_k(w)=h(z_1,\ w)$ とおくと $P_k(w)$ は H 上の正則函数で

$$K_k(z_1,\ z_2)=P_k(z_1-\bar{z}_2), \qquad (z_1,\ z_2)\in H\times H$$

が成り立つ．次に α として $\begin{bmatrix}a & 0\\ 0 & a^{-1}\end{bmatrix}$ $(a\in\boldsymbol{R}^\times)$ ととると (6.1.5) により

$$P_k(a^2w)=a^{-2k}P_k(w)$$

がわかる．特に $w=i$ ととり，$y=a^2$ とおくと

$$P_k(iy)=y^{-k}P_k(i) \qquad (y>0)$$

を得るが P_k は H 上の正則函数であるから

$$P_k(w)=c_k\left(\frac{w}{2i}\right)^{-k} \qquad (w\in H)$$

でなければならない．以上により次の定理が示された．

定理 6.1.2　$\mathscr{H}_k^2(H)$ は核函数 $K_k(z_1,\ z_2)=c_k\left(\dfrac{z_1-\bar{z}_2}{2i}\right)^{-k}$ を持つ．ここで c_k は定数である．k が整数でなければ右辺は $-\pi/2<\arg((z_1-\bar{z}_2)/2i)<\pi/2$ にとる．

系 6.1.3　$\mathscr{H}_k^2(H)\subset\mathscr{H}_k^\infty(H)$.

証明　c_k を定理 6.1.2 における定数とする．$f\in\mathscr{H}_k^2(H)$ とすると H の任意の元 z_0 に対して

$$\begin{aligned}|f(z_0)|^2&=|(f(z),\ K_k(z,\ z_0))_H|\leqq\|f(z)\|_2^2\|K_k(z,\ z_0)\|_2^2\\ &=\|f(z)\|_2^2K_k(z_0,\ z_0)=c_k\|f(z)\|_2^2\,\mathrm{Im}(z_0)^{-k}\end{aligned}$$

が成り立つ．故に $|\mathrm{Im}(z)^{k/2}f(z)|\leqq c_k{}^{1/2}\|f\|_2$ となり，f は $\mathscr{H}_k^\infty(H)$ に含まれる．　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　(証明終)

定理 6.1.2 に現われた常数 c_k を具体的に求めよう．$\boldsymbol{R}_+$ および $\boldsymbol{R}_-$ を各々正の数全体および負の数全体とする．$\boldsymbol{R}$ およびその部分集合 $\boldsymbol{R}_+$ と $\boldsymbol{R}_-$ を普通の Lebesgue 測度により測度空間とみなす．$\boldsymbol{R}$ 上の2乗可積分な複素数値函数全体のなす Hilbert 空間を $L^2(\boldsymbol{R})$ で表わす．即ち

$$L^2(\boldsymbol{R})=\left\{f(x)\,\middle|\,\int_{\boldsymbol{R}}|f(x)|^2\,dx<\infty\right\}$$

とする．$\mathscr{H}_k^2(H)$ の元 f と $\boldsymbol{R}_+$ の点 y に対して $\boldsymbol{R}$ 上の函数 f_y を

$$f_y(x)=f(x+iy)$$

と定義する．$\|f\|_2^2=\int_H|f(x+iy)|^2y^{k-2}\,dx\,dy<\infty$ であるから，Fubini の定理により $\boldsymbol{R}_+$ の測度 0 の部分集合 S_f で

(6.1.7)　　　　$y\notin S_f$　ならば　$f_y\in L^2(\boldsymbol{R})$　である

ようなものが存在する．$y\notin S_f$ となる正数 y に対して f_y の Fourier 変換を $\hat{f}_y$ で表わすと

$$\hat{f}_y(u)=\underset{n\to\infty}{\mathrm{l.i.m.}}\int_{-n}^{n}f_y(x)e^{-2\pi iux}\,dx$$

である．ここで $\underset{n\to\infty}{\mathrm{l.i.m.}}$ は $L^2(\boldsymbol{R})$ の元としての収束を意味する．

定理 6.1.4　f は $\mathscr{H}_k^2(H)$ の元とし，S_f は (6.1.7) を満たす $\boldsymbol{R}_+$ の測度が 0 の部分集合とすると，$L^2(\boldsymbol{R})$ の元 $\hat{f}(u)$ で，S_f に属さない任意の正数 y に対して

$$\hat{f}_y(u)=\hat{f}(u)e^{-2\pi uy}$$

が成り立つものが唯1つ存在する*．$\hat{f}(u)$ は $\boldsymbol{R}_-$ においては測度が 0 の集合上の点を除けば 0 である．更に $k\leqq 1$ ならば，$\mathscr{H}_k^2(H)=\{0\}$ である．

この $\hat{f}(u)$ を $f(z)$ の Fourier 変換と呼ぶ．

証明　$z=x+iy$ とおくと正の整数 n に対し

---

*　2つの函数が測度が 0 である集合上を除けば一致するならば同一と見なす．

$$\hat{f}_{y,n}(u)=\int_{-n}^{n}f(z)e^{-2\pi iuz}dx$$
$$=e^{2\pi uy}\int_{-n}^{n}f_y(x)e^{-2\pi iux}dx$$

とおくと $y\in S_+$ ならば

$$\hat{f}_y(u)=\underset{n\to\infty}{\mathrm{l.i.m.}}\hat{f}_{y,n}(u)e^{-2\pi uy}$$

が成り立つ．従って各 $y(\notin S_f)$ について $\lim_{n\to\infty}\hat{f}_{y,n}(u)$ は u が $\boldsymbol{R}$ の或る測度 0 の部分集合 S_y に属する場合を除き存在する．正数 y_1, $y_2(\notin S_f)$ を $y_1<y_2$ にとり，$u\in\boldsymbol{R}$ を $u\notin S_{y_1}\cup S_{y_2}$ ととる．$f\in\mathscr{H}_k^2(H)$ であるから，系 2.6.3 により $y_1\leqq y\leqq y_2$ ならば $|x|\longrightarrow\infty$ とするときに，y に関して一様に

$$|f(z)e^{-2\pi iuz}|=|f(z)|e^{2\pi uy}\longrightarrow 0$$

である．$f(z)e^{-2\pi iuz}$ は H 上で正則なので

$$\left(\int_{-n+iy_1}^{n+iy_1}+\int_{n+iy_1}^{n+iy_2}+\int_{n+iy_2}^{-n+iy_2}+\int_{-n+iy_2}^{-n+iy_1}\right)f(z)e^{-2\pi iuz}dz=0$$

となるから $\lim_{n\to\infty}\hat{f}_{y_1n}(u)=\lim_{n\to\infty}\hat{f}_{y_2n}(u)$ であり，よって

$$\hat{f}(u)=\lim_{n\to\infty}\hat{f}_{y,n}(u)$$

は $y=\mathrm{Im}(z)$ に無関係に決まる $L^2(\boldsymbol{R})$ の元で

$$\hat{f}_y(u)=\hat{f}(u)e^{-2\pi uy}$$

が成り立つ．y_1, y_2 は任意にとれたから定理の前半を得る．一意性は明らかである．Plancherel の定理により

$$\int_{-\infty}^{\infty}|f_y(x)|^2dx=\int_{-\infty}^{\infty}|\hat{f}_y(u)|^2du \tag{6.1.8}$$

が成り立つから

$$\infty>\|f\|_2^2=\int_0^{\infty}y^{k-2}dy\int_{-\infty}^{\infty}|f_y(x)|^2dx$$
$$=\int_0^{\infty}y^{k-2}dy\int_{-\infty}^{\infty}|\hat{f}(u)|^2e^{-4\pi uy}du$$

である．よって Fubini の定理によって

$$=\int_{-\infty}^{\infty}|\hat{f}(u)|^2du\int_0^{\infty}y^{k-1}e^{-4\pi uy}\frac{dy}{y}$$

となる．y についての積分が有限値を持つのは，$k>1$ かつ $u>0$ のときであることは容易にわかるから

（i） $k\leqq 1$ ならば，測度 0 の集合に属する u を除き $\hat{f}(u)=0$,

（ii） $k>1$ ならば，$\boldsymbol{R}_-$ 上では測度 0 の集合に属する u を除き $\hat{f}(u)=0$

がわかる．$f(x+iy)=f_y(x)$ は $\hat{f}(u)e^{-2\pi uy}$ の通常の意味での Fourier 逆変換であるから，$k\leqq 1$ ならば $f(z)=0$ となる．従って $\mathcal{H}_k^2(H)=\{0\}$ がわかった． （証明終）

この定理により $k\leqq 1$ ならば $\mathcal{H}_k^2(H)=\{0\}$ であったから，以後 $k>1$ と仮定する．さて $\boldsymbol{R}$ 上の函数 $G_k(u)$ を

$$G_k(u)=\begin{cases}\displaystyle\int_0^\infty y^{k-1}e^{-\pi uy}\frac{dy}{y}=(\pi u)^{1-k}\Gamma(k-1) & (u>0)\\ 0 & (u\leqq 0)\end{cases}$$

と定義する．$\boldsymbol{R}$ 上定義された複素数値をとる可測函数 $\varphi(u)$ で，次の条件 (6.1.9) (6.1.10) を満たすもの全体のなす函数空間を $\hat{\mathcal{H}}_k^2$ で表わす．

(6.1.9) $\boldsymbol{R}_-$ では，測度が 0 となる集合上の点を除き $\varphi=0$,

$$\int_0^\infty|\varphi(u)|^2G_k(4u)\,du<\infty. \tag{6.1.10}$$

$\hat{\mathcal{H}}_k^2$ は $\boldsymbol{R}_+$ の測度 $G_k(4u)du$ に関する 2 乗可積分な函数全体と考えられるから $\hat{\mathcal{H}}_k^2$ の元 φ, ψ に対して

$$(\varphi, \psi)^\wedge=\int_0^\infty\varphi(u)\overline{\psi(u)}G_k(4u)\,du$$

と定義すると $(\ ,\ )^\wedge$ は $\hat{\mathcal{H}}_k^2$ の内積で $\hat{\mathcal{H}}_k^2$ は Hilbert 空間となる．(6.1.8) の両辺に y^{k-2} を掛けて y に関して積分することにより，$\mathcal{H}_k^2(H)$ の任意の元 f に対して

$$\|f\|_2^2=\int_{-\infty}^\infty|\hat{f}(u)|^2G_k(4u)\,du=(\hat{f}, \hat{f})^\wedge \tag{6.1.11}$$

が成り立つ．よって $f\in\mathcal{H}_k^2(H)$ ならば $\hat{f}\in\hat{\mathcal{H}}_k^2$ である．この逆変換を考えよう．φ を $\hat{\mathcal{H}}_k^2$ の任意の元とする．H の元 z に対して

$$\check{\varphi}(z)=\int_{-\infty}^\infty\varphi(u)e^{2\pi iuz}\,du, \tag{6.1.12}$$

とおき，また自然数 n に対して

$$\hat{\varphi}_n(z)=\int_{-n}^{n}\varphi(u)e^{2\pi iuz}du \tag{6.1.13}$$

と定義する．$\hat{\mathcal{H}}_k^2$ の定義より容易に $\hat{\varphi}(z)$ および $\hat{\varphi}_n(z)$ が有限の値をとることがわかる．

補題 6.1.5　(X, dx) は測度空間で，D は $\boldsymbol{C}$ の領域とする．$f(z, x)$ は $D\times X$ 上の函数で x を固定したときに D 上の正則函数であるようなものとする．D の任意の点 z_0 と z_0 を中心とし D に含まれる任意の円 $C=\{z\,|\,|z-z_0|=r\}$ をとったときに，$f(z, x)$ が $C\times X$ 上で積分可能ならば $F(z)=\int_X f(z, x)dx$ は D 上で正則である．

証明　D の点 ζ が C の内部ならば Cauchy の定理により $f(\zeta, x)=\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_C\frac{f(z, x)}{z-\zeta}dz$ であるから

$$\begin{aligned}F(\zeta, x)&=\int_X f(\zeta, x)\,dx=\frac{1}{2\pi i}\int_X\int_C\frac{f(z, x)}{z-\zeta}\,dx\,dz\\&=\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{F(z, x)}{z-\zeta}\,dz\end{aligned}$$

となる．r' を $0<r'<r$ とするときに，$|\zeta-z_0|\leqq r'$ であるならば

$$\frac{1}{z-\zeta}=\frac{1}{(z-z_0)-(\zeta-z_0)}=\frac{1}{z-z_0}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{\zeta-z_0}{z-z_0}\right)^n$$

で右辺は一様収束するから

$$F(\zeta, x)=\frac{1}{2\pi i}\sum_{n=0}^{\infty}\int_C\frac{(\zeta-z_0)^n}{(z-z_0)^{n+1}}F(z, x)\,dz$$

となり $F(\zeta, x)$ は z_0 で正則である．　　　　(証明終)

定理 6.1.6　$\hat{\mathcal{H}}_k^2$ の任意の元 φ に対し H 上の函数 $\hat{\varphi}(z)$ を (6.1.12) で定義すると，$\hat{\varphi}(z)\in\mathcal{H}_k^2(H)$ である．更に $\varphi\longmapsto\hat{\varphi}$ は定理 6.1.4 で定義した $\mathcal{H}_k^2(H)$ の Fourier 変換の逆変換を与える．

証明　$\hat{\varphi}_n(z)$ を (6.1.13) で定義される H 上の函数とすると，補題 6.1.5 により $\hat{\varphi}_n(z)$ は H 上の正則函数である．$\hat{\varphi}_n(z)$ が $\hat{\varphi}(z)$ に H の compact 部分集合上で一様に収束することを示そう．先ず定義により

$$|\hat{\varphi}(z)-\hat{\varphi}_n(z)| \leqq \left(\int_{-\infty}^{-n}+\int_n^{\infty}\right)|\varphi(u)e^{2\pi iuz}|\,du$$

$$=\int_n^{\infty}|\varphi(u)e^{2\pi iuz}|\,du$$

であるが，Schwarz の補題により

$$\leqq\left(\int_n^{\infty}|\varphi(u)G_k(4u)^{1/2}|^2\,du\right)^{1/2}\left(\int_n^{\infty}|G_k(4u)^{-1/2}e^{2\pi iuz}|^2\,du\right)^{1/2}$$

となる．ここで $\int_n^{\infty}|\varphi(u)G_k(4u)^{1/2}|^2\,du$ は z に無関係で $n\longrightarrow\infty$ とするときに 0 に収束する．$u>0$ ならば $G_k(4u)=(4\pi u)^{1-k}\Gamma(k-1)$ であるから

$$\int_n^{\infty}|G_k(4u)^{-1/2}e^{2\pi iuz}|^2\,du\leqq\int_0^{\infty}|G_k(4u)^{-1/2}e^{2\pi iuz}|^2\,dz$$

$$=(4\pi)^{k-1}\Gamma(k-1)^{-1}\int_0^{\infty}e^{-4\pi uy}u^{k-1}\,du$$

$$=\frac{(4\pi)^{k-1}}{(4\pi y)^k}\frac{\Gamma(k)}{\Gamma(k-1)}$$

となるから $\int_n^{\infty}|G_k(4u)^{-1/2}e^{2\pi iuz}|^2\,du$ は H の任意の compact 部分集合上で有界である．従って $\hat{\varphi}_n(z)$ は $\hat{\varphi}(z)$ に広義一様に収束する．よって $\hat{\varphi}(z)$ は H 上の正則函数であり，更に

$$\|\hat{\varphi}\|_2^2=\int_H|\hat{\varphi}(z)|^2y^k\,dv(z)$$

$$=\int_0^{\infty}y^{k-2}\,dy\int_{-\infty}^{\infty}|\hat{\varphi}(x+iy)|^2\,dx$$

であるが，$\hat{\varphi}(x+iy)$ は y を固定したときに x の函数としては $L^2(\boldsymbol{R})$ の元として $\varphi(u)e^{-2\pi uy}$ の Fourier 逆変換であるから Plancherel の定理より

$$=\int_0^{\infty}y^{k-2}\,dy\int_{-\infty}^{\infty}|\varphi(u)|^2e^{-4\pi uy}\,du$$

$$=\int_0^{\infty}|\varphi(u)|^2\,du\int_0^{\infty}y^{k-2}e^{-4\pi uy}\,dy$$

$$=\|\varphi\|^2<\infty$$

となり $\hat{\varphi}\in\mathcal{H}_k^2(H)$ がわかる．この変換が定理 6.1.4 で定義した Fourier 変換の逆変換となることは，$L^2(\boldsymbol{R})$ の普通の意味での Fourier 変換および逆変換に帰着される．　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　（証明終）

系 6.1.7 $\mathcal{H}_k^2(H)\neq\{0\}$ である必要十分条件は $k>1$ である．

証明 上の定理により $k>1$ ならば $\hat{\mathcal{H}}_k^2\neq\{0\}$ が言えればよいがこれは明らかである．（証明終）

以上の準備によって定理 6.1.2 における定数 c_k が求まる．$\mathcal{H}_k^2(H)$ の核函数 $K_k(w, z)$ は z を固定したとき，w の函数として $\mathcal{H}_k^2(H)$ に含まれるから，z を固定したとき w の函数として Fourier 変換したものを $\hat{K}_k(u, z)$ で表わす．φ が $\hat{\mathcal{H}}_k^2$ の任意の元ならば

$$(\varphi(u), \hat{K}_k(u, z))\hat{}=(\hat{\varphi}(w), K_k(w, z))_H=\hat{\varphi}(z)=\int_0^\infty \varphi(u)e^{2\pi iuz}du$$

である．定義により $(\varphi(u), \hat{K}_k(u, z))\hat{}=\int_0^\infty \varphi(u)\overline{\hat{K}_k(u, z)}G_k(4u)du$ であり，φ は $\hat{\mathcal{H}}_k^2$ の任意の元であるので $\boldsymbol{R}_+$ において

$$\hat{K}_k(u, z)=G_k(4u)^{-1}e^{-2\pi iu\bar{z}}$$

が成り立つ．これは u の函数として $\hat{\mathcal{H}}_k^2$ に属するから Fourier 逆変換を施すと

$$K_k(w, z)=\int_0^\infty G_k(4u)^{-1}e^{2\pi iu(w-\bar{z})}du$$

である．即ち

$$c_k\left(\frac{z}{2i}\right)^{-k}=\int_0^\infty G_k(4u)^{-1}e^{2\pi iuz}du$$

となる．特に $z=2i$ として

$$c_k=\frac{k-1}{4\pi}$$

を得る．以上により $\mathcal{H}_k^2(H)$ の核函数が完全に求まった．

定理 6.1.8 $k>1$ とすると $\mathcal{H}_k^2(H)$ の核函数は

$$K_k(z_1, z_2)=\frac{k-1}{4\pi}\left(\frac{z_1-\bar{z}_2}{2i}\right)^{-k}\qquad((z_1, z_2)\in H\times H)$$

である．

§6.2 $\mathcal{L}_k^p(H)$ から $\mathcal{H}_k^p(H)$ への射影

$\mathcal{L}_k^p(H)$ から閉部分空間 $\mathcal{H}_k^p(H)$ への射影写像を求めたい．このためには H

と解析的に同型な単位円盤 K を考える方が取り扱いが楽である．上半平面の場合と平行に K 上の函数のなす Banach 空間 $\mathcal{L}_k^p(K)$ および $\mathcal{H}_k^p(K)$ を定義しよう．K の測度 $dv_k(w)=4(1-|w|^2)^{-2}\,dx\,dy$ $(w=x+iy)$ に関する可測函数 $g(w)$ に対し $\|g\|_p$ を

$$\|g\|_p=\left(\int_K |g(w)(1-|w|^2)^{k/2}|^p\,dv_k(w)\right)^{1/p} \qquad (1\leqq p<\infty),$$

$$\|g\|_\infty=\sup\{|g(w)(1-|w|^2)^{k/2}|\,;\ w\in K\}$$

と定義し，$1\leqq p\leqq\infty$ に対して

$$\mathcal{L}_k^p(K)=\{g(w)\,|\,K \text{ 上の可測函数で } \|g\|_p<\infty\},$$

$$\mathcal{H}_k^p(K)=\{g(w)\in\mathcal{L}_k^p(K)\,|\,g(w) \text{ は } K \text{ 上正則}\}$$

とおく．

定理 6.2.1 $\rho=\begin{bmatrix}1 & -i\\ 1 & i\end{bmatrix}$ とおく．

（1） $\mathcal{H}_k^p(H)$ と $\mathcal{H}_k^p(K)$ は $f(z)\longmapsto f(w)=(1-w)^k f(\rho^{-1}w)$ なる対応により norm 空間として同型である．

（2） $k>2$ ならば K 上の正則で且つ有界な函数は $\mathcal{H}_k^p(K)$ $(1\leqq p\leqq\infty)$ に含まれる．

（3） $k>2$ とする．f は H 上の正則函数で $(1-\rho z)^{-k}f(z)$ が有界なるものとすると f は $\mathcal{H}_k^p(H)$ に含まれる．

（4） $k>2$ とする．z_2 を固定したとき，z_1 の函数として

$$K_k(z_1,\,z_2)\in\mathcal{H}_k^p(H)$$

が任意の p $(1\leqq p\leqq\infty)$ に対して成り立つ．

証明 $w\in K$ ならば $\mathrm{Im}(\rho^{-1}w)=(1-|w|^2)/|1-w|^2$ であるから

$$\|f\|_p^p=\int_K |f(\rho^{-1}w)(1-w)^{-k}(1-|w|^2)^{k/2}|^p\,dv_K(w)$$

$$=\int_H |f(z)\,\mathrm{Im}(z)^{k/2}|^p\,dv(z)=\|f\|_p^p$$

となり，（1）が示される．$p=\infty$ ならば（2）は明らかである．$p<\infty$ とし，g を K 上の函数で有界なものとする．$|g|<M$ とし，$w=x+iy$ とおくと，

$$\|g\|_p^p\leqq 4M^p\int_K (1-|w|^2)^{kp/2-2}\,dx\,dy=4\pi M^p\int_0^1 r^{kp/2-2}\,dr<\infty$$

となり（2）がわかった．（3）は（1）および（2）により明らかである．次に z_2 を固定したときに

$$(1-\rho z_1)^{-k}K_k(z_1,\ z_2)=c_k\left(\frac{z_1+i}{z_1-\bar{z}_2}\right)$$

は z_1 の函数として H 上で有界であるから（3）により（4）がわかる．

（証明終）

補題 6.2.2　$k>2$ と仮定する．

（1）　$n\in \boldsymbol{Z}$ に対して $V_n=\{g(w)\in\mathcal{L}_k^p(K)\,|\,g(wt)=t^n g(w),\ {}^\forall t\in \boldsymbol{C}^1\}$ とすると，V_n の代数的な直和 $\bigoplus_{n=-\infty}^{\infty} V_n$ は $\mathcal{L}_k^p(K)$ において稠密である．

（2）　$\bigoplus_{n=0}^{\infty}(V_n\cap\mathcal{H}_k^p(K))=\boldsymbol{C}[w]$（多項式環）でこれは $\mathcal{H}_k^p(K)$ において稠密である．

証明　n は整数とする．$\mathcal{L}_k^p(K)$の元 g に対して

$$(P_n g)(w)=\int_0^1 g(we^{2\pi i\theta})e^{-2\pi in\theta}\,d\theta \qquad (w\in K)$$

と定義する．$w=re^{i\theta}$ とおくと $dv_K(w)=4r(1-r^2)^{-1}\,dr\,d\theta$ であるから Fubini の定理により $(P_n g)(w)$ は有限で $P_n g$ は V_n の元である．よって P_n は $\mathcal{L}_k^p(K)$ から V_n への連続な線型写像を与える．もし $g\in V_n$ ならば $P_n(g)=g$ であるから P_n は $\mathcal{L}_k^p(K)$ から V_n への射影である．$\mathcal{L}_k^p(K)$ の元 $g(\neq 0)$ が連続で compact な台を持つとする．正数 $l(<1)$ を十分 1 に近くとると g の台は $U=\{w\in K\,|\,|w|\leqq l\}$ に含まれている．U の測度を M とする．任意の $\varepsilon>0$ に対して，$\delta>0$ を十分小さくとると $|t-1|<\delta$ である限り

$$w\in U \text{ なら } wt\in K \text{ であり，} |g(w)-g(wt)|<\varepsilon M^{-1/p}$$

が成り立つ．φ を $\boldsymbol{C}^1$ 上の非負値の連続函数で $\{t\in\boldsymbol{C}^1\,|\,|t-1|<\delta\}$ に台を持ち

$$\int_0^1\varphi(e^{2\pi i\theta})\,d\theta=1$$

なるものとし，g_1 を

$$g_1(w)=\int_0^1 g(we^{2\pi i\theta})\varphi(e^{2\pi i\theta})\,d\theta$$

と定義すると $g_1(w)\in\mathcal{L}_k^p(K)$ で $\|g-g_1\|_p\leqq\varepsilon$ が成り立つ．φ は $\boldsymbol{C}^1$ 上の連続函数であるから

$$\varphi(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}b_nt^n$$

と Fourier 展開される．右辺は $\boldsymbol{C}^1$ 上で一様に収束するから，自然数 m を十分大きくとると

$$|\varphi(t)-\sum_{n=-m}^{m}b_nt^n|<\varepsilon/\|g\|_p \qquad (t\in\boldsymbol{C}^1)$$

が成り立つので

$$h(w)=\int_0^1 g(we^{2\pi i\theta})\Big(\sum_{n=-m}^{m}b_ne^{2\pi in\theta}\Big)d\theta$$
$$=\sum_{n=-m}^{m}b_nP_{-n}(g)$$

と置くと，$h(w)\in\mathcal{L}_k^p(K)$ であり

$$\|g_1-h\|_p<\varepsilon$$

である．よって

$$\|g-h\|_p<2\varepsilon$$

となり，$\mathcal{L}_k^p(K)$ の元で compact な台を持った連続函数となるものは $\bigoplus_{n=-\infty}^{\infty}V_n$ の閉包に含まれる．故に $\bigoplus_{n=-\infty}^{\infty}V_n$ は $\mathcal{L}_k^p(K)$ で稠密である．補題 6.1.5 により P_n は $\mathcal{H}_k^p(K)$ を $\mathcal{H}_k^p(K)$ に写像するから $\bigoplus_{n=-\infty}^{\infty}(V_n\cap\mathcal{H}_k^p(K))$ は $\mathcal{H}_k^p(K)$ で稠密である．また $V_n\cap\mathcal{H}_k^p(K)$ の元の原点 O における Taylor 展開を考えると，$V_n\cap\mathcal{H}_k^p(K)$ の元は w^n の常数倍であることがわかる．定理 6.2.1（2）により w^n $(n\geqq 0)$ は $\mathcal{H}_k^p(K)$ に含まれるから

$$V_n\cap\mathcal{H}_k^p(K)=\begin{cases}\{cw^n \mid c\in\boldsymbol{C}\} & (n\geqq 0)\\ \{0\} & (n<0)\end{cases}$$

となり（2）を得る． (証明終)

定理 6.2.3 $k>2$ とする．

（1） $f\in\mathcal{L}_k^p(H)$ に対し

$$(\mathcal{K}f)(z)=\int_H K_k(z_1,\ z_2)f(z_2)\mathrm{Im}(z_2)^k\,dv(z_2)$$

と定義すると，$\mathcal{K}$ は任意の $p(\geqq 1)$ に対し $\mathcal{L}_k^p(H)$ から $\mathcal{H}_k^p(H)$ への射影写像である．

（2） $1/p+1/q=1$ $(p,\ q\geqq 1)$ ならば

$$\mathcal{H}_k^q(H)=\{f\in\mathcal{L}_k^q(H)\,|\,(f,\ g)_H=0,\ \forall g\in(1-\mathcal{K})\mathcal{L}_k^p(H)\}$$

である．

証明 $p\geqq 1$, $q\geqq 1$, $1/p+1/q=1$ とし，$f\in\mathcal{L}_k^p(H)$, $g\in\mathcal{L}_k^q(H)$ とすると

$$|(g,\ Kf)_H|$$

$$\leqq\int_H\int_H|g(z_1)K_k(z_1,\ z_2)f(z_2)|\,\mathrm{Im}(z_1)^k\,\mathrm{Im}(z_2)^k\,dv(z_1)dv(z_2)$$

である．定理 1.4.5 により H 上の積分は $SL_2(\boldsymbol{R})$ 上の積分でもって

$$=\int_{SL_2(\boldsymbol{R})}\int_{SL_2(\boldsymbol{R})}|g(\alpha i)K_k(\alpha i,\ \beta i)f(\beta i)|\,\mathrm{Im}(\alpha i)^k\,\mathrm{Im}(\beta i)^k\,d\alpha d\beta$$

と表わされる．よって (6.1.5) により

$$=\iint|g(\alpha i)K_k(i,\alpha^{-1}\beta i)f(\alpha i)\mathrm{Im}(\alpha i)^{k/2}|\,\mathrm{Im}(\alpha^{-1}\beta i)^{k/2}\mathrm{Im}(\beta i)^{k/2}d\alpha d\beta$$

となる．$\alpha^{-1}\beta$ を改めて β と書くと

$$=\iint|g(\alpha i)K_k(i,\ \beta i)f(\alpha\beta i)|\,\mathrm{Im}(\alpha i)^{k/2}\mathrm{Im}(\beta i)^{k/2}\,\mathrm{Im}(\alpha\beta i)^{k/2}\,d\alpha d\beta$$

$$=\int_{SL_2(\boldsymbol{R})}|K_k(i,\ \beta i)|\,\mathrm{Im}(\beta i)^{k/2}\,d\beta$$

$$\times\int_{SL_2(\boldsymbol{R})}|f(\alpha\beta i)g(\alpha i)|\,\mathrm{Im}(\alpha i)^{k/2}\,\mathrm{Im}(\alpha\beta i)^{k/2}\,d\alpha$$

となる．Hörder の不等式により

$$\int_{SL_2(\boldsymbol{R})}|f(\alpha\beta i)g(\alpha i)|\,\mathrm{Im}(\alpha i)^{k/2}\,\mathrm{Im}(\alpha\beta i)^{k/2}\,d\alpha$$

$$\leqq\left\{\int_{SL_2(\boldsymbol{R})}|f(\alpha\beta i)\mathrm{Im}(\alpha\beta i)^{k/2}|^p\,d\alpha\right\}^{1/p}\left\{\int_{SL_2(\boldsymbol{R})}|g(\alpha i)\mathrm{Im}(\alpha i)^{k/2}|^q\,d\alpha\right|^{1/q}$$

であるが，$SL_2(\boldsymbol{R})$ は定理 1.4.5 により unimodular であるから

$$=\left\{\int_{SL_2(\boldsymbol{R})}|f(\alpha i)\mathrm{Im}(\alpha i)^{k/2}|^p\,d\alpha\right\}^{1/p}\left\{\int_{SL_2(\boldsymbol{R})}|g(\alpha i)\mathrm{Im}(\alpha i)^{k/2}|^q\,d\alpha\right\}^{1/q}$$

$$=\left\{\int_H|f(z)\mathrm{Im}(z)^{k/2}|^p\,dv(z)\right\}^{1/p}\left\{\int_H|g(z)\mathrm{Im}(z)^{k/2}|^q\,dv(z)\right\}^{1/q}$$

$$=\|f\|_p\|g\|_q$$

となる．また $K_k(w,\ z)=\overline{K_k(z,\ w)}$ であるから

$$\int_{SL_2(\boldsymbol{R})}|K_k(i,\ \beta i)|\,\mathrm{Im}(\beta i)^{k/2}\,d\beta=\|K_k(z,\ i)\|_1$$

となるので，これを合わせると

$$|(g,\ \mathcal{K}f)_H|\leqq\|K_k(z,\ i)\|_1\|f\|_p\|g\|_q$$

が成り立つ．$\mathcal{L}_k^p(H)$ と $\mathcal{L}_k^q(H)$ は双対空間であるから，線型汎函数の norm の定義により

$$\|\mathcal{K}f\|_p\leqq\|K_k(z,\ i)\|_1\|f\|_p$$

となり $\mathcal{K}$ は連続である．H_n $(n=1,\ 2,\ \cdots)$ を H に含まれる compact 集合で $H_n\subset H_{n+1}$ で且つ $H=\bigcup_{n=1}^{\infty}H_n$ なるものとする．

$$(\mathcal{K}f)_n(z)=\int_{H_n}K_k(z,\ z_2)f(z_2)\mathrm{Im}(z_2)^k\,dv(z_2)$$

とすると補題 6.1.5 により $(\mathcal{K}f)_n(z)$ は正則函数となり，$\lim_{n\to\infty}(\mathcal{K}f)_n(z)=\mathcal{K}f(z)$ である．この収束が広義一様であることを示そう．M は H の任意の compact 集合とし，M の点 z_0 を1つ固定すると $K_k(z_1,\ z_2)$ の形より或る定数 C が存在して $|K_k(z,\ z_2)|\leqq C|K_k(z_0,\ z_2)|$ が M の任意の元 z と H の任意の元 z_2 に対して成立するから，$z\in M$ ならば

$$|\mathcal{K}f(z)-(\mathcal{K}f)_n(z)|\leqq C\int_{H-H_n}|K(z_0,\ z_2)f(z_2)|\mathrm{Im}(z_2)^k\,dv(z_2)$$

となり $(\mathcal{K}f)_n(z)$ は M 上で一様に $\mathcal{K}f(z)$ に収束する．よって $\mathcal{K}f(z)$ は正則となり $\mathcal{H}_k^p(H)$ に属する．次に $\mathcal{H}_k^p(H)$ において $\mathcal{K}f=f$ が成立することを示す．補題 6.2.2 により $\bigoplus_{n\geqq 0}(\mathcal{H}_k^p(K)\cap V_n)$ は $\mathcal{H}_k^p(K)$ で稠密であり $\bigoplus_{n\geqq 0}(\mathcal{H}_k^p(K)\cap V_n)$ の各元は w の多項式であるから K で有界となり $\mathcal{H}_k^2(K)$ に属する．従って $\mathcal{H}_k^p(K)\cap\mathcal{H}_k^2(K)$ は $\mathcal{H}_k^p(K)$ で稠密である．よって定理 6.2.1 により $\mathcal{H}_k^p(H)\cap\mathcal{H}_k^2(H)$ は $\mathcal{H}_k^p(H)$ で稠密であるが，$\mathcal{H}_k^p(H)\cap\mathcal{H}_k^2(H)$ 上では $\mathcal{K}f=f$ が成り立つから $\mathcal{H}_k^p(H)$ 上でも $\mathcal{K}f=f$ が成立する．(2) は $f\in\mathcal{L}_k^p(H),\ g\in\mathcal{L}_k^q(H)$ $(1/p+1/q=1)$ ならば

$$(\mathcal{K}f,\ g)_H=(f,\ \mathcal{K}g)_H$$

が成り立つことにより明らかである．　　　　　　　　　　　　(証明終)

§6.3　保型形式のなす函数空間

Γ は第1種の Fuchs 群とし，χ は Γ の位数有限の指標とする．k は自然数

としもし $-1\in\Gamma$ ならば $\chi(-1)=(-1)^k$ と仮定する．H 上の可測函数 f で

$$(6.3.1)\qquad f(\gamma z)=\chi(\gamma)j(\gamma,\ z)^k f(z)\qquad(\gamma\in\Gamma)$$

を満たすものに対し，$\|f\|_{\Gamma,p}$ $(1\leqq p\leqq\infty)$ を

$$\|f\|_{\Gamma,p}=\left(\int_{\Gamma\backslash H}|f(z)\mathrm{Im}(z)^{k/2}|^p dv(z)\right)^{1/p}\qquad(1\leqq p<\infty),$$

$$\|f\|_{\Gamma,\infty}=\sup\{|f(z)\mathrm{Im}(z)^{k/2}|\mid z\in H\}$$

と定義する．$|f(z)\mathrm{Im}(z)^{k/2}|$ は Γ の作用で不変であるから，この定義は意味を持つ．$\mathcal{L}_k^p(\Gamma,\chi)$ を (6.3.1) を満たす H 上の可測な函数で $\|f\|_{\Gamma,p}<\infty$ なるもの全体，$\mathcal{H}_k^p(\Gamma,\chi)$ を $\mathcal{L}_k^p(\Gamma,\chi)$ の元で正則なもの全体とする．§6.1 と同様に $\mathcal{L}_k^p(\Gamma,\chi)$ は Banach 空間で $\mathcal{H}_k^p(\Gamma,\chi)$ はその閉部分空間である．特に $n=2$ とすると $\mathcal{L}_k^2(\Gamma,\chi)$ は内積

$$(f,\ g)_\Gamma=\int_{\Gamma\backslash H}f(z)\overline{g(z)}\mathrm{Im}(z)^k\,dv(z)\qquad(f,\ g\in\mathcal{L}_k^2(\Gamma,\chi))$$

により Hilbert 空間で，$\mathcal{H}_k^2(\Gamma,\chi)$ はその閉部分空間となる．$\Gamma\backslash H$ の測度は有限であるから任意の p に対し $\mathcal{H}_k^\infty(\Gamma,\chi)\subset\mathcal{H}_k^p(\Gamma,\chi)$ である．さらに定理 2.1.5 により

$$\mathcal{H}_k^\infty(\Gamma,\chi)=S_k(\Gamma,\chi)$$

である，$\mathcal{H}_k^2(\Gamma,\chi)$ の内積を $\mathcal{H}_k^\infty(\Gamma,\chi)=S_k(\Gamma,\chi)$ に制限したものは常数倍を除き Petersson 内積に等しい．

定理 6.3.1 $k\geqq1$ ならば $\mathcal{H}_k^\infty(\Gamma,\chi)=\mathcal{H}_k^2(\Gamma,\chi)$ である．

証明 $\Gamma\backslash H$ が compact ならば明らかである．Γ が cusp を持つとする．$f\in\mathcal{H}_k^2(\Gamma,\chi)$ とする．f が $S_k(\Gamma,\chi)=\mathcal{H}_k^\infty(\Gamma,\chi)$ に含まれることを示すには $f\in S_k(\Gamma')$，$\Gamma'=\mathrm{Ker}(\chi)$，を示せば十分であるので，始めから χ は恒等表現であると思って差支えない．x_0 を Γ の cusp とする．$\sigma\in SL_2(\boldsymbol{R})$ を $\sigma x_0=\infty$ なる元とし，$\sigma\Gamma_{x_0}\sigma^{-1}\cdot\{\pm1\}=\left\{\pm\begin{bmatrix}1 & mh\\ 0 & 1\end{bmatrix}\middle|\, m\in\boldsymbol{Z}\right\}$，$h>0$ とすると

$$(f|[\sigma^{-1}]_k)(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}a_n e^{\pi inz/h}$$

と展開される．但し k が偶数の場合および k が奇数で x_0 が正則な cusp の

場合には奇数の n については $a_n=0$ である．$l>h$ ならば，系1.7.5により

$$\infty>\int_{\Gamma\backslash H}|f(z)\mathrm{Im}(z)^{k/2}|^2\,dv(z)$$
$$\geqq\frac{1}{2}\int_l^\infty\int_0^{2h}|f(\sigma^{-1}z)j(\sigma^{-1},\ z)^{-k}|^2\,\mathrm{Im}(z)^k\,dv(z)$$
$$=\int_l^\infty\int_0^{2h}\sum_{m,n}a_m\bar{a}_ne^{-\pi y(m+n)/h}e^{\pi ix(m-n)/h}y^{k-2}\,dx\,dy$$
$$=2h\lim_{t\to\infty}\sum_n\int_l^t|a_n|^2e^{-2\pi yn/h}y^{k-2}\,dy$$

である．$k\geqq1$ であるから，$n\leqq0$ ならば $a_n=0$ である．従って $f\in S_k(\Gamma,\chi)=\mathcal{H}_k^\infty(\Gamma,\chi)$ である．（証明終）

$\mathcal{L}_k^1(H)$ の任意の元 $f(z)$ および $\mathcal{H}_k^2(H)$ の核函数 $K_k(z_1,z_2)$ に対し

(6.3.2) $$f^\Gamma(z)=|Z(\Gamma)|^{-1}\sum_{\gamma\in\Gamma}\chi(\gamma)^{-1}f(\gamma z)j(\gamma,\ z)^{-k}\qquad(z\in H),$$

(6.3.3) $$K_k^\Gamma(z_1,\ z_2)=|Z(\Gamma)|^{-1}\sum_{\gamma\in\Gamma}\chi(\gamma)^{-1}K_k(\gamma z_1,\ z_2)j(\gamma,\ z_1)^{-k}\qquad((z_1,\ z_2)\in H\times H)$$

と定義する．

定理 6.3.2 上の記号の下に

（1） (6.3.2) の右辺は H の測度 0 の集合を除き絶対収束し，$f^\Gamma(z)\in\mathcal{L}_k^1(\Gamma,\chi)$ である．さらに $\|f\|_1\geqq\|f^\Gamma\|_{\Gamma,1}$ が成り立つ．

（2） $f\in\mathcal{H}_k^1(H)$ ならば $f^\Gamma\in\mathcal{H}_k^1(\Gamma,x)$ である．

（3） (6.3.3) の右辺は，$H\times H$ 上で絶対かつ広義一様に収束し，z_2 を固定したときには z_1 の函数として $K_k^\Gamma(z_1,z_2)\in\mathcal{H}_k^1(\Gamma,\chi)$ である．

証明 $f\in\mathcal{L}_k^1(H)$ とすると

(6.3.4) $$\int_{\Gamma\backslash H}\sum_{\gamma\in\Gamma}|f(\gamma z)j(\gamma,\ z)^{-k}\,\mathrm{Im}(z)^{k/2}|\,dv(z)$$
$$=\int_{\Gamma\backslash H}\sum_{\gamma\in\Gamma}|f(\gamma z)\mathrm{Im}(\gamma z)^{k/2}|\,dv(z)$$
$$=|Z(\Gamma)|\int_H|f(z)\mathrm{Im}(z)^{k/2}|\,dv(z)<\infty$$

であるから，(6.3.1) の右辺は H 上測度 0 の集合を除き絶対収束する．f^Γ が (6.3.1) を満たすことは明らかだから $f^\Gamma\in\mathcal{L}_k^1(\Gamma,\chi)$ であり，(6.3.4) に

より $\|f\|_1 \geqq \|f^\Gamma\|_{\Gamma,1}$ がわかる.

（2）は補題 2.6.6（1）の特別な場合である. 即ち $z_0 \in H$ とし U を z_0 の近傍で $\bar{U}$ が compact なものとすると

$$\int_U \sum_{\gamma\in\Gamma} |f(\gamma z) j(\gamma z)^{-k} \mathrm{Im}(z)^{k/2}| dv(z)$$

$$\leqq m\int_{\Gamma\backslash H} \sum_{\gamma\in\Gamma} |f(\gamma z) j(\gamma, z)^{-k} \mathrm{Im}(z)^{k/2}| dv(z),$$

ここで $m=\#\{\gamma | \gamma U \cap U \neq \phi\} < \infty$ である. $f(\gamma z) j(\gamma, z)^{-k}$ は H で正則であるから系 2.6.5 により $\sum_{\gamma\in\Gamma} f(\gamma z) j(\gamma, z)^{-k}$ は広義一様収束し正則函数である. 特に $f(z)$ として $K_k(z_1, z_2)$ をとると

$$\int_{\Gamma\backslash H} \sum_{\gamma\in\Gamma} |K_k(\gamma z_1, z_2) j(\gamma, z_1)^{-k} \mathrm{Im}(z_1)^{k/2}| dv(z_1)$$

$$= |Z(\Gamma)| \int_H |K_k(z_1, z_2) \mathrm{Im}(z_1)^{k/2}| dv(z_1)$$

$$= |Z(\Gamma)| \mathrm{Im}(z_2)^{-k/2} \int_H |K_k(z_1, i) \mathrm{Im}(z_1)^{k/2}| dv(z_1)$$

であるから再び系 2.6.5 により $\sum_{\gamma\in\Gamma} K_k(\gamma z_1, z_2) j(\gamma, z_1)^{-k}$ は $H\times H$ で広義一様に収束する. （証明終）

補題 6.3.3 H の点 z_0 を固定したときに $\mathscr{H}_k^p(\Gamma, \chi)$ 上の線型汎函数 $f \longmapsto f(z_0)$ は連続である.

証明 U を z_0 の近傍で閉包が compact なものとし $m=\#\{\gamma\in\Gamma \mid \gamma U \cap U \neq \phi\}$ とおくと $m<\infty$ である. 系 2.6.2 により k, U, p, z_0 のみによって決まる定数 C が存在して

$$|f(z_0)| \leqq C\left(\int_U |f(z) \mathrm{Im}(z)^{k/2}|^p dv(z)\right)^{1/p}$$

$$\leqq mC\|f\|_\Gamma$$

であるから "$f \longmapsto f(z_0)$" は連続である. （証明終）

定理 6.3.4 $k>2$ とすると, 次の（1）～（4）が成り立つ.

（1） $K_k^\Gamma(z_1, z_2) = \overline{K_k^\Gamma(z_2, z_1)}$.

（2） z_2 を固定したときに, z_1 の函数として

$$K_k^\Gamma(z_1, z_2) \in \mathscr{H}_k^1(\Gamma, \chi) \cap \mathscr{H}_k^\infty(\Gamma, \chi)$$

である．

（3） $f\in\mathcal{L}_k^1(H)$ とすると

$$(\mathcal{K}f)^\Gamma(z)=\int_H K_k^\Gamma(z_1,\ z_2)f(z_2)\mathrm{Im}(z_2)^k\,dv(z_2)$$

である．

（4） $f\in\mathcal{H}_k^\infty(\Gamma,\ \chi)$ ならば

$$f(z_1)=\int_{\Gamma\backslash H}K_k^\Gamma(z_1,\ z_2)f(z_2)\mathrm{Im}(z_2)^k dv(z_2)$$

である．

証明 $\gamma\in\Gamma$ とすると，(6.1.5) により

$$K_k(\gamma z_1,\ \gamma z_2)=K_k(z_1,\ z_2)\chi(\gamma)j(\gamma,\ z_1)^k\overline{\chi(\gamma)j(\gamma,\ z_2)^k}$$

となるので

$$\begin{aligned}K_k^\Gamma(z_1,\ z_2)&=|Z(\Gamma)|^{-1}\sum_\gamma\chi(\gamma)^{-1}K_k(\gamma z_1,\ z_2)j(\gamma,\ z_1)^{-k}\\&=|Z(\Gamma)|^{-1}\sum_\gamma K_k(z_1,\ \gamma^{-1}z_2)\overline{\chi(\gamma)j(\gamma,\ \gamma^{-1}z_2)^k}\\&=|Z(\Gamma)|^{-1}\sum_\gamma\overline{\chi(\gamma^{-1})^{-1}K_k(\gamma^{-1}z_2,\ z_1)j(\gamma^{-1},\ z_2)^{-k}}\\&=\overline{K_k^\Gamma(z_2,\ z_1)}\end{aligned}$$

となり（1）が成り立つ．次に $z_1\in H$ を固定し $\mathcal{L}_k^1(H)$ 上の線型汎函数 Φ を $\Phi f=(\mathcal{K}f)^\Gamma(z_1)$ と定義する．定理 6.2.3，定理 6.3.2，補題 6.3.3 により Φ は連続である．$\mathcal{L}_k^1(H)$ と $\mathcal{L}_k^\infty(H)$ は互いに $(\ \ ,\ \ )_H$ により相対な空間であるから $\mathcal{L}_k^\infty(H)$ の元 $g_{z_1}(z)$ が存在して

$$(6.3.5)\qquad (\mathcal{K}f)^\Gamma(z_1)=(f,\ g_{z_1})_H=\int_H f(z)\overline{g_{z_1}(z)}\mathrm{Im}(z)^k\,dv(z)$$

である．Φ は $(1-\mathcal{K})\mathcal{L}_k^1(H)$ 上では 0 であるから，定理 6.2.2（2）により $g_{z_1}\in\mathcal{H}_k^\infty(H)$ となる．$\mathcal{L}_k^1(H)$ の元 f として特に H の compact 部分集合を台として持つ連続函数をとる．定理 6.3.2（3）により $\sum_\gamma K_k(\gamma z_1,\ z_2)\chi(\gamma)^{-1}\times j(\gamma,\ z_1)^{-k}f(z_2)$ は z_2 に関し一様に絶対収束するので

$$\begin{aligned}(6.3.6)\qquad (\mathcal{K}f)^\Gamma(z_1)&=|Z(\Gamma)|^{-1}\sum_{\gamma\in\Gamma}\int_H K_k(\gamma z_1,\ z_2)\chi(\gamma)^{-1}j(\gamma,z_1)^{-k}\\&\qquad\times f(z_2)\mathrm{Im}(z_2)^k\,dv(z_2)\\&=\int_H K_k^\Gamma(z_1,\ z_2)f(z_2)\mathrm{Im}(z_2)^k\,dv(z_2)\end{aligned}$$

が成り立つ．f は compact な台を持つ任意の連続函数であるから

$$K_k^{\Gamma}(z_1, z_2)=\overline{K_k^{\Gamma}(z_2, z_1)}=\overline{g_{z_1}(z_2)}$$

である．従って $K_k^{\Gamma}(z_1, z_2)$ は z_1 の函数として $\mathscr{H}_k^{\infty}(\Gamma, \chi)$ に属する．よって (6.3.5) により（3）がわかる．最後に f を $\mathscr{H}_k^{\infty}(\Gamma, \chi)$ の元とする．F を Γ の基本領域とし，H 上の函数 $\tilde{f}$ を

$$\tilde{f}(z)=\begin{cases} f(z) & (z\in F) \\ 0 & (z\notin F) \end{cases}$$

と定義すると

$$\int_{\Gamma\backslash H}K_k^{\Gamma}(z_1, z_2)f(z_2)\mathrm{Im}(z_2)^k\,dv(z_2)$$

$$=\int_{H}K_k^{\Gamma}(z_1, z_2)\tilde{f}(z_2)\mathrm{Im}(z_2)^k\,dv(z_2)$$

となるが，$\tilde{f}\in\mathscr{L}_k^1(H)$ であるから（3）を用いると

$$=|Z(\Gamma)|^{-1}\sum_{\gamma\in\Gamma}\int_{H}K_k(\gamma z_1, z_2)\chi(\gamma)^{-1}j(\gamma, z_1)^{-k}\tilde{f}(z_2)\mathrm{Im}(z_2)^k\,dv(z_2)$$

$$=|Z(\Gamma)|^{-1}\sum_{\gamma\in\Gamma}\int_{F}K_k(\gamma z_1, z_2)\chi(\gamma)^{-1}j(\gamma, z_1)^{-k}f(z_2)\mathrm{Im}(z_2)^k\,dv(z_2)$$

$$=|Z(\Gamma)|^{-1}\sum_{\gamma\in\Gamma}\int_{\gamma^{-1}F}K_k(z_1, z_2)f(z_2)\mathrm{Im}(z_2)^k\,dv(z_2)$$

$$=\int_{H}K_k(z_1, z_2)f(z_2)\mathrm{Im}(z_2)^k\,dv(z_2)=f(z_1)$$

となり（4）が成り立つ． （証明終）

定理 6.3.1 と定理 6.3.4 により $k>2$ ならば $K_k^{\Gamma}(z_1, z_2)$ は Hilbert 空間 $\mathscr{H}_k^2(\Gamma, \chi)$ の核函数である．$\mathscr{H}_k^2(\Gamma, \chi)$ が有限次元ならば $f_1, \cdots, f_m$ を $\mathscr{H}_k^2(\Gamma, \chi)$ の正規直交とすると

$$K_k^{\Gamma}(z_1, z_2)=\sum_{i=1}^{n}f_i(z_1)\bar{f}_i(z_2) \qquad ((z_1, z_2)\in H\times H)$$

である．$k>1$ ならば $\mathscr{H}_k^2(\Gamma, \chi)=\mathscr{H}_k^{\infty}(\Gamma, \chi)=S_k(\Gamma, \chi)$ であるが $S_k(\Gamma, \chi)$ が有限次元であることは，第 2 章で Riemann-Roch の定理を用いて示したが，次の定理は $k>2$ の場合にこの事実の別証明を与える．

定理 6.3.5 $k>2$ とする．$\mathscr{L}_k^2(\Gamma, \chi)$ の元 f に対し

$$(\mathcal{K}^\Gamma f)(z_1)=\int_{\Gamma\backslash H} K_k^\Gamma(z_1, z_2) f(z_2)\mathrm{Im}(z_2)^k dv(z_2)$$

と定義すると，$\mathcal{K}^\Gamma$ は $\mathcal{L}_k^2(\Gamma, \chi)$ から自分自身への Hilbert-Schmidt 型の積分作用素であり*，$\mathcal{L}_k^2(\Gamma, \chi)$ から $\mathcal{H}_k^2(\Gamma, \chi)$ への射影写像を与える．従って $\dim \mathcal{H}_k^2(\Gamma, \chi)<\infty$ である．

証明　$\mathcal{K}^\Gamma$ が Hilbert-Schmidt 型の作用素であるためには

$$\int_{\Gamma\backslash H}\int_{\Gamma\backslash H} |K_k^\Gamma(z_1, z_2)\mathrm{Im}(z_1)^{k/2}\mathrm{Im}(z_2)^{k/2}|^2 dv(z_1)dv(z_2)<\infty \tag{6.3.7}$$

を示せばよい．α を $\alpha i=z_2$ なる $SL_2(\boldsymbol{R})$ の元とすると (5.2) および $K^\Gamma(z_1, z_2)$ の定義より

$$|K_k^\Gamma(z_1, z_2)\mathrm{Im}(z_1)^{k/2}\mathrm{Im}(z_2)^{k/2}|=|K_k^\Gamma(\alpha^{-1}z_1, i)\mathrm{Im}(\alpha^{-1}z_1)^{k/2}|$$

であるから，定理 6.3.4 (2) により $|K_k^\Gamma(z_1, z_2)\mathrm{Im}(z_1)^{k/2}\mathrm{Im}(z_2)^{k/2}|$ は有界である．$\Gamma\backslash H$ は有限な測度を持つから (6.3.7) が成り立つ．$\mathcal{K}^\Gamma$ が $\mathcal{L}_k^2(\Gamma, \chi)$ から $\mathcal{H}^2(\Gamma, \chi)$ への射影写像であるためには $\mathcal{K}^\Gamma$ の像が $\mathcal{H}_k^2(\Gamma, \chi)$ であることが示されれば良い．$f\in\mathcal{L}_k^2(\Gamma, \chi)$ とする．$\Gamma\backslash H$ は有限測度を持つから $f\in\mathcal{L}_k^1(\Gamma, \chi)$ である．F を Γ の基本領域とし H 上の函数 $\tilde{f}(z)$ を

$$\tilde{f}(z)=\begin{cases} f(z) & (z\in F)\\ 0 & (z\notin F)\end{cases}$$

で定義すると $\tilde{f}\in\mathcal{L}_k^1(H)$ であり，定理 6.3.4 (3) により

$$\begin{aligned}(\mathcal{K}^\Gamma f)(z_1)&=\int_{\Gamma\backslash H} K_k^\Gamma(z_1, z_2) f(z_2)\mathrm{Im}(z_2)^k dv(z_2)\\ &=\int_H K_k^\Gamma(z_1, z_2)\tilde{f}(z_2)\mathrm{Im}(z_2)^k dv(z_2)=(\mathcal{K}\tilde{f})^\Gamma(z_1)\end{aligned}$$

となり定理 6.3.2 (2) により $\mathcal{K}^\Gamma f(z_1)$ は正則，即ち $\mathcal{K}^\Gamma f\in\mathcal{H}_k^2(\Gamma, \chi)$ となる．Hilbert-Schmidt 型の積分作用素は完全連続であり，完全連続な作用素の 0 と異なる固有値に属する固有空間の次元は有限であるから定理を得る．

（証明終）

---

* Hilbert-Schmidt 型の積分作用素については，例えば吉田，Functional analysis, Springer-Verlag を参照されたい．

§6.4 Hecke 作用素の trace (積分の計算)

この章の以降の節においては $k>2$ とする．$K_k(z_1, z_2)$ および $K_k^\Gamma(z_1, z_2)$ は §6.1 および §6.3 の通りとする．Hecke 作用素の $S_k(\Gamma,\chi)$ における trace を計算するのであるが，先ず議論の要点を見るために，特別な場合である $S_k(\Gamma,\chi)$ の次元を K_k^Γ で表わすことから始める．

定理 6.4.1 $\dim S_k(\Gamma, \chi)=\int_{\Gamma\backslash H} K_k^\Gamma(z, z)\mathrm{Im}(z)^k\, dv(z)$.

証明 $\{f_j\}_{j=1}^n$ を $S_k(\Gamma, \chi)$ の正規直交基とすると，

$$\begin{aligned}\dim S_k(\Gamma, \chi) &= \sum_{j=1}^n (f_j, f_j)_\Gamma \\ &=\int_{\Gamma\backslash H} \sum_{j=1}^n f_j(z)\bar{f}_j(z)\mathrm{Im}(z)^k\, dv(z) \\ &=\int_{\Gamma\backslash H} K_k^\Gamma(z, z)\mathrm{Im}(z)^k dv(z)\end{aligned}$$

である． (証明終)

さて $GL_2^+(\boldsymbol{R})$ の部分半群 Δ が $\Delta\subset\tilde{\Gamma}$ であり，χ が Δ の指標に拡張されて (2.8.1) を満たすようなものとすると， §2.7 および §2.8 で見たように Hecke 環 $R(\Gamma, \Delta)$ が定義され， Hecke 環 $R(\Gamma, \Delta)$ の元は $S_k(\Gamma, \chi)$ に作用した．さて T は Δ の部分集合で，有限個の両側 Γ 剰余類の和となっているようなものとする．T が $T=\coprod_{l=1}^n \Gamma\beta_l\Gamma$ と両側剰余類に分解されるならば，T と $R(\Gamma, \Delta)$ の元 $\sum_{l=1}^m \Gamma\beta_l\Gamma$ とを同一視する．この同一視により T は $R(\Gamma, \Delta)$ の元で $S_k(\Gamma, \chi)$ に作用する．$\Gamma\alpha\Gamma$ の trace のみならず，一般にこのような $R(\Gamma, \Delta)$ の元 T の trace を考えた方が計算上および応用上便利なことが多い．例えば $\Gamma=\Gamma_0(N)$，$\Delta=\Delta_0(N)$ とすると，上の同一視により

$$T(n)=\{\alpha\in\Delta_0(N)\,|\det\alpha=n\}$$

である．さて $\Gamma\beta_l\Gamma$ は有限個の左 Γ 剰余類の和に分解されたから， T は $T=\coprod_{j=1}^d \Gamma\alpha_j$ と有限個の左 Γ 剰余類の和で書ける． T を $R(\Gamma, \Delta)$ の元と考えての $S_k(\Gamma, \chi)$ の作用は，$f\in S_k(\Gamma, \chi)$ とすると

(6.4.1) $$f\,|\,T=\sum_{j=1}^{d}\det(\alpha_j)^{k/2-1}\chi(\alpha_j)^{-1}f\,|[\alpha_j]$$

と書ける．さて $\alpha\in T$ に対し

(6.4.2) $$\kappa(z;\ \alpha)=\det(\alpha)^{k-1}\chi(\alpha)^{-1}K_k(\alpha z,\ z)j(\alpha,\ z)^{-k}\,\mathrm{Im}(z)^k \qquad (z\in H)$$

とおく．ここで $K_k(z_1,\ z_2)$ は $\mathscr{H}_k^2(H)$ の核函数

$$K_k(z_1,\ z_2)=\frac{k-1}{4\pi}\left(\frac{z_1-\bar{z}_2}{2i}\right)^{-k}$$

である．以下

$$\mathrm{tr}(T)=\mathrm{tr}(T\,|\,S_k(\Gamma,\ \chi))$$

と書くことにする．

定理 6.4.2 $k>2$ とすると

$$\mathrm{tr}(T)=|Z(\Gamma)|^{-1}\int_{\Gamma\backslash H}\sum_{\alpha\in T}\kappa(z;\ \alpha)\,dv(z)$$

である．

証明 $\{f_l\}_{l=1}^n$ を $S_k(\Gamma,\chi)$ の正規直交基とすると

$$\begin{aligned}\mathrm{tr}(T)&=\sum_{l=1}^{n}(f_l\,|\,T,\ f_l)\\&=\sum_{l=1}^{n}\int_{\Gamma\backslash H}\sum_{j=1}^{d}\det(\alpha_j)^{k-1}\chi(\alpha_j)^{-1}f_l(\alpha_j z)j(\alpha_j,\ z)^{-k}\bar{f}_l(z)\mathrm{Im}(z)^k dv(z)\\&=\int_{\Gamma\backslash H}\sum_{j=1}^{d}\det(\alpha_j)^{k-1}\chi(\alpha_j)^{-1}K_k^{\Gamma}(\alpha_j z,\ z)j(\alpha_j,\ z)^{-k}\,\mathrm{Im}(z)^k dv(z)\\&=|Z(\Gamma)|^{-1}\int_{\Gamma\backslash H}\sum_{\alpha\in T}\det(\alpha)^{k-1}\chi(\alpha)^{-1}K_k(\alpha z,\ z)j(\alpha,\ z)^{-k}\,\mathrm{Im}(z)^k dv(z)\end{aligned}$$

となり定理がわかる． (証明終)

定理 6.4.2 の右辺の積分を計算しよう．定理 6.3.2 (3) により定理の式の右辺の積分の内部は H の compact 集合上では一様に収束するから compact 集合上の積分と和は順序が交換出来る．特に $\Gamma\backslash H$ が compact なら上の積分と和は交換可能である．Γ が cusp を持つならば積分を $\Gamma\backslash H$ の compact 部分集合上の積分と，cusp の近傍での積分との和に分解する．Γ の cusp x に対して

(6.4.3) $$T_x=\{\alpha\in T\,|\,\alpha x=x\}$$

と定義する．また T の元 α に対し，c_α, d_α を $\alpha=\begin{bmatrix} * & * \\ c_\alpha & d_\alpha \end{bmatrix}$ でもって定義する．$\beta\in\Gamma_\infty\alpha\Gamma_\infty$ ならば $|c_\alpha|=|c_\beta|$ である．

補題 6.4.3 $k>2$, $l>0$ とする．∞ が Γ の cusp であるならば

$$\sum_\alpha |\chi(\alpha)|^{-1}\det(\alpha)^l/|c_\alpha|^k<\infty$$

である．ここで α は $\Gamma_\infty\backslash(T-T_\infty)/\Gamma_\infty$ の代表系全体を動く．

証明 $\{\alpha\}$ を $\Gamma_\infty\backslash(T-T_\infty)/\Gamma_\infty$ を任意の 1 つの代表系とする．$T=\coprod_{j=1}^d \Gamma\alpha_j$ とおくと

$$\sum_{\{\alpha\}}\det(\alpha)^l|\chi(\alpha)^{-1}j(\alpha,\ z)^{-k}|$$
$$\leqq\sum_{\alpha\in\Gamma_\infty\backslash T}\det(\alpha)^l|\chi(\alpha)^{-1}j(\alpha_1,\ z)^{-k}|$$
$$=\sum_{j=1}^d\det(\alpha_j)^l|\chi(\alpha_j)^{-1}j(\alpha_j,\ z)^{-k}|\sum_{\gamma\in\Gamma_\infty\backslash\Gamma}|j(\gamma,\ \alpha_j z)|^{-k}$$

である．$\Gamma_\infty\cdot\{\pm1\}=\left\{\pm\begin{bmatrix}1 & nh\\ 0 & 1\end{bmatrix}\middle|\, n\in\boldsymbol{Z}\right\}$ $(h>0)$ とする．H の任意の compact 集合 M をとり，$m=\#\{\gamma\in\Gamma\,|\,\gamma M\cap M\neq\phi\}$ とおく．補題 1.7.6 により u (>0) を十分大きくとると

$$\int_M\sum_{\gamma\in\Gamma_\infty\backslash\Gamma}|j(\gamma,\ z)|^{-k}\,\mathrm{Im}(z)^{k/2}dv(z)\leqq m\int_0^u\int_0^h y^{k/2-2}dx\,dy<\infty$$

となるから，$\sum_{\gamma\in\Gamma_\infty\backslash\Gamma}|j(\gamma,\ z)|^{-k}$ は M において測度 0 の点を除き収束する．M は任意であるから，$\sum_{\{\alpha\}}\det(\alpha)^l|\chi(\alpha)^{-1}j(\alpha,\ z)^{-k}|<\infty$ となる z は H において稠密に存在する．ところで $\Gamma_\infty\backslash T-T_\infty/\Gamma_\infty$ の代表系 $\{\alpha\}$ は $|d_\alpha|<|c_\alpha h|$ にとることが出来る．よって z を $\sum_{\{\alpha\}}\det(\alpha)^l|\chi(\alpha)^{-1}j(\alpha,\ z)^{-k}|<\infty$ で且つ $|z|\geqq h$ にとると

$$\sum_{\{\alpha\}}|\chi(\alpha)|^{-1}\det(\alpha)^l/|c_\alpha|^k<|2z|^k\sum_{\{\alpha\}}\det(\alpha)^l|\chi(\alpha)^{-1}j(\alpha,\ z)^{-k}|<\infty$$

となり補題が成立する． (証明終)

補題 6.4.4 h, l は実数で，$h\neq0$, $l>1/2$ となるものとする．定数 $C(>0)$ が存在して，任意の実数 a, b に対して

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\{(a+nh)^2+b^2\}^{-l}<C(|b|^{-2l+1}+|b|^{-2l})$$

が成り立つ．

証明　容易な計算で

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\{(a+nh)^2+b^2\}^{-l}<\frac{1}{|h|}\int_{-\infty}^{\infty}(t^2+b^2)^{-l}dt+|b|^{-2l}$$

となるから，例えば $C=\dfrac{1}{h}\left(2+\dfrac{2}{(2l-1)}\right)+1$ とおくと

$$<C|b|^{-2l+1}+|b|^{-2l}<C(|b|^{-2l+1}+|b|^{-2l})$$

となる．　　　　（証明終）

定理 6.4.5　x は Γ の cusp, U_x は x の H における十分小さい近傍とすると

$$\int_{\Gamma_x\backslash U_x}\sum_{\alpha\in T-T_x}\kappa(z;\ \alpha)dv(z)=\sum_{\alpha\in T-T_x}\int_{\Gamma_x\backslash U_x}\kappa(z;\ \alpha)dv(z)$$

が成り立つ．

証明　$z\in U_x$ に対して

(6.4.4)　$$S(z)=S(z;\ \Gamma,\ x)=\sum_{\alpha\in T-T_x}|\kappa(z;\ \alpha)|$$
$$=\sum_{\alpha\in T-T_x}\det(\alpha)^{k-1}|\chi(\alpha)^{-1}K_k(\alpha z,\ z)j(\alpha,\ z)^{-k}|\mathrm{Im}(z)^k$$

とおくときに，$S(z)$ が収束して，$\Gamma\backslash U_x$ で可積分ならよい．$\Gamma_x\backslash U_x$ は有限な測度を持つから，$S(z)$ が収束して U_x で有界であることを示せば十分である．$SL_2(\boldsymbol{R})$ の元 σ を $\sigma x=\infty$ なるものとし，$w=\sigma z$ とおくと

$$S(z;\ \Gamma,\ x)=S(w;\ \sigma\Gamma\sigma^{-1},\ \infty)$$

であるから $x=\infty$ の場合にのみ示せばよい．$x=\infty$ とする．

$$\Gamma_\infty\cdot\{\pm 1\}=\left\{\pm\begin{bmatrix}1&mh\\0&1\end{bmatrix}\middle|\, m\in\boldsymbol{Z}\right\}\quad(h>0)$$

とおくと

$$S(z)=|Z(\Gamma)|\sum_{\alpha\in\Gamma_\infty\backslash T-T_\infty}\det(\alpha)^{k-1}|\chi(\alpha)|^{-1}|j(\alpha,\ z)|^{-k}\mathrm{Im}(z)^k$$
$$\times\sum_{n=-\infty}^{\infty}|K_k(\alpha z+nh,\ z)|$$

$$=|Z(\Gamma)|\sum_{\alpha\in\Gamma_\infty\backslash T-T_\infty}\det(\alpha)^{k-1}|\chi(\alpha)|^{-1}|j(\alpha,\ z)|^{-k}\operatorname{Im}(z)^k((k-1)/4\pi)2^k$$

$$\times\sum_{n=-\infty}^{\infty}\{\operatorname{Im}(\alpha z-\bar{z})^2+(\operatorname{Re}(\alpha z-\bar{z})+nh)^2\}^{-k/2}$$

であるから補題 6.4.4 により $C_1(>0)$ が存在して

$$\leqq C_1\sum_{\alpha\in\Gamma_\infty\backslash T-T_\infty}\det(\alpha)^{k-1}|\chi(\alpha)|^{-1}|j(\alpha,\ z)|^{-k}\operatorname{Im}(z)^k$$

$$\times(\operatorname{Im}(\alpha z-\bar{z})^{-k+1}+\operatorname{Im}(\alpha z-\bar{z})^{-k})$$

となるが，$\operatorname{Im}(\alpha z-\bar{z})=\operatorname{Im}(\alpha z)+\operatorname{Im}(z)\geqq\operatorname{Im}(z)$ であるから

$$\leqq C_1(\operatorname{Im}(z)+1)\sum_{\alpha\in\Gamma_\infty\backslash T-T_\infty}|\chi(\alpha)|^{-1}\det(\alpha)^{k-1}|j(\alpha,\ z)|^{-k}$$

$$\leqq C_1(\operatorname{Im}(z)+1)\sum_{\alpha\in\Gamma_\infty\backslash T-T_\infty/\Gamma_\infty}|\chi(\alpha)|^{-1}\det(\alpha)^{k-1}\sum_{n=-\infty}^{\infty}|c_\alpha(z+nh)+d_\alpha|^{-k}$$

$$\leqq C_2\operatorname{Im}(z)^{-k}(\operatorname{Im}(z)+1)^2\sum_{\alpha\in\Gamma_\infty\backslash(T-T_\infty)/\Gamma_\infty}|\chi(\alpha)|^{-1}\det(\alpha)^{k-1}/c_\alpha^k$$

となるから，$S(z)$ は補題 6.4.3 により V_∞ で有界である． （証明終）

補題 6.4.6 x が Γ の cusp ならば，$|\Gamma_x\backslash T_x|<\infty$ である．

証明 α,β が T_x の元で $\alpha\beta^{-1}\in\Gamma$ となるものとすると，$\alpha\beta^{-1}x=x$ であるから $\alpha\beta^{-1}\in\Gamma_x$ である．従って $|\Gamma_x\backslash T_x|\leqq|\Gamma\backslash T|<\infty$ となる．

（証明終）

定理 6.4.7 x は Γ の cusp とし，$\sigma(\in SL_2(\boldsymbol{R}))$ を $\sigma x=\infty$ なる元とする．U_x が x の十分小さい近傍ならば

$$\int_{\Gamma_x\backslash U_x}\sum_{\alpha\in T_x}\kappa(z;\ \alpha)\,dv(z)$$

$$=\lim_{s\to0}\sum_{\alpha\in T_x}\int_{\Gamma_x\backslash U_x}\kappa(z;\ \alpha)\operatorname{Im}(z)^{-s}|j(\sigma,\ z)|^{2s}dv(z).$$

証明 $\operatorname{Im}(z)^{-s}|j(\sigma,\ z)|^{2s}$ は $z(\in U_x)$ を固定し s を 0 に近づけると，単調に増大して 1 に近づくから

$$\int_{\Gamma_x\backslash U_x}\sum_{\alpha\in T_x}\kappa(z;\ \alpha)\,dv(z)$$

$$=\lim_{s\to0}\int_{\Gamma_x\backslash U_x}\sum_{\alpha\in T_x}\kappa(z;\ \alpha)\operatorname{Im}(z)^{-s}|j(\sigma,\ z)|^{2s}dv(z)$$

である．よって，$s(>0)$ に対し

$$S(z,\ s)=\sum_{\alpha\in T_x}|\kappa(z;\ \alpha)|\mathrm{Im}(z)^{-s}|j(\sigma,\ z)|^{2s}$$

とおくと，$S(z,\ s)$ が $\Gamma_x\backslash U_x$ で可積分であれば，積分と和が可換であるから定理がわかる．これは定理 6.4.6 におけると全く同様の理由で，$x=\infty$ で $\sigma=1$ の場合のみに示せば十分である．このときには

$$S(z,\ s)\leqq\sum_{\alpha\in T_\infty}\det(\alpha)^{k-1}|\chi(\alpha)^{-1}K_k(\alpha z,\ z)j(\alpha,\ z)|^{-k}\mathrm{Im}(z)^{k-s}$$

であるが補題 6.4.4 により定数 C_1 が存在して

$$\leqq C_1\sum_{\alpha\in\Gamma_\infty\backslash T_\infty}|\chi(\alpha)|^{-1}\det(\alpha)^{k-1}(\mathrm{Im}(z)^{1-s}+\mathrm{Im}(z)^{-s})$$

となる．$|\Gamma_\infty\backslash T_\infty|<\infty$ であり，$\mathrm{Im}(z)^{1-s}$ および $\mathrm{Im}(z)^{-s}$ は $\Gamma_\infty\backslash U_\infty$ で可積分であるから $S(z,\ s)$ は可積分である． (証明終)

Γ の cusp 全体の集合を P_Γ とする．Γ の cusp x の近傍 U_x を $U_{\gamma x}=\gamma U_x$ ($\gamma\in\Gamma$) かつ $U_x\cap U_{x'}=\phi$ ($x\neq x'$) にとり，$\sigma_x(\in SL_2(\boldsymbol{R}))$ を $\sigma_x x=\infty$ でかつ $\gamma x=x'$ ならば $\mathrm{Im}(\sigma_{x'}\gamma z)=\mathrm{Im}(\sigma_x z)$ にとる．$Z(T)=(T\cap R^\times\cdot 1)$ とおく．$\alpha\in\bigcup_{x\in P_\Gamma}(T_x-Z(T))$ のときに $s>0$ に対し H 上の函数 $\kappa(z;\ \alpha,\ s)$ を

$$\kappa(z;\ \alpha,\ s)=\begin{cases}\kappa(z;\ \alpha) & (z\notin U_x)\\ \kappa(z;\ \alpha)\mathrm{Im}(z)^{-s}|j(\sigma_x,\ z)|^{2s} & (z\in U_x)\end{cases}$$

と定義する．ここで x は α の固定点である．$T^1=T-\bigcup_{x\in P_\Gamma}(T_x-Z(T))$，$T^2=\bigcup_{x\in P_\Gamma}(T_x-Z(T))$ とおくと定理 6.4.1, 6.4.5, 6.4.7 により

$$|Z(\Gamma)|\mathrm{tr}(T)=\sum_{\alpha\in T^1}\int_{\Gamma\backslash H}\kappa(z;\ \alpha)dv(z)+\lim_{s\to0}\sum_{\alpha\in T^2}\int_{\Gamma\backslash H}\kappa(z;\ \alpha,\ s)dv(z) \tag{6.4.5}$$

である．$\gamma\in\Gamma$ ならば，$\gamma T_x\gamma^{-1}=T_{\gamma x}$ であるから T^1, T^2 は Γ に関する共役類の和である．$\alpha\in T$ に対して

$$\Gamma(\alpha)=\{\gamma\in\Gamma\mid\gamma\alpha\gamma^{-1}=\alpha\}$$

とおく．

以降の節において色々な群による共役類を扱うので，そのための記号を導入

する．G は群，H は G の部分群とする．G の部分集合を M とする．M の2元 g_1, g_2 が H の元により共役（H 元役）であるとは，$h\in H$ が存在して $g_2=hg_1h^{-1}$ と書けるときに言い $g_1 \underset{H}{\sim} g_2$ と表わす．$\underset{H}{\sim}$ は M の元の間の同値関係である．M の $\underset{H}{\sim}$ に関する同値類を M の H 共役類と言う．記号のまぎらわしさを避けるため，本書では M の H 共役類のなす集合を $M//H$ と書き表わす．即ち

$$M//H=M/\underset{H}{\sim} \tag{6.4.6}$$

である．

定理 6.4.8 上の記号の下に

$$Z(\Gamma)\mathrm{tr}(T)=\sum_{\alpha\in T^1//\Gamma}\int_{\Gamma(\alpha)\backslash H}\kappa(z;\ \alpha)\,dv(z)$$
$$+\lim_{s\to 0}\sum_{\alpha\in T^2//\Gamma}\int_{\Gamma(\alpha)\backslash H}\kappa(z;\ \alpha,\ s)\,dv(z)$$

が成り立つ．

証明 F を Γ の基本領域とすると，σ_x のとり方により任意の $\gamma\in\Gamma$ に対して $\int_F\kappa(z;\ \gamma^{-1}\alpha\gamma)\,dv(z)=\int_{\gamma F}\kappa(z;\ \alpha)\,dv(z)$ および $\int_F\kappa(z;\ \gamma^{-1}\alpha\gamma,\ s)\,dv(z)=\int_{\gamma F}\kappa(z;\ \alpha,\ s)\,dv(z)$ が成り立つ．$F_\alpha=\bigcup_{\gamma\in\Gamma(\alpha)\backslash\Gamma}\gamma F$ とおくと F_α は $\Gamma(\alpha)$ の基本領域である．$\alpha\in T^1$ ならば

$$\sum_{\substack{\beta\in T^1\\ \beta\underset{\Gamma}{\sim}\alpha}}\int_F\kappa(z;\ \beta)\,dv(z)=\sum_{\gamma\in\Gamma(\alpha)\backslash\Gamma}\int_F\kappa(z;\ \gamma^{-1}\alpha\gamma)\,dv(z)$$
$$=\sum_{\gamma\in\Gamma(\alpha)\backslash\Gamma}\int_{\gamma F}\kappa(z;\ \alpha)\,dv(z)$$
$$=\int_{\Gamma(\alpha)\backslash H}\kappa(z;\ \alpha)\,dv(z)$$

となる．T^2 についても同様のことが成り立つから定理が証明された．

（証明終）

定理 6.4.8 の右辺の積分を T の元 α の型に分けて計算しよう．

1° $\alpha\in Z(T)$ の場合．

$\alpha=\begin{bmatrix}a&0\\0&a\end{bmatrix}$ とする．$\Gamma(\alpha)=\Gamma$ であるから

$$\int_{\Gamma\backslash H}\kappa(z;\ \alpha)\,dv(z)=\frac{k-1}{4\pi}\det(\alpha)^{k-1}\chi(\alpha)^{-1}a^{-k}\int_{\Gamma\backslash H}dv(z)$$
$$=\frac{k-1}{4\pi}\chi(\alpha)^{-1}\mathrm{sgn}(a)^{k}\det(\alpha)^{k/2-1}v(\Gamma\backslash H).$$

2°　α が楕円型の場合.

α の固定点を $z_0\in H$ とする. $\rho=\begin{bmatrix}1 & -z_0\\ 1 & -\bar{z}_0\end{bmatrix}$ とおくと, ρ は上半平面 H を単位円盤 K に写像しさらに

$$\rho\alpha\rho^{-1}=\begin{bmatrix}\eta & 0\\ 0 & \zeta\end{bmatrix}\qquad(\eta,\ \zeta\in C)$$

である. $w=\rho z$, $w'=\rho\bar{z}$ とおくと

$$j(\rho,\ \alpha z)j(\alpha,\ z)j(\rho,\ z)^{-1}=\zeta$$

となる. ρ は1次分数変換だから非調和比を不変にするので

$$\frac{z-\bar{z}}{\alpha z-\bar{z}}\,\frac{\alpha z-\bar{z}_0}{z-\bar{z}_0}=\frac{w-w'}{\eta\zeta^{-1}w-w'}$$

が成り立つ. よって $w=re^{i\theta}$ とおくと $w'=r^{-1}e^{i\theta}$ であり

$$\det(\alpha)^{k-1}\chi(\alpha)^{-1}K_k(\alpha z,\ z)j(\alpha,\ z)^{-k}\,\mathrm{Im}(z)^k$$
$$=\frac{k-1}{4\pi}\det(\alpha)^{k-1}\chi(\alpha)^{-1}\left(\frac{\alpha z-\bar{z}}{2i}\right)^{-k}\zeta^{-k}(\alpha z-\bar{z}_0)^k(z-\bar{z}_0)^{-k}\,\mathrm{Im}(z)^k$$
$$=\frac{k-1}{4\pi}\det(\alpha)^{k-1}\chi(\alpha)^{-1}\zeta^{-k}\left(\frac{w-w'}{\eta\zeta^{-1}w-w'}\right)^k$$
$$=\frac{k-1}{4\pi}\det(\alpha)^{k-1}\chi(\alpha)^{-1}\zeta^{-k}\left(\frac{1-r^2}{1-\eta\zeta^{-1}r^2}\right)^k$$

となる. $dv(z)=4r(1-r^2)^{-2}\,dr\,d\theta$ であるから

$$\int_{\Gamma(\alpha)\backslash H}\kappa(z;\ \alpha)\,dv(z)$$
$$=\frac{k-1}{4\pi}\det(\alpha)^{k-1}\chi(\alpha)^{-1}\zeta^{-k}\int_{\rho\Gamma(\alpha)\rho^{-1}\backslash K}4r(1-r^2)^{k-2}(1-\eta\zeta^{-1}r^2)^{-k}\,dr\,d\theta$$
$$=\frac{\det(\alpha)^{k-1}\chi(\alpha)^{-1}}{[\Gamma(\alpha):Z(\Gamma)]}\,\frac{(k-1)}{\zeta^k}\int_0^1(1-r)^{k-2}(1-\eta\zeta^{-1}r)^{-k}\,dr$$
$$=\frac{\det(\alpha)^{k-1}\chi(\alpha)^{-1}}{[\Gamma(\alpha):Z(\Gamma)]}\,\frac{\zeta^{-k+1}}{\zeta-\eta}$$
$$=\frac{-\chi(\alpha)^{-1}}{[\Gamma(\alpha):Z(\Gamma)]}\,\frac{\eta^{k-1}}{\eta-\zeta}$$

である．

3°　α が双曲型で，α の固定点がいずれも Γ の cusp でない場合．

$x_1, x_2 \in \boldsymbol{R}\cup\{\infty\}$ を α の固定点とし $\sigma\in SL_2(\boldsymbol{R})$ を $\sigma x_1=\infty$，$\sigma x_2=0$ となる元とすると　$\sigma\alpha\sigma^{-1}=\begin{bmatrix}\eta & 0\\ 0 & \zeta\end{bmatrix}$　$(\eta, \zeta\in\boldsymbol{R})$　であるから，補題 1.3.3 により $\Gamma(\alpha)=\Gamma_{x_1x_2}$ である．$\Gamma_{x_1x_2}\neq Z(\Gamma)$ ならば，定理 1.5.4 により $u, v\in\boldsymbol{R}$ が存在して　$\sigma\Gamma_{x_1x_2}\sigma^{-1}\cdot\{\pm1\}=\left\{\pm\begin{bmatrix}u^m & 0\\ 0 & v^m\end{bmatrix}\middle| m\in\boldsymbol{Z}\right\}$　である．必要があれば x_1 と x_2 をとり代えることにより $|u|>|v|$ と仮定して差支えない．2° と同様に σ は非調和比を不変とするから w, r, θ を $\sigma z=w=re^{i\theta}$ にとると

$$\int_{\Gamma(\alpha)\backslash H}\kappa(z,\ \alpha)\,dv(z)$$
$$=\frac{k-1}{4\pi}\int_{\sigma\Gamma(\alpha)\sigma^{-1}\backslash H}\det(\alpha)^{k-1}\chi(\alpha)^{-1}\zeta^{-k}\left(\frac{w-\bar{w}}{\eta\zeta^{-1}w-\bar{w}}\right)^k dv(w)$$
$$=\begin{cases}\dfrac{k-1}{4\pi}\displaystyle\int_0^\pi\int_0^\infty\det(\alpha)^{k-1}\chi(\alpha)^{-1}\zeta^{-k}\left(\frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{\eta\zeta^{-1}e^{i\theta}-e^{-i\theta}}\right)^k\frac{dr\,d\theta}{r\sin^2\theta} & (\Gamma(\alpha)=Z(\Gamma))\\[2ex] \dfrac{k-1}{4\pi}\displaystyle\int_0^\pi\int_1^{|u/v|}\det(\alpha)^{k-1}\chi(\alpha)^{-1}\zeta^{-k}\left(\frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{\eta\zeta^{-1}e^{i\theta}-e^{-i\theta}}\right)^k\frac{dr\,d\theta}{r\sin^2\theta} & (\Gamma(\alpha)\neq Z(\Gamma))\end{cases}$$

が成り立つ．$\int_0^\infty r^{-1}dr$ は有限の値をとらないから，もし $\Gamma(\alpha)=Z(\Gamma)$ と仮定すると，上の積分が有限値を持つことに矛盾する．従って $\Gamma(\alpha)\neq Z(\Gamma)$ でなければならない．このときには

$$\int_0^\pi\frac{(e^{i\theta}-e^{-i\theta})^{k-2}}{(\eta\zeta^{-1}e^{i\theta}-e^{-i\theta})^k}d\theta=0$$

であるから

$$\int_{\Gamma(\alpha)\backslash H}\kappa(z;\ \alpha)\,dv(z)=0$$

がわかる．

4°　α が双曲型で，その固定点の少くとも 1 つは Γ の cusp である場合．

このときには補題 1.3.3 により $\Gamma(\alpha)=Z(\Gamma)$ である．x_1, x_2 を α の固定点とし，x_1, x_2 のいずれか一方のみ，例えば x_1 のみが Γ の cusp であると

仮定する．U_{x_1} を上で与えた x_1 の近傍とすると

$$\int_{H-U_{x_1}}\kappa(z;\ \alpha,\ s)\,dv(z)$$
$$=\int_{H-U_{x_1}}\det(\alpha)^{k-1}\chi(\alpha)^{-1}K_k(\alpha z,\ z)\,j(\alpha,\ z)^{-k}\,\mathrm{Im}(z)^k\,dv(z)$$

は 3° におけると同様に有限の値をとらないので矛盾である．従って x_1, x_2 はいずれも Γ の cusp でなければならない．$U_\nu=U_\nu$ ($\nu=1,\ 2$) を上で与えた x_ν の近傍とし，$H'=H-\bigcup_\nu U_\nu$ とすると

$$\int_H\kappa(z;\ \alpha,\ s)\,dv(z)=\int_{H'}\kappa(z;\ \alpha)\,dv(z)+\int_{U_1}\kappa(z;\ \alpha,\ s)\,dv(z)$$
$$+\int_{U_2}\kappa(z;\ \alpha,\ s)\,dv(z)$$

である．σ を $\sigma x_1=\infty$, $\sigma x_2=0$ なる $SL_2(\boldsymbol{R})$ の元とすると $\sigma\alpha\sigma^{-1}=\begin{bmatrix}\eta & 0\\ 0 & \zeta\end{bmatrix}$ と対角化される． 必要ならば，x_1 と x_2 をとり代えて $|\zeta|>|\eta|$ としてよい．r_1, $r_2>0$ を $\sigma U_1=\{z\in H\mid \mathrm{Im}(z)>r_1\}$, $\sigma U_2=\{z\in H\mid |z-ir_2|<r_2\}$ にとると

$$\int_{U_1}\kappa(z;\ \alpha,\ s)\,dv(z)$$
$$=\int_{U_1}\det(\alpha)^{k-1}\chi(\alpha)^{-1}K_k(\alpha z,\ z)\,j(\alpha,\ z)^{-k}|j(\sigma,\ z)|^{2s}\,\mathrm{Im}(z)^{k-s}\,dv(z)$$
$$=\frac{k-1}{4\pi}\det(\alpha)^{k-1}\chi(\alpha)^{-1}\zeta^{-k}\int_0^\pi\int_{r_1/\sin\theta}^\infty\left(\frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{\eta\zeta^{-1}e^{i\theta}-e^{-i\theta}}\right)^k\frac{dr\,d\theta}{r^{1+s}(\sin\theta)^{2+s}}$$
$$=\frac{k-1}{4\pi}\det(\alpha)^{k-1}\chi(\alpha)^{-1}\zeta^{-k}\,r_1{}^{-s}\int_0^\pi\left(\frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{\eta\zeta^{-1}e^{i\theta}-e^{-i\theta}}\right)^k\frac{d\theta}{\sin^2\theta}=0$$

である．同様にして $\int_{U_2}\kappa(z;\ \alpha,\ s)\,dv(z)=0$ もわかる．最後に，

$$\int_{H'}\kappa(z;\ \alpha)\,dv(z)$$
$$=\frac{k-1}{4\pi}\det(\alpha)^{k-1}\chi(\alpha)^{-1}\zeta^{-k}\int_0^\pi\int_{2r_2\sin\theta}^{r_1/\sin\theta}\left(\frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{\eta\zeta^{-1}e^{i\theta}-e^{-i\theta}}\right)^k\frac{dr\,d\theta}{r\sin^2\theta}$$
$$=\frac{k-1}{4\pi}\det(\alpha)^{k-1}\chi(\alpha)^{-1}\zeta^{-k}\int_0^\pi\{\log(r_1/2r_2)-2\log(\sin\theta)\}$$
$$\times\left(\frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{\eta\zeta^{-1}e^{i\theta}-e^{-i\theta}}\right)^k\frac{d\theta}{\sin^2\theta}$$

$$=8\frac{k-1}{4\pi}\det(\alpha)^{k-1}\chi(\alpha)^{-1}\zeta^{-k}\int_0^{\pi}\log(e^{i\theta}-e^{-i\theta})\frac{(e^{i\theta}-e^{-i\theta})^{k-2}}{(\eta\zeta^{-1}e^{i\theta}-e^{-i\theta})^k}d\theta$$

$$=\frac{1}{\pi}\det(\alpha)^{k-1}\chi(\alpha)^{-1}\frac{\zeta^{-k}}{\eta\zeta^{-1}-1}\int_0^{\pi}\left(\frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}\right)\left(\frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{\eta\zeta^{-1}e^{i\theta}-e^{-i\theta}}\right)^{k-1}d\theta$$

$$=\det(\alpha)^{k-1}\chi(\alpha)^{-1}\frac{\zeta^{-k}}{\eta\zeta^{-1}-1}$$

$$=-\chi(\alpha)^{-1}\frac{|\eta|^{k-1}}{|\zeta-\eta|}\mathrm{sgn}(\zeta)^k$$

となるから

$$\int_{\Gamma(\alpha)\backslash H}\kappa(z;\ \alpha,s)dv(z)=-\chi(\alpha)^{-1}\frac{\min\{|\eta|,|\zeta|\}^{k-1}}{|\zeta-\eta|}\mathrm{sgn}(\zeta)^k$$

が得られた.

5°　α が放物型である場合.

x を α の固定点とする. σ を $\sigma x=\infty$ なる $SL_2(\boldsymbol{R})$ の元とすると $\sigma\alpha\sigma^{-1}=\begin{bmatrix}\zeta & \lambda\\ 0 & \zeta\end{bmatrix}$ と書ける. $x\notin P_\Gamma$ と仮定すると $\Gamma(\alpha)=Z(\Gamma)$ である. このときには $w=\sigma z=x+iy$ とおくと

$$\int_H\kappa(z;\ \alpha)dv(z)$$

$$=\frac{k-1}{4\pi}\det(\alpha)^{k-1}\chi(\alpha)^{-1}\zeta^{-k}\int_H\left(\frac{w-\bar{w}}{w-\bar{w}+\lambda\eta^{-1}}\right)^k dv(w)$$

$$=\frac{k-1}{4\pi}\det(\alpha)^{k-1}\chi(\alpha)^{-1}\zeta^{-k}\int_0^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}y^{k-2}(y-i\lambda\zeta^{-1}/2)^{-k}dxdy$$

となり$\int_H\kappa(z;\ \alpha)dv(z)$ が可積分でなくなり矛盾する. よって $x\in P_\Gamma$ であり $\Gamma(\alpha)=\Gamma_x$ となる. 次に $T^p=\{\alpha\in T\,|\,\alpha$ は放物型$\}$ と定義し, Γ の cusp x に対し

$$T_x^p=T^p\cap T_x=\{\alpha\in T\,|\,\alpha \text{ は放物型で, } \alpha x=x\}$$

と定義する. $\alpha\in T_x^p$ ならば $\Gamma_x=\Gamma(\alpha)$ であるから T_x^p の 2 元は Γ 共役ではない. 従って $T^p//\Gamma$ の代表系として $\bigcup_{x\in\Gamma\backslash P_\Gamma}T_x^p$ をとることが出来るので,

$$\lim_{s\to 0}\sum_{\alpha\in T^p//\Gamma}\int_{\Gamma(\alpha)\backslash H}\kappa(z;\ \alpha,s)dv(z)$$

$$=\sum_{x\in\Gamma\backslash P_\Gamma}\lim_{s\to 0}\sum_{\alpha\in T_x^p}\int_{\Gamma(\alpha)\backslash H}\kappa(z;\ \alpha,s)dv(z)$$

である. U_x を x の十分小さい近傍とすると

$$\lim_{s\to 0}\sum_{\alpha\in T_x^p}\int_{\Gamma(\alpha)\backslash H}\kappa(z;\ \alpha,\ s)dv(z)$$

$$=\frac{k-1}{4\pi}\Big[\sum_{\alpha\in T_x^p}\det(\alpha)^{k-1}\chi(\alpha)^{-1}\zeta^{-k}\int_{\Gamma_x\backslash(H-U_x)}K_k(\alpha z,\ z)j(\alpha,\ z)^{-k}\mathrm{Im}(z)^k dv(z)$$

$$+\lim_{s\to 0}\sum_{\alpha\in T_x^p}\det(\alpha)^{k-1}\chi(\alpha)^{-1}\zeta^{-k}$$

$$\times\int_{\Gamma_x\backslash U_x}K_k(\alpha z,\ z)j(\alpha,\ z)^{-k}|j(\sigma,\ z)|^{2s}\mathrm{Im}(z)^{k-s}dv(z)\Big]$$

$$=\frac{k-1}{4\pi}\lim_{s\to 0}\sum_{\alpha\in T_x^p}\det(\alpha)^{k-1}\chi(\alpha)^{-1}\zeta^{-k}$$

$$\times\int_{\Gamma_x\backslash H}K_k(\alpha z,\ z)j(\alpha,\ z)^{-k}|j(\sigma,\ z)|^{2s}\mathrm{Im}(z)^{k-s}dv(z)$$

である．$\sigma\Gamma_x\sigma^{-1}\cdot\{\pm 1\}=\left\{\pm\begin{bmatrix}1 & mh\\ 0 & 1\end{bmatrix}\middle|\, m\in\boldsymbol{Z}\right\}$ $(h>0)$ とする．ここで $h(\alpha)=\lambda/\zeta$ とおくと

$$\int_{\Gamma_x\backslash H}K_k(\alpha z,\ z)j(\alpha,\ z)^{-k}|j(\sigma,\ z)|^{2s}\mathrm{Im}(z)^{k-s}dv(z)$$

$$=\int_{\sigma\Gamma_x\sigma^{-1}\backslash H}\left(\frac{w-\bar{w}}{w-\bar{w}+h(\alpha)}\right)^k\mathrm{Im}(w)^{-s}dv(w)\qquad (w=\sigma z)$$

$$=h\left(\frac{2i}{h(\alpha)}\right)^{1+s}\int_0^\infty\frac{t^{k-2-s}}{(t+1)^k}dt\qquad (t=2i\,\mathrm{Im}(w)/h(\alpha))$$

$$=h\left(\frac{2i}{h(\alpha)}\right)^{1+s}\int_0^1 u^s(1-u)^{k-s-2}du\qquad (t=(1-u)/u)$$

$$=h\left(\frac{2i}{h(\alpha)}\right)^{1+s}\frac{\Gamma(s+1)\Gamma(k-s-1)}{\Gamma(k)}$$

である．$m(\alpha)=h(\alpha)/h$, $\mathrm{sgn}(\alpha)=\mathrm{sgn}(\zeta)$ とおくと，$m(\alpha)$, $\mathrm{sgn}(\zeta)$ は σ のとり方によらない．よって

$$\lim_{s\to 0}\sum_{\alpha\in T^p//\Gamma}\int_{\Gamma(\alpha)\backslash H}\kappa(z;\ \alpha,\ s)dv(z)$$

$$=\lim_{s\to 0}\left(\frac{1}{2\pi}\right)\sum_{\alpha\in T^p//\Gamma}\chi(\alpha)^{-1}\mathrm{sgn}(\alpha)^k\det(\alpha)^{k/2-1}\left(\frac{i}{m(\alpha)}\right)^{1+s}$$

となることがわかった．

以上の考察により $T=Z(T)\cup T^e\cup T^h\cup T^{h'}\cup T^p$ となる．ここで

$$Z(T)=T\cap \boldsymbol{R}^{\times}\cdot 1, \qquad T^{e}=\{\alpha\in T\,|\,\alpha \text{ は楕円型}\},$$

$$T^{h}=\{\alpha\in T\,|\,\alpha \text{ は双曲型で固定点はいずれも } \Gamma \text{ の cusp}\},$$

$$T^{h'}=\{\alpha\in T\,|\,\alpha \text{ は } \Gamma \text{ の双曲点を固定する双曲型}\},$$

$$T^{p}=\{\alpha\in T\,|\,\alpha \text{ は } \Gamma \text{ の cusp を固定点とする放物型}\}$$

である．但し $\Gamma\backslash H$ が compact ならば定義より $T^h=\phi$, $T^p=\phi$ で $T=Z(T)\cup T^e\cup T^{h'}$ である．上の計算によって得られた $\mathrm{tr}(T)$ を定理の形に述べるのに便利なように，上の計算に用いた定義をまとめて述べる．

1° $\alpha\in GL_2(\boldsymbol{R})$ の固有値を η_α, ζ_α とする．

2° α が楕円元なら $\sigma\in SL_2(\boldsymbol{R})$ が存在して $\sigma\alpha\sigma^{-1}=\begin{bmatrix} r\cos\theta & r\sin\theta \\ -r\sin\theta & r\cos\theta\end{bmatrix}$ と表わされるが，η_α, ζ_α は $\eta_\alpha=re^{i\theta}$, $\zeta_\alpha=re^{-i\theta}$ ととるものとする．

3° $\alpha\in GL_2(\boldsymbol{R})$ が楕円元でないならば，η_α, ζ_α は実数だから $\mathrm{sgn}(\alpha)=\mathrm{sgn}(\eta_\alpha)$ とおく．

4° α を $x(\in\boldsymbol{R}\cup\{\infty\})$ を固定する放物元とする．Λ を $SL_2(\boldsymbol{R})_x$ の離散部分群とする．σ を $\sigma x=\infty$ なる $SL_2(\boldsymbol{R})$ の元とし，$h(>0)$, $\zeta_\alpha\lambda_\alpha(\in\boldsymbol{R})$ を

$$\sigma\Lambda\sigma^{-1}\cdot\{\pm 1\}=\left\{\pm\begin{bmatrix}1 & mh\\ 0 & 1\end{bmatrix}\,\middle|\, m\in\boldsymbol{Z}\right\},\quad \sigma\alpha\sigma^{-1}=\begin{bmatrix}\zeta_\alpha & \lambda_\alpha\\ 0 & \zeta_\alpha\end{bmatrix}$$

なるものとするときに，$m(\alpha,\Lambda)=\lambda_\alpha\zeta_\alpha^{-1}/h$ と定義する．$m(\alpha,\Lambda)$ は σ のとり方によらずに α と Λ で決まる．さらに $m(\alpha)=m(\alpha,\Gamma(\alpha))$ とおく．

定理 6.4.9 $k>2$ ならば $\mathrm{tr}(T)$ は上の記号を用いて次のように表わされる．

$$\mathrm{tr}(T)=t_0+t_e+t_h+t_p,$$

$$t_0=\frac{k-1}{4\pi}\frac{v(\Gamma\backslash H)}{Z(\Gamma)}\sum_{\alpha\in Z(T)}\chi(\alpha)^{-1}\mathrm{sgn}(\alpha)^k\det(\alpha)^{k/2-1},$$

$$t_e=-\sum_{\alpha\in T^e//\Gamma}\frac{\chi(\alpha)^{-1}}{|\Gamma(\alpha)|}\frac{\eta_\alpha^{k-1}}{\eta_\alpha-\zeta_\alpha},$$

$$t_h=-\sum_{\alpha\in T^h//\Gamma}\frac{\chi(\alpha)^{-1}}{|Z(\Gamma)|}\frac{\min\{|\eta_\alpha|,|\zeta_\alpha|\}^{k-1}}{|\eta_\alpha-\zeta_\alpha|}\mathrm{sgn}(\alpha)^k,$$

$$t_p=\lim_{s\to 0}\left(\frac{1}{2\pi}\right)\sum_{\alpha\in T^p//\Gamma}\chi(\alpha)^{-1}\frac{\mathrm{sgn}(\alpha)^k}{|Z(\Gamma)|}\det(\alpha)^{k/2-1}\left(\frac{i}{m(\alpha)}\right)^{s+1}.$$

但し，$(i/m(\alpha))^{s+1}$ は $s=0$ のときに $i/m(\alpha)$ となる分枝をとるものとする．

T が次の (6.4.1) を満たすならば定理 6.4.9 は見易い形に変形される.

(6.4.1)　$GL_2(\boldsymbol{R})$ の元 g で $\det(g)=-1$ であり $g\alpha g^{-1}\in T$, $\chi(g\alpha g^{-1})=\chi(\alpha)$ が任意の $\alpha\in T$ について成立するものが存在する.

特に $\Gamma=\Gamma_0(N)$ で $T=T(n)$ とすると $g=\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$ は (6.4.1) を満たしている.

定理 6.4.10　$k>2$ とする. もし T に (6.4.1) を満たす元 g が存在するならば

$$\mathrm{tr}(T)=t_0+t_e+t_h+t_p,$$

$$t_0=\frac{k-1}{4\pi}\sum_{\alpha\in Z(T)}\frac{\chi(\alpha)^{-1}}{|Z(\Gamma)|}\mathrm{sgn}(\alpha)^k v(\Gamma\backslash H)\det(\alpha)^{k/2-1},$$

$$t_e=-\sum_{\alpha\in T^e//\Gamma}\frac{\chi(\alpha)^{-1}}{2|\Gamma(\alpha)|}\frac{\eta_\alpha^{k-1}-\zeta_\alpha^{k-1}}{\eta_\alpha-\zeta_\alpha},$$

$$t_h=-\sum_{\alpha\in T^h//\Gamma}\frac{\chi(\alpha)^{-1}}{|Z(\Gamma)|}\frac{\min\{|\eta_\alpha|,\ |\zeta_\alpha|\}^{k-1}}{|\eta_\alpha-\zeta_\alpha|}\mathrm{sgn}(\alpha)^k,$$

$$t_p=-\lim_{s\to 0}\frac{s}{4}\sum_{\alpha\in T^p//\Gamma}\frac{\chi(\alpha)^{-1}}{|Z(\Gamma)|}\mathrm{sgn}(\alpha)^k\det(\alpha)^{k/2-1}|m(\alpha)|^{-s-1}$$

となる.

証明　g を (6.4.1) を満たす元とする. $\alpha\in T$ に対し $\alpha'=g\alpha g^{-1}$ とおく. α が楕円元または放物元ならば, 補題 1.3.5 により α と α' は $SL_2(\boldsymbol{R})$ の元では共役ではない. $\alpha\in T^e$ とする. $\sigma\in SL_2(\boldsymbol{R})$ を $\sigma\alpha\sigma^{-1}=\begin{bmatrix}r\cos\theta & r\sin\theta\\ -r\sin\theta & r\cos\theta\end{bmatrix}$ ととると $\eta_\alpha=re^{i\theta}$, $\zeta_\alpha=re^{i\theta}$ である. $\sigma'=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}\sigma g^{-1}\in SL_2(\boldsymbol{R})$ とおくと

$$\sigma'\alpha'\sigma'^{-1}=\begin{bmatrix}r\cos(-\theta) & r\sin(-\theta)\\ -r\sin(-\theta) & r\cos(-\theta)\end{bmatrix}$$

であるから $\eta_{\alpha'}=\zeta_\alpha$, $\zeta_{\alpha'}=\eta_\alpha$ である. α と α' は2つずつ組になるから, 従って楕円元に関する和を得る. 次に $\alpha\in T^p$ とする. x を α の固定点とし $SL_2(\boldsymbol{R})$ の元 σ を $\sigma x=\infty$ にとる. $h(>0)$, ζ, $\lambda(\in\boldsymbol{R})$ を

$$\sigma\alpha\sigma^{-1}=\begin{bmatrix}\zeta & \lambda\\ 0 & \zeta\end{bmatrix},\qquad \sigma\Gamma_x\sigma^{-1}\cdot\{\pm 1\}=\left\{\pm\begin{bmatrix}1 & mh\\ 0 & 1\end{bmatrix}\middle|\, m\in\boldsymbol{Z}\right\}$$

とする．$\sigma'=\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\sigma g^{-1}$ とおくと，$x'=gx$ は α' の固定点で

$$\sigma'\alpha'\sigma'^{-1}=\begin{bmatrix}\zeta & -\lambda\\ 0 & \zeta\end{bmatrix},\qquad \sigma'\Gamma_{x'}\sigma'^{-1}\{\pm 1\}=\left\{\pm\begin{bmatrix}1 & mh\\ 0 & 1\end{bmatrix}\middle| m\in \boldsymbol{Z}\right\}$$

である．従って $m(\alpha')=-m(\alpha)$ となる．

$$t_p=\lim_{s\to 0}\frac{1}{4\pi}[i^{s+1}+(-i)^{s+1}]\sum_{\alpha\in T^p//\Gamma}\det(\alpha)^{k/2-1}\frac{\chi(\alpha)^{-1}}{|Z(\Gamma)|}\mathrm{sgn}(\alpha)^k|m(\alpha)|^{-1-s}$$

となるが $T^p//\Gamma$ の代表として $\bigcup_{x\in\Gamma\backslash P_\Gamma} T_x^p$ がとれるから

$$=\lim_{s\to 0}\frac{1}{4\pi}[i^{s+1}+(-i)^{s+1}]\sum_{x\in\Gamma\backslash P_\Gamma}\sum_{\alpha\in T_x^p/\Gamma_x}\det(\alpha)^{k/2-1}\frac{\chi(\alpha)^{-1}}{|Z(\Gamma)|}\mathrm{sgn}(\alpha)^k$$
$$\times\{\sum_{\gamma\in\Gamma_x}\chi(\gamma)^{-1}\mathrm{sgn}(\gamma)^k|m(\alpha)+m(\gamma)|^{-1-s}\}$$

である．$\gamma_0\in\Gamma_x$ を $\Gamma_x\cdot\{\pm 1\}/\{\pm 1\}$ を生成する元とすると

$$\sum_{\gamma\in\Gamma_x}\chi(\gamma)^{-1}\mathrm{sgn}(\gamma)^k|m(\alpha)+m(\gamma)|^{-s-1}$$
$$=|Z(\Gamma)|\sum_{n=-\infty}^{\infty}\chi(\gamma_0)^{-n}\mathrm{sgn}(\gamma_0)^{kn}|m(\alpha)+n|^{-1-s}$$

となり，これは補題 3.2.2 により $s=0$ で正則か高々 1 位の極を持つ．

$$\frac{1}{\pi}[(i)^{s+1}+(-i)^{s+1}]=-s+(s \text{ に関して 2 次以上の項})$$

であるから

$$t_p=-\lim_{s\to 0}\frac{s}{4}\sum_{\alpha\in T^p//\Gamma}\det(\alpha)^{k/2-1}\frac{\chi(\alpha)^{-1}}{|Z(\Gamma)|}\mathrm{sgn}(\alpha)^k|m(\alpha)|^{-1-s}$$

である．（証明終）

後のためにもう少し整理して見易い形に書きなおしておく．

定義 $\alpha\in T^e\cup T^h\cup T^p$ のときに $k(\alpha)$, $l(\alpha)$ を次のように定義する．

$$k(\alpha)=\begin{cases}\dfrac{\eta_\alpha^{k-1}-\zeta_\alpha^{k-1}}{\eta_\alpha-\zeta_\alpha} & (\alpha\in T^e)\\[2ex] \dfrac{\min\{|\eta_\alpha|,|\zeta_\alpha|\}^{k-1}}{|\eta_\alpha-\zeta_\alpha|}\mathrm{sgn}(\alpha)^k & (\alpha\in T^h)\\[2ex] \dfrac{s}{4}\mathrm{sgn}(\alpha)^k\det(\alpha)^{k/2-1} & (\alpha\in T^p),\end{cases}$$

$$l(\alpha)=\begin{cases}\dfrac{1}{2|\Gamma(\alpha)|} & (\alpha\in T^e)\\[2ex] \dfrac{1}{|Z(\Gamma)|} & (\alpha\in T^h)\\[2ex] \dfrac{1}{|m(\alpha)^{s+1}|Z(\Gamma)|} & (\alpha\in T^p).\end{cases}$$

この記号を用いると定理 6.4.10 は次のように変形される.

系 6.4.11 定理 6.4.10 の仮定の下に $k(\alpha)$, $l(\alpha)$ を上のように定義すると, t_e, t_h, t_p は各々

$$t_e=-\sum_{\alpha\in T^e//\Gamma}\chi(\alpha)^{-1}k(\alpha)l(\alpha),$$

$$t_h=-\sum_{\alpha\in T^h//\Gamma}\chi(\alpha)^{-1}k(\alpha)l(\alpha),$$

$$t_p=-\lim_{s\to 0}\sum_{\alpha\in T^p//\Gamma}\chi(\alpha)^{-1}k(\alpha)l(\alpha)$$

と表わされる.

§6.5 Hecke 作用素の trace (代数的計算)

この章の残りの節では, 前節で得た Hecke 作用素の trace の一般的な公式を不定符号の四元数環の単数群の場合に適用して実際に計算の出来る形にまで導く. 四元数環に関する記号は §5.3 の通りとする. T を Δ_R に含まれる両側 Γ_R 不変集合で, 有限個の Γ_R 両側剰余類の和となっているものとする. $T=\coprod\Gamma_R\alpha\Gamma_R$ としたときに T と $R(\Gamma_R, \Delta_R)$ の元 $\sum\Gamma_R\alpha\Gamma_R$ と同一視することにより, T は $R(\Gamma_R, \Delta_R)$ の元と考えられる. 更に $T_A=U_RTU_R$ とおくと T_A は有限個の両側 U_R 剰余類の和で, 上と同様に T_A を $R(U_R, D_R)$ の元とみなすと $R(\Gamma_R, \Delta_R)$ と $R(U_R, D_R)$ の同型により T と T_A は対応することは明らかである. Γ_R, U_R は R を省略して U, Γ とも書くことにする.

四元数環に不慣れな読者のために modular 群の場合について記号の定義を繰り返しておく. この場合には $B=M_2(\boldsymbol{Q})$ であり, R は自然数 N を用いて

$$R=\left\{\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}\in M_2(\boldsymbol{Z})\;\middle|\;c\equiv 0\pmod{N\boldsymbol{Z}}\right\}$$

と書ける. また素数 p に対しては

$$R_p=\left\{\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\in M_2(\boldsymbol{Z}_p) \mid \quad c\equiv 0 \pmod{N\boldsymbol{Z}_p}\right\}$$

であり，$U_R=\prod_p R_p^\times \times GL_2^+(\boldsymbol{R})\subset B_A^\times$ である．よって $\Gamma_R=U_R\cap B=\Gamma_0(N)$ である．更に各 p について

$$D_p=\left\{\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\in R_p \mid \quad ad-bc\neq 0,\ a\in \boldsymbol{Z}_p^\times\right\}$$

であり

$$D_R=(\prod_p D_p\times GL_2^+(\boldsymbol{R}))\cap GL_2(\boldsymbol{Q}_A)$$

である．よってこのときには $\Delta_R=D_R\cap B^\times=\Delta_0(N)$ であり，$R(\Gamma_R, \Delta_R)=R(\Gamma_0(N), \Delta_0(N))=R(N)$ である．更に

$$T(n)=\{\alpha\in\Delta_0(N)\mid \det(\alpha)=n\}$$

が成り立つ．また $T(n)_A=U_R T(n) U_R$ とすると

$$T(n)_A=(\prod_p T(n)_p\times GL_2^+(\boldsymbol{R}))\cap GL_2(\boldsymbol{Q}_A),$$

$$T(n)_p=\{\alpha_p\in D_p\mid \det(\alpha_p)\in n\cdot R_p^\times\}$$

と書ける．

さて $B^\times$ の scalar でない元 α に対して

$$C(\alpha)=C_{B^\times}(\alpha)=\{\delta\alpha\delta^{-1}\mid \delta\in B^\times\}$$

とする．また $\boldsymbol{Q}[\alpha]$ の order $\mathfrak{r}$ に対して

$$C(\alpha, \mathfrak{r})=\{\delta\alpha\delta^{-1}\mid \delta\in B^\times,\ \boldsymbol{Q}[\alpha]\cap\delta^{-1}R\delta=\mathfrak{r}\}$$

と定義すると，補題 5.2.2 (2) により $\boldsymbol{Q}[\alpha]\cap\delta^{-1}R\delta$ は $\beta=\delta\alpha\delta^{-1}$ で決まり δ のとり方にはよらないから

$$C(\alpha)=\coprod_{\mathfrak{r}} C(\alpha, \mathfrak{r}) \tag{6.5.1}$$

が成り立つ．ここで $\mathfrak{r}$ は $\boldsymbol{Q}[\alpha]$ の order を動く．

補題 6.5.1 S は T^e, T^h, T^p のいずれかとする．もし α が S の元ならば

$$S\cap C(\alpha)=T\cap C(\alpha)$$

が成り立つ．

証明 $B^\times$ の元が楕円型，放物型であることは $B^\times$ の元による共役で不変で

あるから $S=T^e$ 及び T^p の場合には明らかに成り立つ．$T^h\neq\phi$ なのは $B=M_2(\boldsymbol{Q})$ の場合であるが，この場合は $P_\Gamma=\boldsymbol{Q}\cup\{\infty\}$ であるから $B^\times=GL_2(\boldsymbol{Q})$ は Γ の cusp を Γ の cusp に写像する．$B^\times$ の元が双曲型であることは，$B^\times$ の元による共役で不変であるから $C(\alpha)$ の元は Γ の cusp を固定点とする双曲型の元である．よって補題は成立する．　　　　(証明終)

$k(\alpha)$ は $B^\times$ の元による共役で不変であるから，上の補題により S が T^e, T^h, T^p のいずれかとするときに

$$\sum_{\alpha\in S//\Gamma}\chi(\alpha)^{-1}k(\alpha)\,l(\alpha)=\sum_{\alpha\in S//B^\times}k(\alpha)\sum_{\beta\in T\cap C(\alpha)//\Gamma}\chi(\beta)^{-1}l(\beta) \tag{6.5.2}$$

となる．$\alpha\in T^e\cup T^p$ とする．$\mathfrak{r}$ を $\boldsymbol{Q}[\alpha]$ の order とし $\beta=\delta\alpha\delta^{-1}\in C(\alpha,\ \mathfrak{r})$ とする．α が楕円型また放物型だから β も楕円型または放物型であり，$\boldsymbol{Q}[\beta]$ の任意の元 ε に対して $\mathrm{N}_B(\varepsilon)\geqq 0$ となることがわかる．よって

$$\Gamma(\beta)=\boldsymbol{Q}[\beta]\cap R^\times=\delta(\boldsymbol{Q}[\alpha]\cap\delta^{-1}R^\times\delta)\delta^{-1}=\delta\mathfrak{r}^\times\delta^{-1}$$

が成り立つ．従って $\boldsymbol{Q}[\alpha]$ の任意の order $\mathfrak{r}$ に対して（$|Z(\Gamma)|=2$ だから）

$$l(\mathfrak{r})=\begin{cases}\dfrac{1}{2|\mathfrak{r}^\times|} & (\alpha\in T^e)\\[2mm] \dfrac{1}{2} & (\alpha\in T^h)\\[2mm] \dfrac{1}{|m(\alpha,\ \mathfrak{r}^\times)|^{1+s}} & (\alpha\in T^p)\end{cases} \tag{6.5.3}$$

と定義すると，$\beta\in C(\alpha,\ \mathfrak{r})$ ならば $l(\beta)=l(\mathfrak{r})$ が成り立つ．$\boldsymbol{Z}[\beta]\subset\delta\mathfrak{r}\delta^{-1}$ だから，$\boldsymbol{Z}[\alpha]\subset\mathfrak{r}$ であるのでこの記号を用いると (6.5.2) は更に

$$\sum_{\alpha\in S//\Gamma}\chi(\alpha)^{-1}k(\alpha)\,l(\alpha)=\sum_{\alpha\in S//B^\times}k(\alpha)\sum_{\boldsymbol{Z}[\alpha]\subset\mathfrak{r}}l(\mathfrak{r})\sum_{\beta\in T\cap C(\alpha,\ \mathfrak{r})//\Gamma}\chi(\beta)^{-1} \tag{6.5.4}$$

と変形される．

α は B の scalar でない元とすると $\boldsymbol{Q}_A[\alpha]=\boldsymbol{Q}[\alpha]\otimes_{\boldsymbol{Q}}\boldsymbol{Q}_A$ は自然に B_A の部分環とみなせる．次に $\boldsymbol{Q}[\alpha]$ の任意の order $\mathfrak{r}$ に対して

$$\mathfrak{r}_A=\mathfrak{r}\otimes_{\boldsymbol{Z}}\boldsymbol{Z}_A,$$

$$\mathfrak{r}_{A+}=\{(\alpha_v)\in\mathfrak{r}_A\,|\,\det(\alpha_\infty)>0\}$$

とおく．ここで $\boldsymbol{Z}_A=\prod_p\boldsymbol{Z}_p\times\boldsymbol{R}$ とする．更に

$$h(\mathfrak{r})=|\boldsymbol{Q}_A[\alpha]^\times/\mathfrak{r}_{A+}^\times\cdot\boldsymbol{Q}[\alpha]^\times|$$

と定義し，$h(\mathfrak{r})$ を $\mathfrak{r}$ の類数と言う．また $\boldsymbol{Q}[\alpha]$ の order $\mathfrak{r}$ に対して

$$C_A(\alpha)=C_{B_A}^{\times}(\alpha)=\{h\alpha h^{-1}\,|\,h\in B_A^{\times}\}$$

$$C_A(\alpha,\ \mathfrak{r})=\{h\alpha h^{-1}\,|\,h\in B_A^{\times},\ \boldsymbol{Q}_A[\alpha]\cap h^{-1}R_Ah=\mathfrak{r}_A\}$$

と定義する．明らかに

$$C(\alpha)\subset C_A(\alpha),\qquad C(\alpha,\ \mathfrak{r})\subset C_A(\alpha,\ \mathfrak{r})$$

が成り立っている．

補題 6.5.2　$\alpha\in T^e\cup T^h\cup T^p$ とする．θ を $C(\alpha)//\Gamma\longrightarrow C_A(\alpha)//U$ なる自然な写像とすると

（1）　θ は全射である．

（2）　$g\in C_A(\alpha,\ \mathfrak{r})$ ならば $|\theta^{-1}(C_U(g))|=h(\mathfrak{r})$ である．

証明　C_A (α) の元 g を $g=h\alpha h^{-1}\in C_A(\alpha)$，$h\in B_A^{\times}$ と書く．定理 5.2.11 により $u\in U,\ \beta\in B^{\times}$ が存在して $h=u\beta$ である．従って $C_U(g)=C_U(\beta\alpha\beta^{-1})$ となり θ は全射である．次に $\xi\in B^{\times}$ とすると，$C_U(\xi\alpha\xi^{-1})=C_U(g)$ となる必要十分条件は $\xi\in Uh\boldsymbol{Q}_A[\alpha]^{\times}\cap B^{\times}$ である．また $\xi,\eta\in B^{\times}$ に対して，$C_\Gamma(\xi\alpha\xi^{-1})=C_\Gamma(\eta\alpha\eta^{-1})$ となるのは $\Gamma\xi Q[\alpha]^{\times}=\Gamma\eta Q[\alpha]^{\times}$ となるときである．このことと $\beta\boldsymbol{Q}_A[\alpha]\beta^{-1}=\boldsymbol{Q}_A[\beta\alpha\beta^{-1}]$ を用いると

$$\begin{aligned}|\theta^{-1}(C_U(g))|&=|\Gamma\backslash Uh\boldsymbol{Q}_A[\alpha]^{\times}\cap B^{\times}/\boldsymbol{Q}[\alpha]^{\times}|\\&=|\Gamma\backslash U\beta\boldsymbol{Q}_A[\alpha]^{\times}\cap B^{\times}/\boldsymbol{Q}[\alpha]^{\times}|\\&=|\Gamma\backslash U\boldsymbol{Q}_A[\beta\alpha\beta^{-1}]^{\times}\cap B^{\times}[\boldsymbol{Q}[\beta\alpha\beta^{-1}]^{\times}|\end{aligned}$$

となる．一般に E を $B_A^{\times}$ の可換な部分群とすると

$$(6.5.5)\qquad |\Gamma\backslash UE\cap B^{\times}/\Gamma\cap B^{\times}|=|E/(E\cap U)(E\cap B^{\times})|$$

であることを示そう．$t\in E$ とすると定理 5.2.11 により $u\in U$ が存在して $ut\in UE\cap B^{\times}$ である．$t_1,\ t_2\in E$ とする．U の元 $u_1,\ u_2$ をとったときに，$u_1t_1,\ u_2t_2\in UE\cap B^{\times}$ で且つ u_1t_1 と u_2t_2 が同じ $\Gamma\backslash UE\cap B^{\times}/E\cap B^{\times}$ の類に含まれる条件は $t_1t_2^{-1}\in(E\cap U)(E\cap B^{\times})$ である．従って (6.5.5) を得る．これを $E=\boldsymbol{Q}_A[\beta\alpha\beta^{-1}]^{\times}$ に適用すると

$$\begin{aligned}|\theta^{-1}(C_U(g))|&=|\boldsymbol{Q}_A[\beta\alpha\beta^{-1}]^{\times}/(\boldsymbol{Q}_A[\beta\alpha\beta^{-1}]^{\times}\cap U)\cdot\boldsymbol{Q}[\beta\alpha\beta^{-1}]^{\times}|\\&=|\boldsymbol{Q}_A[\alpha]^{\times}/(\boldsymbol{Q}_A[\alpha]^{\times}\cap\beta^{-1}U\beta)\cdot\boldsymbol{Q}[\alpha]^{\times}|\end{aligned}$$

となる．$U=\prod_p R_p^\times \times GL_2^+(\boldsymbol{R})$ であるので，定義により（2）を得る．

（証明終）

T_A は U 両側剰余類の和であるから，θ は $T\cap C(\alpha,\mathfrak{r})//\Gamma$ を $T_A\cap C_A(\alpha,\mathfrak{r})//U$ の上へ写像し，(6.5.4) は更に

(6.5.6)
$$\sum_{\alpha\in S//\Gamma}\chi(\alpha)^{-1}k(\alpha)l(\alpha)$$
$$=\sum_{\alpha\in S//B^\times}k(\alpha)\sum_{Z[\alpha]\subset\mathfrak{r}}l(\mathfrak{r})h(\mathfrak{r})\sum_{g\in T_A\cap C_A(\alpha,\mathfrak{r})//U}\chi(g)^{-1}$$

と変形される．

$C_A(\alpha,\mathfrak{r})//U$ 上の和を局所的な群上の共役類上の和に帰着させよう．そのために v を素数または ∞ とし

$$C_v(\alpha)=C_{B_v^\times}(\alpha)=\{x\alpha x^{-1}\,|\,x\in B_v^\times\}$$

と定義する．更に $v=p$（素数）のときには $\mathfrak{r}_p$ を $\mathfrak{r}$ の B_p における閉包とし

$$C_p(\alpha,\mathfrak{r})=\{x\alpha x^{-1}\,|\,x\in B_p^\times,\ \boldsymbol{Q}_p[\alpha]\cap x^{-1}R_px=\mathfrak{r}_p\}$$
$$C_\infty(\alpha,\mathfrak{r})=C_\infty(\alpha)$$

と定義する．便宜上 $R_\infty^\times=GL_2^+(\boldsymbol{R})$ と書くと，$U=\prod_v R_v^\times$ であるから

$$T_A\cap C_A(\alpha,\mathfrak{r})//U=\prod_v(T_v\cap C_v(\alpha,\mathfrak{r})//R_v^\times)$$

である．よって (6.5.6) における $T_A\cap C_A(\alpha,\mathfrak{r})//U$ 上の和は

(6.5.7)
$$\sum_{g\in T_A\cap C_A(\alpha,\mathfrak{r})//U}\chi(g)^{-1}=\prod_v\sum_{g_v\in T_v\cap C_v(\alpha,\mathfrak{r})//R_v^\times}\chi_v(g_v)^{-1}$$

と局所的な和に書き改められる． 但し v が N を割る素数以外の素数または ∞ ならば $\chi_v(g_v)=1$ とする．

§6.6 局所共役類

この節では局所群の共役類を定めて (6.5.7) の右辺の各項を計算する．先ず $v=\infty$ の場合には話が簡単である．$C_\infty(\alpha,\mathfrak{r})=C_\infty(\alpha)$ で $T_\infty=R_\infty^\times=GL_2^+(\boldsymbol{R})$ であるから

$$T_\infty\cap C_\infty(\alpha,\mathfrak{r})//R_\infty^\times=\{x\alpha x^{-1}\,|\,x\in GL_2(\boldsymbol{R})\}//GL_2^+(\boldsymbol{R})$$

である．よって補題 1.3.4 により

$$(6.6.1)\qquad |T_\infty\cap C_\infty(\alpha)//R_\infty^\times|=\begin{cases}2 & (\alpha\in T^e\cup T^p)\\ 1 & (\alpha\in T^h)\end{cases}$$

がわかる．

次に v が素数 p の場合を調べる．先ず，体 F 上の2次の多元環は次の 1°, 2°, 3° のいずれかと同型である．

1° F 上の2次体，　2° $H_F=F\times F$,　3° $E_F=F[\varepsilon]$,　$\varepsilon^2=0$.

実際 K が F 上の2次の多元環，$x(\in K)$ を K の F 上の生成元とし，x の最小多項式を $f(X)$ とすると，$K\cong F[X]/(f(X))$ であるが $f(X)=0$ が F で根を持たない，2根を持つ，重根を持つ，に従って上の 1°, 2°, 3° を得る．

補題 6.6.1 （1） K_p は $\boldsymbol{Q}_p$ の2次拡大体とする．$\mathfrak{r}_p$ が K_p の全整数環ならば，K_p の任意の order は $\boldsymbol{Z}_p+p^e\mathfrak{r}_p$ $(e\geqq 0)$ である．

（2） $H_p=H_{\boldsymbol{Q}_p}$ とし，$\mathfrak{r}_p=\boldsymbol{Z}_p\times\boldsymbol{Z}_p$ とする．$a\in\boldsymbol{Q}_p$ と $(a, a)\in H_p$ を同一視することにより，$\boldsymbol{Q}_p$ を H_p の部分集合とみなすと，H_p の任意の order は $\boldsymbol{Z}_p+p^e\mathfrak{r}_p$ $(e\geqq 0)$ である．

（3） $E_p=E_{\boldsymbol{Q}_p}$ とすると，E_p の任意の order は $\boldsymbol{Z}_p+p^e\boldsymbol{Z}_p[\varepsilon]$ $(e\in\boldsymbol{Z})$ である．

証明 $L=K_p$ または H_p とする．$\mathfrak{r}_p'$ を L の order とし，$u\in\mathfrak{r}_p'$ とする．u の最小多項式は u の乗法を $\mathfrak{r}_p'$ の $\boldsymbol{Z}_p$ 上の基底で表現した表現行列の最小多項式に等しい．従って $u\in\mathfrak{r}_p'$ ならば u の最小多項式として，係数を $\boldsymbol{Z}_p$ に持ち最高次の係数が1であるようなものがとれる．$\mathfrak{r}_p$ はそのような元全体の集合であるから極大 order で，特に最大の order でもある．また $\boldsymbol{Z}_p+p^e\mathfrak{r}_p$ が L の order であることは明らかである．$\boldsymbol{Z}_p$ は単項 ideal 環だから $\mathfrak{r}_p'=\boldsymbol{Z}_p+\boldsymbol{Z}_pu$ と書ける．$\boldsymbol{Q}\mathfrak{r}_p'=\boldsymbol{Q}\mathfrak{r}_p=L$ であるから e $(\geqq 0)$ が存在して $u\in\boldsymbol{Z}_p+p^e\mathfrak{r}_p$,　$u\notin\boldsymbol{Z}_p+p^{e+1}\mathfrak{r}_p$ となる．$\mathfrak{r}_p'\supset\boldsymbol{Z}_p$であるから $\mathfrak{r}_p'=\boldsymbol{Z}_p+p^e\mathfrak{r}_p$ である．よって（1）（2）が示された．次に $\boldsymbol{Z}_p+p^e\boldsymbol{Z}_p[\varepsilon]$ $(e\in\boldsymbol{Z})$ が E_p の order であることは明らかであり，逆に任意の order が $\boldsymbol{Z}_p+p^e\boldsymbol{Z}_p[\varepsilon]$ $[e\in\boldsymbol{Z}]$ と書けることは（1）（2）の場合と全く同じである．　（証明終）

さて p を素数とし，$B_p=M_2(\boldsymbol{Q}_p)$ とする．

$$(6.6.2)\qquad R_p=\left\{\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\in M_2(\boldsymbol{Z})\;\middle|\; c\equiv 0 \pmod{(p^\nu)}\right\}$$

とし，$N(R_p)$ を R_p の正規化群即ち

$$N(R_p)=\{g\in GL_2(\boldsymbol{Q}_p)\,|\,gR_pg^{-1}=R_p\}$$

とする．

補題 6.6.2 上の仮定の下に

$$N(R_p)=\begin{cases} \boldsymbol{Q}_p^\times R_p^\times & (\nu=0) \\ \boldsymbol{Q}_p^\times R_p^\times \cup \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ p^\nu & 0 \end{bmatrix}\boldsymbol{Q}_p^\times R_p^\times & (\nu\geqq 1) \end{cases}$$

である．

証明 $\nu=0$ とすると $R_p=M_2(\boldsymbol{Z}_p)$ であるから，単因子論により $M_2(\boldsymbol{Q}_p)$ の元 α に対して，$u_1, u_2\in GL_2(\boldsymbol{Z}_p)$ が存在して

$$u_1\alpha u_2=\begin{bmatrix} p^e & 0 \\ 0 & p^f \end{bmatrix}\qquad (e,\ f\in\boldsymbol{Z})$$

となる．よって $\alpha R_p\alpha^{-1}=R_p$ となるのは $e=f$ 即ち $\alpha\in\boldsymbol{Q}_p^\times R_p^\times$ のときに限る．$\nu\geqq 1$ ならば補題 5.3.1 により $M_2(\boldsymbol{Q}_p)$ の極大 order の組 $\{R_p^{(1)}, R_p^{(2)}\}$ が唯1組存在して $R_p=R_p^{(1)}\cap R_p^{(2)}$ と書ける．$N(R_p)$ の元は $R_p^{(1)}$ と $R_p^{(2)}$ の互換を引き起こすから

$$[N(R_p):\boldsymbol{Q}_p^\times R_p^\times]=1\quad \text{または}\quad 2$$

であるが $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ p^\nu & 0 \end{bmatrix}$ は $N(R_p)$ の元であるが $\boldsymbol{Q}_p^\times R_p^\times$ には属さないから補題を得る．　(証明終)

次に $\alpha\in M_2(\boldsymbol{Z}_p)$ を $\det(\alpha)\neq 0$ なる scalar でない元であるとする．$\mathfrak{r}_p$ は $\boldsymbol{Z}_p[\alpha]\subset\mathfrak{r}_p$ なる $\boldsymbol{Q}_p[\alpha]$ の order で

$$[\mathfrak{r}_p:\boldsymbol{Z}_p[\alpha]]=p^\rho\qquad (\rho\geqq 0)$$

なるものとする．補題 6.6.1 により $\mathfrak{r}_p$ は ρ によって唯1つ定まる．α の最小多項式を

$$f_\alpha(X)=X^2-tX+n\qquad (t,\ n\in\boldsymbol{Z})$$

と書き

$$\Omega(\alpha, \mathfrak{r}_p)=\{\xi\in \boldsymbol{Z}_p \mid f_\alpha(\xi)\equiv 0 \pmod{p^{\nu+2\rho}}\}$$

とおく．さらに $\xi\in\Omega(\alpha, \mathfrak{r}_p)$ に対して

$$g_\xi=\begin{bmatrix} \xi & p^\rho \\ -p^{-\rho}f_\alpha(\xi) & t-\xi \end{bmatrix}\in R_p$$

とおく．

補題 6.6.3 R_p は (6.6.2) で定義される $M_2(\boldsymbol{Q}_p)$ の order とし $\mathfrak{r}_p$ は $[\mathfrak{r}_p : \boldsymbol{Z}_p[\alpha]]=p^\rho$ となる $\boldsymbol{Q}_p[\alpha]$ の order とする．$g\in C_p(\alpha)$ に対し次の（1）〜（4）は同値である．

（1） $g\in C_p(\alpha, \mathfrak{r}_p)$.

（2） $(\boldsymbol{Z}_p+g)\cap p^\rho R_p\neq\phi$ でかつ $(\boldsymbol{Z}_p+g)\cap p^{\rho+1}R_p=\phi$.

（3） $g=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ とすると b, $a-d\equiv 0 \pmod{p^\rho}$，$c\equiv 0 \pmod{p^{\rho+\nu}}$ であり，さらに次の（i），(ii)，(iii) のいずれかが成り立つ．

（i） $b\not\equiv 0 \pmod{p^{\rho+1}}$，　（ii） $c\not\equiv 0 \pmod{p^{\rho+\nu+1}}$，

(iii) $a-d\not\equiv 0 \pmod{p^{\rho+1}}$.

（4） $\xi\in\Omega(\alpha, \mathfrak{r}_p)$ が存在して g は g_ξ に $N(R_p)$ 共役である．

証明 $g=h\alpha h^{-1}$ $(h\in GL_2(\boldsymbol{Q}_p))$ とすると

$$g\in C_p(\alpha, \mathfrak{r}_p) \Longleftrightarrow \boldsymbol{Q}_p[g]\cap R_p=h^{-1}\mathfrak{r}_p h \Longleftrightarrow [\boldsymbol{Q}_p[g]\cap R_p : \boldsymbol{Z}_p[g]]=p^\rho$$
$$\Longleftrightarrow \boldsymbol{Z}_p[g]=\boldsymbol{Z}_p+\boldsymbol{Q}_p[g]\cap p^\rho R_p$$

であるから（1）$\Longleftrightarrow$（2）である．（2）$\Longleftrightarrow$（3）は R_p の定義より明らかである．次に（4）を仮定すると g_ξ は（2）の条件を満たし，さらに

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ p^\nu & 0 \end{bmatrix} g_\xi \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ p^\nu & 0 \end{bmatrix}^{-1}$$

も（2）の条件を満たすから補題 6.6.2 により（4）$\Longrightarrow$（2）がわかる．最後に（3）を仮定し（4）を示そう．先ず（i）を仮定し $b=p^\rho b_1$ とおく．$a\in\Omega(\alpha, \mathfrak{r}_p)$ であり，$u=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & b_1 \end{bmatrix}\in R_p^\times$ とすると $ugu^{-1}=g_a$ がわかる．次に (ii) を仮定する．$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ p^\nu & 0 \end{bmatrix} g \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ p^\nu & 0 \end{bmatrix}^{-1}$ は（i）を満たすから (ii) は（i）の場合に帰着される．g が (iii) を満たすとする．（i）(ii) の場合は既に示した

から $b\equiv 0 \pmod{p^{\rho+1}}$, $c\equiv 0 \pmod{p^{\rho+\nu+1}}$ と仮定して差支えない. $u=\begin{bmatrix}1&1\\0&1\end{bmatrix}$ とおくと

$$ugu^{-1}=\begin{bmatrix}a+c & -a+d+b-c\\ c & d\end{bmatrix}$$

で $-a+d+b-c\not\equiv 0 \pmod{p^{\rho+1}}$ であるから再び(i)の場合に帰着される.

(証明終)

以下, $\nu\geqq 1$ ならば

$$w=\begin{bmatrix}0&1\\p^{\nu}&0\end{bmatrix}\in N(R_p)$$

とおく. 補題 5.2.2(1) と g_ξ の定義により

$$C_p(\alpha,\ \mathfrak{r}_p)\supset\{g_\xi|\xi\in\Omega(\alpha,\ \mathfrak{r}_p)\}\cup\{wg_\xi w^{-1}|\xi\in\Omega(\alpha,\ \mathfrak{r}_p)\}$$

であり, 補題 6.6.3 により $C_p(\alpha,\ \mathfrak{r}_p)//R_p^\times$ は代表系を $\{g_\xi|\xi\in\Omega(\alpha,\ \mathfrak{r}_p)\}\cup\{wg_\xi w^{-1}|\xi\in\Omega(\alpha,\ \mathfrak{r}_p)\}$ に持っていることがわかった. 即ち

$$C_p(\alpha,\ \mathfrak{r}_p)//R_p^\times=(\{g_\xi|\xi\in\Omega(\alpha,\ \mathfrak{r}_p)\}\cup\{wg_\xi w^{-1}|\xi\in\Omega(\alpha,\ \mathfrak{r}_p)\})//R_p^\times$$

である.

補題 6.6 4 R_p は (6.6.2) で定義される $M_2(\boldsymbol{Q}_p)$ の order としさらに $\nu\geqq 1$ とすると, 次の(1)(2)が成り立つ.

(1) $g,\ g'\in GL_2(Q_p)$ が $N(R_p)$ 共役である $\Longleftrightarrow$ g は g' または $wg'w^{-1}$ と $R_p^\times$ 共役である.

(2) $g=\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}\in C_p(\alpha,\ \mathfrak{r}_p)$ が或る $g_\xi(\xi\in\Omega(\alpha,\ \mathfrak{r}_p))$ に $R_p^\times$ 共役である

$$\Longleftrightarrow b\not\equiv 0 \pmod{p^{\rho+1}} \quad \text{または} \quad a-d\not\equiv 0 \pmod{p^{\rho+1}}$$

である.

証明 (1)は明らかである. (2)を示そう. $\Longleftarrow$ は補題 6.6.3 の(3)$\Longrightarrow$(4)の証明中に示した. $\Longrightarrow$ を示そう. $b\equiv 0 \pmod{p^{\rho+1}}$, $a-d\equiv 0 \pmod{p^{\rho+1}}$ とする. $u\in R_p^\times$ と $\xi\in\Omega(\alpha,\ \mathfrak{r}_p)$ が存在して $ugu^{-1}=g_\xi$ であるとする. $u=\begin{bmatrix}a'&b'\\c'&d'\end{bmatrix}$ とおくと, $c\equiv 0 \pmod{p^{\nu+\rho}}$ であるから

$$g_\xi = ugu^{-1} \equiv \begin{bmatrix} * & \dfrac{-a'b'(a-d)+a'^2b}{a'd'-b'c'} \\ * & * \end{bmatrix} \pmod{p^{\nu+\rho}}$$

となる．$\{-a'b'(a-d)+a'^2b\} \equiv 0 \pmod{p^{\rho+1}}$ であるから，これは g_ξ の定義に矛盾する．（証明終）

補題 6.6.5 $\xi, \eta \in \Omega(\alpha, \mathfrak{r}_p)$ とする．

（1） g_ξ と g_η が $R_p^\times$ 共役である $\Longleftrightarrow \xi \equiv \eta \pmod{p^{\nu+\rho}}$.

（2） $\nu \geqq 1$ ならば，g_ξ と $wg_\eta w^{-1}$ が $R_p^\times$ 共役である

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} \text{(i)} & t^2-4n \not\equiv 0 \pmod{p^{2\rho+1}} \text{ または } f(\eta) \not\equiv 0 \pmod{p^{\nu+2\rho+1}} \\ \text{(ii)} & \xi \equiv t-\eta \pmod{p^{\nu+\rho}}. \end{cases}$$

証明 先ず $\xi \equiv \eta \pmod{p^{\nu+\rho}}$ とする．$u = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ p^{-\rho}(\xi-\eta) & 1 \end{bmatrix} \in R_p^\times$ とすると $ug_\xi u^{-1} = g_\eta$ である．逆に $g_\eta = ug_\xi u^{-1}$, $u \in R_p^\times$ と仮定する．$g_\xi - \xi \equiv 0 \pmod{p^\rho}$ であるから $p^{-\rho}(g_\xi - \xi) \in R_p$ である．R_p の任意の元は $\pmod{p^\nu}$ で考えると上三角行列であるから，$p^{-\rho}(g_\eta - \xi) = p^{-\rho}u(g_\xi - \xi)u^{-1}$ の対角成分は $p^{-\rho}(g_\xi - \xi)$ の対角成分に合同である．特に左上成分を比べると $p^{-\rho}(\eta - \xi) \equiv 0 \pmod{p^\nu}$ である．故に $\eta \equiv \xi \pmod{p^{\nu+\rho}}$ を得た．次に（2）を示す．定義により

$$wg_\eta w^{-1} = \begin{bmatrix} b-\eta & -p^{-\rho-\nu}f(\eta) \\ p^{\nu+\rho} & \eta \end{bmatrix}$$

である．よって補題 6.6.4（2）と上の（1）により g_ξ と $wg_\eta w^{-1}$ が $R^\times$ 共役なのは

（i）′ $f(\eta) \not\equiv 0 \pmod{p^{\nu+2\rho+1}}$ または $2\eta - t \not\equiv 0 \pmod{p^{\rho+1}}$,

（ii） $\xi \equiv t-\eta \pmod{p^{\nu+\rho}}$

のときである．さらに $t^2-4n \equiv (2\eta-t)^2 \pmod{p^{2\rho+\nu}}$ であるから，この（i）′は補題における（i）と同値である．（証明終）

以上により次の定理を得る．

定理 6.6.6 $R_p = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in M_2(\boldsymbol{Z}_p) \mid c \equiv 0 \pmod{p^\nu} \right\}$ とする．R_p の元 α が scalar でない元とし，$f_\alpha(X) = X^2 - tX + n$ を α の最小多項式とする．$\mathfrak{r}_p$ を $\mathfrak{r}_p \supset \boldsymbol{Z}_p[\alpha]$ で $[\mathfrak{r}_p : \boldsymbol{Z}_p[\alpha]] = p^\rho$ なる order とする．

$$\Omega(\alpha, \mathfrak{r}_p)=\{\xi\in \boldsymbol{Z}_p \mid f_\alpha(\xi)\equiv 0 \pmod{p^{\nu+2\rho}}\},$$

$$\Omega'(\alpha, \mathfrak{r}_p)=\begin{cases}\{\xi\in \boldsymbol{Z}_p \mid f_\alpha(\xi)\equiv 0 \pmod{p^{\nu+2\rho+1}}\} & (t^2-4n\equiv 0 \pmod{p^{2\rho+1}})\\ \phi & (\nu=0 \text{ または } t^2-4n\not\equiv 0 \pmod{p^{2\rho+1}})\end{cases}$$

とすると $C_p(\alpha, \mathfrak{r}_p)//R_p^\times$ の代表系として

$$\{g_\xi \mid \xi\in\Omega(\alpha, \mathfrak{r}_p)/p^{\nu+\rho}\}\cup\{wg_\xi w^{-1} \mid \xi\in\Omega'(\alpha, \mathfrak{r}_p)/p^{\nu+\rho}\}$$

がとれる．ここで $\Omega(\alpha, \mathfrak{r}_p)/p^{\nu+\rho}$ および $\Omega'(\alpha, \mathfrak{r}_p)/p^{\nu+\rho}$ は各々 $\Omega(\alpha, \mathfrak{r}_p)$, $\Omega'(\alpha, \mathfrak{r}_p)$ の $\mathrm{mod}\ p^{\nu+\rho}$ の代表系を表わす．

特に $\nu=0$ の場合には

定理 6.6.7 $R=M_2(\boldsymbol{Z}_p)$ ならば $C_p(\alpha, \mathfrak{r}_p)//R_p^\times$ は唯1つの元からなる．

証明 補題 6.6.1 により $\beta\in\boldsymbol{Q}_p[\alpha]$ が存在して $\mathfrak{r}_p=\boldsymbol{Z}_p[\beta]$ と書ける．$\beta=a+b\alpha$ $(a, b\in\boldsymbol{Q}_p)$ であるから $C_p(\alpha, \mathfrak{r}_p)//R_p^\times$ と $C_p(\beta, \mathfrak{r}_p)//R_p^\times$ は $g\longmapsto a+bg$ により1対1に対応する．$[\mathfrak{r}_p : \boldsymbol{Z}_p[\beta]]=1$ であるので，$\Omega(\beta, \mathfrak{r}_p)=\mathfrak{r}_p$ で $\nu=\rho=0$ となるから

$$|C_p(\alpha, \mathfrak{r}_p)//R_p^\times|=|C_p(\beta, \mathfrak{r}_p)//R_p^\times|=1$$

である．

(証明終)

次に B_p が斜体となる場合を考えよう．このときには B_p は唯1つの極大 order $R_p=\{\alpha\in B_p \mid \mathrm{N}(\alpha), \mathrm{tr}(\alpha)\in\boldsymbol{Z}_p\}$ を持つから，α $(\in B_p^\times)$ が scalar でない元とすると

$$C_p(\alpha)\cap R_p\neq\phi \Longleftrightarrow \alpha\in R_p$$

である．$\alpha\in R_p^\times$ を scalar でない元とすると，$\boldsymbol{Q}_p[\alpha]\cap R_p$ は $\boldsymbol{Q}_p[\alpha]$ の極大 order であるから

$$|C_p(\alpha, \mathfrak{r}_p)//B_p^\times|=\begin{cases}1 & (\mathfrak{r}_p=\boldsymbol{Q}_p[\alpha] \text{ の極大 order})\\ 0 & (\mathfrak{r}_p\neq\boldsymbol{Q}_p[\alpha] \text{ の極大 order})\end{cases}$$

である．ところで R_p の両側 ideal は $\pi_p^n R_p$ $(\pi_p^2 R_p=pR_p)$ と書け，$B_p=\coprod_{n=0}^{\infty}\pi_p^{-n}R_p$ であるから

$$B_p=\begin{cases}\boldsymbol{Q}_p[\alpha]R_p & (p \text{ が } \boldsymbol{Q}_p[\alpha] \text{ で分岐する})\\ \boldsymbol{Q}_p[\alpha]R_p\cup\pi\boldsymbol{Q}_p[\alpha]R_p & (p \text{ が } \boldsymbol{Q}_p[\alpha] \text{ で分岐しない})\end{cases}$$

となる．p は B_p で分岐しているから $\boldsymbol{Q}_p[\alpha]$ で分解することはないことに注意して次の定理を得る．

定理 6.6.8 B_p が斜体であるとする．R_p を B_p の極大 order とし $\alpha \in R_p$ は scalar でない元とする．$\mathfrak{r}_p$ が $\boldsymbol{Q}_p[\alpha]$ の order ならば

$$C_p(\alpha, \mathfrak{r}_p)//R_p^\times = \begin{cases} \phi & (\mathfrak{r}_p \neq \text{極大 order}) \\ \{\alpha\} & (\mathfrak{r}_p \text{ が極大 order で } p \text{ が } \boldsymbol{Q}_p[\alpha] \text{ で分岐する}) \\ \{\alpha, \pi\alpha\pi^{-1}\} & (\mathfrak{r}_p \text{ が極大 order で} \\ & \quad p \text{ が } \boldsymbol{Q}_p[\alpha] \text{ で素 ideal である}). \end{cases}$$

以上から U 共役類上の和は次のように局所的な和に帰着される．以下 $T_p = T_A \cap B_p$ とおく．$\alpha \in T$ の最小多項式を $f_\alpha(X) = X^2 - tX + n$ とすると

$$\sum_{g \in T_A \cap C_A(\alpha, \mathfrak{r})//U} \chi(g)^{-1}$$
(6.6.3)
$$= v \prod_{p|N} \Big(\sum_{\substack{\xi \in \Omega/p^{\nu+\rho} \\ g_\xi \in T_p}} \chi_p(\xi) + \sum_{\substack{\eta \in \Omega'/p^{\nu+\rho} \\ w g_\eta w^{-1} \in T_p}} \chi_p(t-\xi) \Big)$$

である．ここで $\Omega = \Omega(\alpha, \mathfrak{r}_p)$，$\Omega' = \Omega'(\alpha, \mathfrak{r}_p)$ であり

$$v = \begin{cases} 2^{1+u} & (\alpha \in T^e) \\ 1 & (\alpha \in T^h) \\ 2 & (\alpha \in T^p) \end{cases}$$

で，$\alpha \in T^e$ のときの u は

$$u = \begin{cases} 0 & (d_B \text{ の素因子に } \boldsymbol{Q}[\alpha] \text{ で} \\ & \quad \text{分解するものが存在する}) \\ \#\{\boldsymbol{Q}[\alpha] \text{ で分岐しない } d_B \text{ の素因子}\} & (d_B \text{ の任意の素因子は} \\ & \quad \boldsymbol{Q}[\alpha] \text{ で分解しない}) \end{cases}$$

で与えられる．

§6.7 $\boldsymbol{Q}$ 上2次の多元環の order の類数

$\mathfrak{r}$ を $\boldsymbol{Q}[\alpha]$ の order とする．(6.5.6) に現われた $\mathfrak{r}$ の類数 $h(\mathfrak{r})$ を計算する．

補題 6.7.1 p は素数とする．

（1） $K=\boldsymbol{Q}(\sqrt{d})$ は 2 次体で d は K の判別式とする．$\mathfrak{r}_0$ を K の極大 order（全整数環），$\mathfrak{r}$ を K の order とする．$\mathfrak{r}_{0p}=\mathfrak{r}_0\otimes_{\boldsymbol{Z}}\boldsymbol{Z}_p$, $\mathfrak{r}_p=\mathfrak{r}\otimes_{\boldsymbol{Z}}\boldsymbol{Z}_p$ とし $[\mathfrak{r}_{0p}:\mathfrak{r}_p]=p^e$ $(e>0)$ とすると

$$[\mathfrak{r}_{0p}^\times:\mathfrak{r}_p^\times]=p^e\Big(1-\Big(\frac{d}{p}\Big)p^{-1}\Big).$$

（2） $H_p=\boldsymbol{Q}_p\times\boldsymbol{Q}_p$, $\mathfrak{r}_{0p}=\boldsymbol{Z}_p\times\boldsymbol{Z}_p$ とする．$\mathfrak{r}_p$ を K の order とし $[\mathfrak{r}_{0p}:\mathfrak{r}_p]=p^e$ $(e>0)$ とすると

$$[\mathfrak{r}_{0p}^\times:\mathfrak{r}_p^\times]=p^e(1-p^{-1}).$$

（3） $E_p=\boldsymbol{Q}_p[\varepsilon]$, $\varepsilon^2=0$ とする．$\mathfrak{r}_{1p}$, $\mathfrak{r}_{2p}$ を E_p の order とし $\mathfrak{r}_{1p}\supset\mathfrak{r}_{2p}$ $[\mathfrak{r}_{1p}:\mathfrak{r}_{2p}]=p^e$ $(e>0)$ とすると

$$[\mathfrak{r}_{1p}^\times:\mathfrak{r}_{2p}^\times]=p^e.$$

証明 先ず（2）から始める．補題 6.6.1(2) により

$$\mathfrak{r}_p=\boldsymbol{Z}_p+p^e\mathfrak{r}_{0p}=\{(a,\ b)\}\in\mathfrak{r}_{0p}\,|\,a\equiv b\pmod{p^e}\}$$

である．$\mathfrak{r}_{0p}^\times=\boldsymbol{Z}_p^\times\times\boldsymbol{Z}_p^\times$ であるから $\mathfrak{r}_{0p}^\times\ni(a,b)\longmapsto a/b\in\boldsymbol{Z}_p^\times$ により

$$\mathfrak{r}_{0p}^\times/\mathfrak{r}_p^\times\cong(\boldsymbol{Z}/p^e\boldsymbol{Z})^\times$$

である．よって φ を Euler の函数とすると $[\mathfrak{r}_{0p}^\times:\mathfrak{r}_p^\times]=\varphi(p^e)$ である．次に（3）を示す．補題 6.6.1(3) により整数 f が存在して $\mathfrak{r}_{1p}=\boldsymbol{Z}_p-p^f\boldsymbol{Z}_p\varepsilon$, $\mathfrak{r}_{2p}=\boldsymbol{Z}_p+p^{e+f}\boldsymbol{Z}_p\varepsilon$ と書ける．$\mathfrak{r}_{1p}^\times=\pm1+p^f\boldsymbol{Z}_p\varepsilon$, $\mathfrak{r}_{2p}^\times=\pm1+p^{e+f}\boldsymbol{Z}_p\varepsilon$ であるから

$$\mathfrak{r}_{1p}^\times/\mathfrak{r}_{2p}^\times\cong\boldsymbol{Z}_p/p^e\boldsymbol{Z}_p$$

となり $[\mathfrak{r}_{1p}^\times:\mathfrak{r}_{2p}^\times]=p^e$ を得る．最後に（1）を示す．もし p が K で分解すれば $K_p=K\otimes_{\boldsymbol{Q}}\boldsymbol{Q}_p\cong\boldsymbol{Q}_p\times\boldsymbol{Q}_p$ となり（1）に帰着され，p が K で分岐すれば $K_p=K\otimes_{\boldsymbol{Q}}\boldsymbol{Q}_p\cong\boldsymbol{Q}_p[\varepsilon]$ となり（3）に帰着される．$p\mathfrak{r}_{0p}$ が K で素 ideal に留まるとする．補題 6.6.1(1) により $\mathfrak{r}_p=\boldsymbol{Z}_p+p^e\mathfrak{r}_p$ であるから

$$1\longrightarrow\boldsymbol{Z}_p^\times/1+p^e\boldsymbol{Z}_p\longrightarrow\mathfrak{r}_{0p}^\times/\mathfrak{r}_p^\times\longrightarrow\mathfrak{r}_{0p}^\times/(1+p^e\mathfrak{r}_{0p})\longrightarrow1$$

は exact である．よって

$$|\mathfrak{r}_{0p}^\times/(1+p^e\mathfrak{r}_{0p})|=\varphi(p^e\mathfrak{r}_0)=\varphi(p^{2e}),\ |\boldsymbol{Z}_p^\times/(1+p^e\boldsymbol{Z}_p)|=\varphi(p^e)$$

と合わせて補題を得る． （証明終）

定理 6.7.2 $\boldsymbol{Q}[\alpha]$ の order の類数は次の通りである．

（1） $K=\boldsymbol{Q}(\sqrt{d})$ を虚2次体，$\mathfrak{r}_0$ を K の極大 order とする．$\mathfrak{r}$ を K の order で $[\mathfrak{r}_0:\mathfrak{r}]=n$ なるものとすると

$$h(\mathfrak{r})=\frac{h_K n\prod_{p|n}\left(1-\left(\frac{d}{p}\right)p^{-1}\right)}{[\mathfrak{r}_0^\times:\mathfrak{r}^\times]}$$

である．ここで $h_K=h(\mathfrak{r}_0)$ は K の類数である．

（2） $H=\boldsymbol{Q}\times\boldsymbol{Q}$ とし，$\mathfrak{r}$ を K の order で $[\boldsymbol{Z}\times\boldsymbol{Z}:\mathfrak{r}]=n$ なるものとする．このときには $h(\mathfrak{r})=\varphi(n)$ である．ここで φ は Euler の函数である．

（3） $E=\boldsymbol{Q}[\varepsilon]$, $\varepsilon^2=0$ とする．$\mathfrak{r}$ を E の order とすると $h(\mathfrak{r})=1$ である．

証明 定義により

$$h(\mathfrak{r})=|K_A^\times/K^\times\mathfrak{r}_A^\times|=|K_A^\times/K^\times\mathfrak{r}_{0A}^\times|\,|K^\times\mathfrak{r}_{0A}^\times/K^\times\mathfrak{r}_A^\times|$$
$$=h_K|\mathfrak{r}_{0A}^\times/\mathfrak{r}_A^\times|\,|K^\times\cap\mathfrak{r}_{0A}^\times/K^\times\cap\mathfrak{r}_A^\times|^{-1}$$

である．K は虚の2次体であるから $K^\times\cap\mathfrak{r}_{0A}^\times=\mathfrak{r}_0^\times$, $K^\times\cap\mathfrak{r}_A^\times=\mathfrak{r}^\times$ となり，補題6.7.1(1) と合わせて（1）を得る．次に $\mathfrak{r}$ を H のorder とする．$\mathfrak{r}_0=\boldsymbol{Z}\times\boldsymbol{Z}$ とすると（1）と同様に

$$h(\mathfrak{r})=|H_A^\times/H^\times\mathfrak{r}_{0A}^\times|\,|\mathfrak{r}_{0A}^\times/\mathfrak{r}_A^\times|\,|H^\times\cap\mathfrak{r}_{0A}^\times/H^\times\cap\mathfrak{r}_A^\times|^{-1}$$

である．補題 6.6.1(2) により $\mathfrak{r}=\{(a,b)\in\mathfrak{r}_0\,|\,a\equiv b\ (\mathrm{mod}\ n)\}$ がわかるから

$$H^\times\cap\mathfrak{r}_{0A}^\times=H^\times\cap\mathfrak{r}_A^\times=\{(1,1),(-1,-1)\}$$

である．さらに $\mathfrak{r}_{0A}^\times\supset\boldsymbol{Z}_{A+}^\times\times\boldsymbol{Z}_{A+}^\times(\boldsymbol{Z}_{A+}=\prod_p\boldsymbol{Z}_p^\times\times\boldsymbol{R}_+^\times)$ であるから

$$H_A^\times=H^\times\cdot\mathfrak{r}_{0A}^\times$$

である．故に $h(\mathfrak{r})=[\mathfrak{r}_{0A}^\times:\mathfrak{r}_A^\times]$ となり，補題 6.7.1(2) により（2）を得る．最後に $\mathfrak{r}$ が E の order とする．補題 6.6.1(3) により $\mathfrak{r}=\{a+bt\varepsilon\,|\,a,b\in\boldsymbol{Z}\}$ $(t\in\boldsymbol{Q}^\times)$ と書ける．$E_A^\times=\boldsymbol{Q}_A^\times(1+\boldsymbol{Q}_A\varepsilon)$, $E^\times=\boldsymbol{Q}^\times(1+\boldsymbol{Q}\varepsilon)$, $\mathfrak{r}_A^\times=\boldsymbol{Z}_A^\times(1+t\boldsymbol{Z}_A\varepsilon)$ と書けるから

$$h(\mathfrak{r})=|E_A^\times/E^\times\mathfrak{r}_A^\times|$$
$$=|(1+\boldsymbol{Q}_A\varepsilon)/(1+\boldsymbol{Q}\varepsilon)(1+t\boldsymbol{Z}_A\varepsilon)|$$
$$=|\boldsymbol{Q}_A/\boldsymbol{Q}\cdot\boldsymbol{Z}_A|=1$$

となり（3）を得る． （証明終）

注意 h_K については [高木], [Borevich-Shafarevich] 参照． K が虚2次体ならば

$$\mathfrak{r}^\times=\begin{cases}\{\pm1,\ \pm i\} & (K=\boldsymbol{Q}(i),\ \mathfrak{r}:\text{極大 order})\\ \{\pm1,\ \pm e^{\pi i/3},\ \pm e^{2\pi i/3}\} & (K=\boldsymbol{Q}(\sqrt{-3}),\ \mathfrak{r}:\text{極大 order})\\ \{\pm1\} & (\text{それ以外})\end{cases}$$

であることは容易にわかる．

§6.8 tr($\boldsymbol{T}(\boldsymbol{n})$) の最終的な形

$\boldsymbol{Q}[\alpha]$ の order の動く範囲を調べ tr$(T(n))$ の最終的な形を求める． $N=\prod p^\nu$ とおく．先ず $\alpha\in T^e$ の場合から始めよう．

補題 6.8.1 $K=\boldsymbol{Q}(\sqrt{d})$（$d$：$K$ の判別式）を2次体とし， $\mathfrak{r}_0$ を K の極大 order とする． $\alpha\in\mathfrak{r}_0$（$\alpha\notin\boldsymbol{Z}$）とし $f_\alpha(X)=X^2-tX+n$ を α の最小多項式とすると

$$t^2-4n=m^2d \qquad (m：\text{自然数})$$

と書ける．このとき $[\mathfrak{r}_0:\boldsymbol{Z}[\alpha]]=m$ である．

証明 容易に確められるように $\mathfrak{r}_0=\boldsymbol{Z}+\boldsymbol{Z}\delta$, $\delta=\dfrac{d+\sqrt{d}}{2}$ である． $\alpha=n+m\delta$ とすると $t^2-4n=m^2d$ である． $\boldsymbol{Z}[\alpha]=\boldsymbol{Z}[m\delta]$ であるから $[\mathfrak{r}_0:\boldsymbol{Z}[\alpha]]=m$ を得る． （証明終）

$[\mathfrak{r}_0:\mathfrak{r}]=f$ なる $\boldsymbol{Q}(\sqrt{d})$ の order $\mathfrak{r}$ に対して

$$h(f^2d)=h(\mathfrak{r}), \qquad w(f^2d)=|\mathfrak{r}^\times|$$

と定義する．(6.5.3) により $f_\alpha(X)=X^2-tX+n$, $t^2-4n=m^2d$ とおくと，(6.6.3) により

(6.8.1)
$$\sum_{\boldsymbol{Z}[\alpha]\subset\mathfrak{r}} l(\mathfrak{r})h(\mathfrak{r})\sum_{g\in T_A\cap C_A(\alpha,\,\mathfrak{r})//U}\chi(g)^{-1}$$
$$=2^u\sum_{\substack{f|m\\ f>0}}\frac{h(f^2d)}{w(f^2d)}\prod_{p|N}\Bigg(\sum_{\substack{\xi\in\Omega/p^{\nu+\rho}\\ g_\xi\in T_p}}\chi_p(\xi)+\sum_{\substack{\xi\in\Omega'/p^{\nu+\rho}\\ wg_\xi w^{-1}\in T_p}}\chi_p(t-\xi)\Bigg)$$

となる．特に T として $T(n)$ をとると，補題 5.2.2 および (6.5.4), (6.5.6), (6.8.1) により，$\mathrm{ord}_p(f)=\rho$ とすると

(6.8.2)
$$\sum_{\alpha\in T(n)^e//I}\chi(\alpha)^{-1}k(\alpha)l(\alpha)$$

$$= \sum_{\substack{t \\ t^2-4n<0}} 2^u \frac{\eta^{k-1}-\zeta^{k-1}}{\eta-\zeta} \sum_{\substack{f|m \\ f>0}} \frac{h(f^2d)}{w(f^2d)}$$

$$\times \prod_{p|N} \Big[\sum_{\xi\in\Omega/p^{\nu+\rho}} \chi_p(\xi) + \sum_{\xi\in\Omega'/p^{\nu+\rho}} \chi_p(t-\xi) \Big]$$

となる．ここで η, ζ は $X^2-tX+n=0$ の 2 根であり，m は

$$t^2-4n=m^2d \qquad (d \text{ は } \boldsymbol{Q}(\zeta) \text{ の判別式})$$

となる自然数である．また m の約数 f に対して

$$\Omega=\Omega(t,f,p)=\{\xi\in\boldsymbol{Z}_p \mid \xi^2-t\xi+n\equiv 0 \pmod{Nf^2\boldsymbol{Z}_p}\}$$

$$\Omega'=\Omega'(t,f,p)$$

$$=\begin{cases} \{\xi\in\boldsymbol{Z}_p \mid \xi^2-t\xi+n\equiv 0 \pmod{PNf^2\boldsymbol{Z}_p}\} & \left(d\left(\dfrac{m}{f}\right)^2\equiv 0 \pmod{p\boldsymbol{Z}_p}\right) \\ \phi & \left(d\left(\dfrac{m}{f}\right)^2\not\equiv 0 \pmod{p\boldsymbol{Z}_p}\right) \end{cases}$$

である．但し $\xi\in p\boldsymbol{Z}_p$ ならば $\chi_p(\xi)=0$ とする．

次に $\alpha\in T^h$ とする． この場合には補題 6.8.1 と同様の議論で次の補題が成り立つ．

補題 6.8.2 $H=\boldsymbol{Q}\times\boldsymbol{Q}$，$\mathfrak{r}_0=\boldsymbol{Z}\times\boldsymbol{Z}$ とする． $\alpha\in\mathfrak{r}_0-\boldsymbol{Z}$ とし $f_\alpha(X)=X^2-tX+n$ を α の最小多項式とすると

$$t^2-4n=m^2 \qquad (m: \text{自然数})$$

と書ける．このとき $[\mathfrak{r}_0:\boldsymbol{Z}[\alpha]]=m$ である．

この補題により楕円元の場合と同様に，$\mathrm{ord}_p(f)=\rho$ とすると

(6.8.3)
$$\sum_{\boldsymbol{Z}[\alpha]\subset\mathfrak{r}} l(\mathfrak{r})h(\mathfrak{r}) \sum_{g\in T_A\cap C_A(\alpha,\mathfrak{r})//U} \chi(g)^{-1}$$

$$=\sum_{\substack{f|m \\ f>0}} \frac{1}{2}\varphi(f) \prod_{p|N} \Big[\sum_{\substack{\xi\in\Omega/p^{U+\rho} \\ g_\xi\in T_p}} \chi_p(\xi) + \sum_{\substack{\xi\in\Omega'/p^{\nu+\rho} \\ wg_\xi w^{-1}\in T_p}} \chi_p(t-\xi) \Big]$$

と書ける．従って特に $T=T(n)$ ととると補題 5.2.2 および (6.5.4)，(6.5.6)，(6.8.3) により

(6.8.4)
$$\sum_{\alpha\in T(n)^h//\Gamma} \chi(\alpha)^{-1}k(\alpha)l(\alpha)$$

$$= \sum_{\substack{t \\ t^2-4n:\text{平方数} \\ t^2-4n\neq 0}} \frac{\min\{|\eta|,|\zeta|\}^{k-1}}{|\eta-\zeta|} \mathrm{sgn}(\eta)^k \sum_{\substack{f|m \\ f>0}} \frac{1}{2}\varphi(f)$$

$$\times\prod_{p|N}\Big(\sum_{\xi\in\Omega/p^{\nu+\rho}}\chi_p(\xi)+\sum_{\xi\in\Omega'/p^{\nu+\rho}}\chi_p(t-\xi)\Big)$$

ここで η,ζ は $X^2-tX+n=0$ の2根であり，m は各 t に対し $t^2-4n=m^2$ $(m>0)$ で与えられる．また

$$\Omega=\Omega(t,\ f,\ p)=\{\xi\in \boldsymbol{Z}_p\,|\,\xi^2-t\xi+n\equiv 0\pmod{Nf^2\boldsymbol{Z}_p}\}$$

$$\Omega'=\Omega'(t,\ f,\ p)$$

$$=\begin{cases}\{\xi\in\boldsymbol{Z}_p\,|\,\xi^2-t\xi+n\equiv 0\pmod{pNf^2\boldsymbol{Z}_p)}\} & \left(\dfrac{m}{f}\equiv 0\pmod p\right)\\ \phi & \left(\dfrac{m}{f}\equiv 0\pmod p\right)\end{cases}$$

である．χ_p は ξ が p で割り切れるならば $\chi_p(\xi)=0$ とする．

次に $\alpha\in T^p$ とする．η を α の固有値とし $\boldsymbol{Q}[\alpha]$ と $\boldsymbol{Q}[\varepsilon]$ の同型を $\alpha\longmapsto\eta+\varepsilon$ となるように固定し，$\boldsymbol{Q}[\alpha]$ と $\boldsymbol{Q}[\varepsilon]$ を同一視する．$\boldsymbol{Z}[\alpha]$ を含む $\boldsymbol{Q}[\alpha]$ の order は $\mathfrak{r}(m)=\boldsymbol{Z}+\dfrac{1}{m}\boldsymbol{Z}\varepsilon$ $(m=1,\ 2,\ \cdots)$ であり，また

$$|m(\alpha,\ \mathfrak{r}(m)^\times)|=\frac{m}{|\eta|}$$

であることは容易にわかる．$\mathrm{ord}_p(m)=\rho$ と書くと定理6.7.2と(6.6.3)により

$$(6.8.5)\qquad \sum_{\boldsymbol{Z}[\alpha]\subset\mathfrak{r}} l(\mathfrak{r})h(\mathfrak{r})\sum_{g\in T_A\cap C_A(\alpha,\,\mathfrak{r})//U}\chi(g)^{-1}$$

$$=\frac{1}{4}\sum_{m=1}^{\infty}\left(\frac{|\eta|}{m}\right)^{s+1}\sum_{g\in T_A\cap C_A(\alpha,\,\mathfrak{r}(m))//U}\chi(g)^{-1}$$

$$=|\eta|^{s+1}\prod_{p\nmid N}(1-p^{-s-1})^{-1}\prod_{p|N}\sum_{\rho=0}^{\infty}p^{-\rho(s+1)}$$

$$\times\Big[\sum_{\substack{\xi\in\Omega/p^{\nu+\rho}\\ g_\xi\in T_p}}\chi_p(\xi)+\sum_{\substack{\xi\in\Omega'/p^{\nu+\rho}\\ wg_\xi w^{-1}\in T_p}}\chi_p(t-\xi)\Big]$$

となる．ここで $\alpha,\ p,\ \rho$ に対し

$$\Omega=\{\xi\in\boldsymbol{Z}_p\,|\,\xi\equiv\eta\,(\mathrm{mod}\,p^{[(\nu+1)/2]+\rho})\},$$

$$\Omega'=\{\xi\in\boldsymbol{Z}_p\,|\,\xi\equiv\eta\,(\mathrm{mod}\,p^{[\nu/2]+\rho+1})\}$$

である．ここで $T=T(n)$ ととる．n が平方数でなければ $T(n)^p=\phi$ である．n が平方数とし $n=\eta^2$ とおく．χ の conductor を $m_\chi=\prod_p p^e$ と書くと

$$\sum_{\substack{\xi\in\Omega/p^{\nu+\rho}\\ g_\xi\in T(n)_p}}\chi_p(\xi)=\begin{cases}0 & \left(\begin{matrix}(n,\ p)\neq 1\ \text{または}\ (n,\ p)=1\ \text{で}\\ [(\nu+1)/2]+\rho<e\end{matrix}\right)\\ \chi_p(\eta)\,p^{\nu-[(\nu+1)/2]} & (\text{それ以外})\end{cases}$$

$$\sum_{\substack{\xi\in\Omega'/p^{\nu+\rho}\\ wg_\xi w^{-1}\in T(n)_p}}\chi_p(t-\xi)=\begin{cases}0 & \left(\begin{matrix}(n,\ p)\neq 1\ \text{または}\ (n,\ p)=1\\ \text{で}\ [\nu/2]+1+\rho<e\end{matrix}\right)\\ \chi_p(\eta)\,p^{\nu-[\nu/2]-1} & (\text{それ以外})\end{cases}$$

となる．よって

$$\sum_{\alpha\in T(n)^p/\Gamma}\chi(\alpha)^{-1}k(\alpha)\,l(\alpha)$$

$$=\frac{s}{4}\zeta(s+1)\sum_{\eta^2=n}|\eta|^{s+1}\chi(n)\,n^{k/2-1}\prod_{p|N}(p^{\nu-[(\nu+1)/2]-\mu(s+1)}+p^{\nu-[\nu/2]-1-\mu'(s+1)})$$

がわかる．ここで

$$\mu=\max\{0,\ e-[(\nu+1)/2]\},\qquad \mu'=\max\{0,\ e-[\nu/2]-1\}$$

である．以上の議論により

$$(6.8.6)\qquad \lim_{s\to 0}\sum_{\alpha\in T(n)^p/l}$$

$$=\sum_{\eta^2=n}\frac{\chi(\eta)\mathrm{sgn}(\eta)^k}{4}n^{(k-1)/2}\prod_{p|N}(p^{\nu-[(\nu+1)/2]-\mu}+p^{\nu-[\nu/2]-1-\mu'})$$

が得られた．

最後に $\Gamma\backslash H$ の測度が求まれば，計算はすべて完了する．

定理 6.8.3 B は判別式 d_B の $\boldsymbol{Q}$ 上の不定符号の四元数環，R が level が N の B の order とすると

$$v(\Gamma_R\backslash H)=\frac{\pi}{3}N\prod_{p|N}\left(1+\frac{1}{p}\right)\prod_{p|d_B}(p-1)$$

である．

証明 一般に $N=1$ 即ち，R が極大 order の場合には

$$(6.8.7)\qquad v(\Gamma_R\backslash H)=\frac{2\zeta(2)}{\pi}\prod_{p|d_B}(p-1),\qquad \zeta(2)=\frac{\pi^2}{6}$$

であることが知られている．ここでは一般の場合の証明は略する（[土方 2] に述べられる予定）が，特に $d_B=1$，即ち $B=M_2(\boldsymbol{Q})$ の場合には (6.8.7) は定理 4.1.2(2) に外ならない．一般の order については (6.8.7) と補題 5.3.2 によりわかる．（証明終）

最後に $T=T(n)$ の場合に最終的な trace の形を書き表わしておく.

定理 6.8.4 B は判別式 d_B の不定符号の四元数環とし, R は level が N, $(d_B, N)=1$, の B の Eichler 型の order とする. $\Gamma_R=\{\alpha\in R\,|\,\det(\alpha)=1\}$ とする. χ は $\bmod N$ の Dirichlet の指標で, χ の conductor を m_χ とし $m_\chi=\prod_p p^e$, $N=\prod_p p^\nu$ と素因数分解する. $T(n)$は (5.3.3) で定義した Hecke 作用素とし, $\mathrm{tr}(T(n))=\mathrm{tr}(T(n)\,|\,S_k(\Gamma_R, \chi))$ とおくと

$$\mathrm{tr}(T(n))=\chi(\sqrt{n})\frac{k-1}{12}n^{k/2-1}N\prod_{p|N}\left(1+\frac{1}{p}\right)\prod_{p|d_B}(p-1)$$
$$-\sum_t a(t)\sum_f b(t, f)c(t, f)$$

と書ける. ここで

1° $\chi(\sqrt{n})$ は n が非平方数ならば 0 とする.

2° t は "$t^2-4n\neq$正の非平方数" となるすべての整数上を動く. 各 t に対して

$$d=\begin{cases} \boldsymbol{Q}(\sqrt{t^2-4n})\ \text{の判別式} & (t^2-4n<0) \\ 1 & (t^2-4n:\text{平方数}) \\ 0 & (t^2-4n=0) \end{cases}$$

とおく. ζ, η を X^2-tX+n の2根とすると, $a(t)$ は

$$a(t)=\begin{cases} \dfrac{\zeta^{k-1}-\eta^{k-1}}{\zeta-\eta}2^u & (d\neq 0, 1) \\ \dfrac{1}{2}\dfrac{\min\{|\zeta|^{k-1}, |\eta|^{k-1}\}}{|\zeta-\eta|}\mathrm{sgn}(\zeta)^k & (d=1) \\ \dfrac{1}{4}\chi(t/2)\mathrm{sgn}(t)^k n^{(k-1)/2} & (d=0) \end{cases}$$

で与えられる. ここで

$$u=\begin{cases} 0 & \left(d_B\ \text{の素因子に}\left(\dfrac{d}{p}\right)=1\ \text{となるものが存在する}\right) \\ \#\left\{p\,\middle|\ p\,|\,d_B, \left(\dfrac{d}{p}\right)=-1\right\} & \\ & \left(\left(\dfrac{d}{p}\right)=1\ \text{なる}\ d_B\ \text{の素因子は存在しない}\right) \end{cases}$$

である.

3° $d\neq 0$ ならば $t^2-4n=m^2d$ $(m>0)$ とおき，$d=0$ ならば $m=1$ とおく．m の正の約数 f に対して

$$b(t,f)=\begin{cases} h_d f\prod_{p|f}\left(1-\left(\frac{d}{p}\right)p^{-1}\right)\Big/ w_d & (d<0)\\ \varphi(f) & (d=1)\\ 1 & (d=0)\end{cases}$$

である．ただし $d<0$ のときに h_d は $\boldsymbol{Q}(\sqrt{d})$ の類数で w_d は $\boldsymbol{Q}(\sqrt{d})$ の単数の個数すなわち $w_d=4(d=-4)$，$6(d=-3)$，$2(d\neq -4,-3)$ である．

4° N の各素因子 p, m の約数 f に対して

$$\Omega=\Omega(t,f,p)=\{\xi\in\boldsymbol{Z}_p\,|\,\xi^2-t\xi+n\equiv 0 \pmod{Nf^2\boldsymbol{Z}_p}\}$$

$$\Omega'=\Omega'(t,f,p)$$

$$=\begin{cases}\{\xi\in\boldsymbol{Z}_p\,|\,\xi^2-t\xi+n\equiv 0 \pmod{pNf^2\boldsymbol{Z}_p}\} & (d(m/f)^2\equiv 0 \pmod{p})\\ \phi & (d(m/f)^2\not\equiv 0 \pmod{p})\end{cases}$$

とおく．更に $\rho=\mathrm{ord}_p(f)$ とし，$\mu=\max\{0,\ e-[(\nu+1)/2]\}$，$\mu'=\max\{0,\ e-[\nu/2]-1\}$ とおく．このとき

$$c(t,f)=\begin{cases}\prod_{p|N}\left(\sum_{\xi\in\Omega/p^{\nu+\rho}}\chi_p(\xi)+\sum_{\xi\in\Omega'/p^{\nu+\rho}}\chi_p(t-\xi)\right) & (d\neq 0)\\ \prod_{p|N}\left(p^{\nu-[(\nu+1)/2]-\mu}+p^{\nu-[\nu/2]-1-\mu'}\right) & (d=0)\\ 1 & (N=1)\end{cases}$$

である．

注意 1 この章では $k\geqq 3$ と仮定したが，助変数を用いて極限的な考察をすることによって $k=2$ についてもほぼ同様の考察が可能である（[石川] 参照）．但し，そのためには $SL_2(\boldsymbol{R})$ の無限次元の表現論の知識が必要である．また Eichler の 方法による trace の計算によっても $k=2$ の場合が計算出来る（[Eichler 4]，[斎藤]）．いずれにしても $k=2$ の場合にも tr$(T(n))$ が計算出来，もし χ が単位指標でなければ，上式はそのまま成り立ち，χ が単位指標ならば，上式に次の数を付け加える．

$$1\ (N=1),\qquad \prod_{\substack{p|n\\ p|N}}p^a\prod_{\substack{p|n\\ p\nmid N}}\frac{1-p^{a+1}}{1-p}\quad (N\neq 1,\ N=\prod_p p^a).$$

注意 2 $B=M_2(\boldsymbol{Q})$ なら，$\Gamma_R=\Gamma_0(N)$ で $T(n)$ は §4.4 で定義したものである．

以下に定理 6.8.4 を特別な場合，すなわち $B=M_2(\boldsymbol{Q})$, $\Gamma_R=\Gamma_0(N)$, $N=p_1p_2^\nu$ (p_1, p_2 は相異なる奇素数, $\nu\geqq 0$) に適用して $\mathrm{tr}(T(n))=\mathrm{tr}(T(n)|S_k(\Gamma_0(N),\chi))$ のより計算しやすい具体的な式を t_0, t_p, t_h, t_e の順に加えた形で示しておく (定理 6.8.4 から以下の公式を導くことは手ごろな演習問題である). ただし，簡単のため χ は mod p_1 の指標であって $\chi(-1)=(-1)^k$ を満たすものとする．したがって今の場合，定理 6.8.4 を得るための議論において，mod p_2^ν の指標 χ_{p_2} は単位指標をとっていることに注意する．

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{tr}(T(n))\\
&=\chi(\sqrt{n})\frac{k-1}{12}(1+p_1)p_2^{\nu-1}(1+p_2)n^{(k-2)/2}\\
&\quad-\chi(\sqrt{n})n^{(k-1)/2}\times\begin{cases}1 & (\nu=0)\\ p_2^{\nu/2}+p_2^{\nu/2-1} & (\nu=\text{偶数})\\ 2p_2^{(\nu-1)/2} & (\nu=\text{奇数})\end{cases}\\
&\quad-\sum_{i=0}^{\nu}\sum_t{}^{(1)}(\chi(t)+\chi(n/t))t^{k-1}\times\begin{cases}1 & (i=\nu)\\ p_2^{\nu-i}-p_2^{\nu-i-1} & (\nu>i\geqq\nu/2)\\ p_2^{i}-p_2^{i-1} & (0<i<\nu/2)\\ 1 & (i=0)\end{cases}\\
&\quad-\frac{1}{2}\sum_t{}^{(2)}a_k(t)\sum_f{}^{(3)}b(t,f)c_1(t,f)c_2(t,f).
\end{aligned}
$$

この公式は $k\geqq 3$ に対するものであるが，上の注意1の通り，$k=2$ でも χ が単位指標でなければそのままで，またもし χ が単位指標の場合は附加項を上式にさらに加えることによって，それぞれの場合の $\mathrm{tr}(T(n))$ が得られる．ここで，定理で用いた記号以外のものおよび $\sum_t{}^{(1)}$, $\sum_t{}^{(2)}$, $\sum_f{}^{(3)}$ について説明する．まず，$\sum_t{}^{(1)}$ において t ($\in\boldsymbol{Z}$) は

$$t\,|\,n,\qquad 0<t<\sqrt{n}$$

であって

$$t^2-n\equiv 0\begin{cases}(\mathrm{mod}\ p_2^{\nu-i}) & (p_2^i\geqq p_2^{\nu-i})\\ (\mathrm{mod}\ p_2^{i}) & (p_2^i<p_2^{\nu-i})\end{cases}$$

を満たすすべてのものにわたる．次に，$\sum_t{}^{(2)}$ における t ($\in\boldsymbol{Z}$) は

$$t^2-4n<0, \qquad \text{すなわち} \quad -2\sqrt{n}<t<2\sqrt{n}$$

を満たすすべてのものにわたる．また，$X^2-tX+n=0$ の2根 ζ，η に対し

$$a_k(t)=\frac{\zeta^{k-1}-\eta^{k-1}}{\zeta-\eta}$$

とする．従って，$a_2(t)=1$，$a_3(t)=t$，$a_4(t)=t^2-n$，$a_5(t)=t(t^2-2n)$，$a_6(t)=t^4-3nt^2+n^2$，…，$a_{12}(t)=t^{10}-9nt^8+28n^2t^6-35n^3t^4+15n^4t^2-n^5$，… である．次に，$d$ および $\sum^{(3)}$ における正整数 f は定理の 3° で与えられたものである．くわしく書けば，$t^2-4n(<0)$ は

$$t^2-4n=\begin{cases} um^2 \ (u\equiv 1 \pmod 4) \\ 4um^2 \ (u\equiv 2,\ 3 \pmod 4) \end{cases} \quad (u \text{ は平方因子を持たない})$$

のいずれかで表わされるが，このとき各々の場合に $d=u$，$4u$ で f は m の正の約数すべてにわたる．$c_1(t,\ f)$ および $c_2(t,\ f)$ は $c(t,\ f)$ の p_1 成分および p_2 成分である．これは更に具体的には

$$\left\{\frac{df^2}{p_1}\right\}=\begin{cases} 1 & (p_1|f \text{ かつ } d(f/p_1)^2\equiv 0 \text{ または } 1 \pmod 4) \\ \left(\dfrac{df^2}{p_1}\right) & (\text{それ以外}) \end{cases}$$

としたときに

$$c_1(t,\ f)=(\chi(\alpha)+\chi(\beta))\left(1+\left\{\frac{df^2}{p_1}\right\}\right)$$

で与えられる．α，β は $X^2-tX+n\equiv 0 \pmod{p_1}$ の2根であるが，$1+\left\{\frac{df^2}{p_1}\right\}\neq 0$ であれば $\alpha,\ \beta\in \boldsymbol{Z}/(p_1)$ であるから $\chi(\alpha)$，$\chi(\beta)$ は意味をもつ．最後に $\mathrm{ord}_{p_2}(dm^2)=\mu$ とおけば $c_2(t,\ f)$ は μ および $\left(\frac{d}{p_2}\right)$ の符号によって次の表にまとめることが出来る（[ ] はGauss 記号）．

		$\mu=0$	$0<\mu<\nu$	$\mu=\nu$	$\mu>\nu$
$c_2(t,f)$	$\left(\frac{d}{p_2}\right)=1$	2	$2(p_2^{\mu/2}+p_2^{\mu/2-1})$	$p_2^{\nu/2-1}(p_2+2)$	$p_2^{[\frac{\nu}{2}]}+p_2^{[\frac{\nu+1}{2}]-1}$
	$\left(\frac{d}{p_2}\right)\neq 1$	0	0	$p_2^{[\frac{\nu}{2}]}$	$p_2^{[\frac{\nu}{2}]}+p_2^{[\frac{\nu+1}{2}]-1}$

第7章　Hilbert の modular 形式と ζ 函数の整数点での値

§7.1　Hilbert の modular 形式

今まで述べてきた上半平面上の保型形式は種々に拡張される．その一つとして，この章では Hilbert の modular 形式を少し述べ，一変数の modular 形式との関係を考える．g を自然数とし H^g を上半平面 H の g 個の直積

$$H^g=\overbrace{H\times\cdots\times H}^{g}$$

とする．$G=GL_2^+(\boldsymbol{R})^g=GL_2(\boldsymbol{R})\times\cdots\times GL_2(\boldsymbol{R})$ とおく．$\alpha=(\alpha^{(1)},\cdots,\alpha^{(g)})\in G$, $\boldsymbol{z}=(z^{(1)},\cdots,z^{(g)})\in H^g$ に対して

$$\alpha\boldsymbol{z}=(\alpha^{(1)}z^{(1)},\cdots,\alpha^{(g)}z^{(g)})$$

と定義すると，G は H^g に作用している．さて K を g 次の総実な代数体とし $\tau_1,\cdots,\tau_g$ を K から $\boldsymbol{R}$ への同型写像の全体とする．$K^{(\nu)}=K^{\tau_\nu}$ $(1\leqq\nu\leqq g)$ とし $a\in K$ に対して $a^{(\nu)}=a^{\tau_\nu}$ とおく．$\mathfrak{r}$ を K の整数環とする．$M_2(\mathfrak{r})$ の元 $\alpha=\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}$ に対して $\alpha^{(\nu)}=\begin{bmatrix}a^{(\nu)} & b^{(\nu)}\\ c^{(\nu)} & d^{(\nu)}\end{bmatrix}$ と定義すると，$M_2(\mathfrak{r})$ は

$$M_2(\mathfrak{r})\ni\alpha\longmapsto(\alpha^{(1)},\cdots,\alpha^{(g)})\in M_2(\boldsymbol{R})^g$$

によって $M_2(\boldsymbol{R})^g$ の離散部分集合であるから，$SL_2(\mathfrak{r})$ は

$$SL_2(\mathfrak{r})\ni\alpha\longmapsto(\alpha^{(1)},\cdots,\alpha^{(g)})\in SL_2(\boldsymbol{R})^g\subset G$$

なる埋め込みによって G の散散部分群である．従って，$SL_2(\boldsymbol{Z})$ の場合と同様の理由で $SL_2(\mathfrak{r})$ は H^g に不連続に作用する．さて K の元 a が総正であるとは，$a^{(\nu)}>0$ がすべての ν $(1\leqq\nu\leqq g)$ に対して成り立つときにいい，$a\gg 0$ と書き表わす．また $\mathfrak{r}$ の総正な単数全体を $\mathfrak{r}_+^\times$ と書き表わす．さて

$$\Gamma_K=\{\gamma\in M_2(\mathfrak{r})\,|\,\det(\alpha)\in\mathfrak{r}_+^\times\}$$

とおく．Γ_K は自然な埋め込み "$\gamma\longmapsto(\gamma^{(1)},\cdots,\gamma^{(g)})$" により，$G$ の部分群と考えられる．$Z(G)=R^\times\cdot 1\times\cdots\times R^\times\cdot 1$ とし，$Z(\Gamma_K)=\Gamma_K\cap Z(G)$, $Z(SL_2(\mathfrak{r}))=SL_2(\mathfrak{r})\cap Z(G)$ とおく．更に

$$\bar{\Gamma}_K=\Gamma_K/Z(\Gamma_K),\qquad \overline{SL_2(\mathfrak{r})}=SL_2(\mathfrak{r})/Z(SL_2(\mathfrak{r}))$$

とおく．

補題 7.1.1 上の記号と仮定の下に $[\bar{\Gamma}_K:\overline{SL_2(\mathfrak{r})}]<\infty$ である．

証明 $Z(\Gamma_K)=\{\varepsilon\cdot 1\,|\,\varepsilon\in\mathfrak{r}^\times\}$ であるから

$$[\bar{\Gamma}_K:\overline{SL_2(\mathfrak{r})}]=[\Gamma_K:SL_2(\mathfrak{r})\cdot Z(\Gamma_K)]=[\mathfrak{r}_+^\times:(\mathfrak{r}^\times)^2]$$

である．ここで $(\mathfrak{r}^\times)^2=\{\varepsilon^2\,|\,\varepsilon\in\mathfrak{r}^\times\}$ とする．Dirichlet の単数定理により $[\mathfrak{r}_+^\times:(\mathfrak{r}^\times)^2]<\infty$ であるから補題を得る． (証明終)

$SL_2(\mathfrak{r})$ が H^g に不連続に作用するから，$\bar{\Gamma}_K$ も H^g に不連続に作用することがわかる．この Γ_K を **Hilbert modular 群**という．$\alpha\in G$ が放物型であるとは，$\alpha^{(\nu)}$ $(1\leqq\alpha\leqq g)$ が放物型であるときに言う．特に $\gamma=\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}\in\Gamma_K$ が放物型であることは，或る ν について $\gamma^{(\nu)}$ が放物型であることと同値である．$\boldsymbol{x}=(x^{(1)},\cdots,x^{(g)})$ $(x^{(\nu)}\in\boldsymbol{R}^\nu\cup\{\infty\})$ が Γ_K の cusp であるとは，Γ_K の放物型の元 γ が存在して $\gamma\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}$ が成り立つときに言う．明らかに $\boldsymbol{\infty}=(\infty,\cdots,\infty)$ は Γ_K の cusp である．$\lambda\in K$, $\boldsymbol{z}\in H^g$ とするときに

$$\lambda\boldsymbol{z}=(\lambda^{(1)}z^{(1)},\ \cdots,\ \lambda^{(g)}z^{(g)})$$

と定義する．更に便宜上，一般に $\boldsymbol{z}=(z^{(1)},\cdots,z^{(g)})$ $(\in\boldsymbol{C}^g)$ に対して

$$\mathrm{N}(\boldsymbol{z})=\prod_{\nu=1}^{g}z^{(\nu)},\qquad \mathrm{tr}(\boldsymbol{z})=\sum_{\nu=1}^{g}z^{(\nu)}$$

と書き表わす．また K の元 α および K の ideal $\mathfrak{a}$ についても，$\mathrm{N}(\alpha)=\mathrm{N}_K(\alpha)$, $\mathrm{N}(\mathfrak{a})=\mathrm{N}_K(\mathfrak{a})$ と書くことにする．

定義 H^g 上の有理型函数 $F(\boldsymbol{z})$ が Γ_K に関する weight k の (**Hilbert の**) **modular 形式**であるとは，任意の $\gamma=\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}\in\Gamma_K$ にして

$$F(\gamma\boldsymbol{z})\mathrm{N}(c\boldsymbol{z}+d)^{-k}=F(\boldsymbol{z})$$

が成り立つときに言う．ここで $\mathrm{N}(cz+d)=\prod_{\nu=1}^{g}(c^{(\nu)}z^{(\nu)}+d^{(\nu)})$ である．

ε を K の単数とすると $\gamma=\begin{bmatrix}\varepsilon & 0\\ 0 & \varepsilon\end{bmatrix}\in\Gamma_K$ であるから，F が Γ_K に関する modular 形式ならば

$$F(\boldsymbol{z})=\mathrm{N}(\varepsilon)^{-k}F(\boldsymbol{z})$$

となるので，K が norm が -1 の単数を持つならば，Γ_K に関する weight が奇数である modular 形式は恒等的に 0 である．従って以下

(7.1.1)　K が norm が -1 の単数を含むならば，k は偶数である

と仮定する．この k の定め方から kg は常に偶数である．

Γ_K に関する modular 形式は一変数の場合と同様に cusp において Fourier 展開される．話を簡単にするために ∞ における展開をみてみよう．$F(\boldsymbol{z})$ は H^g で正則な Γ_K に関する modular 形式とする．$a\in\mathfrak{r}$ とすると，$\begin{bmatrix}1 & a\\ 0 & 1\end{bmatrix}\in\Gamma_K$ であるから

$$F(\boldsymbol{z}+a)=F(\boldsymbol{z})\qquad(a\in\mathfrak{r})$$

が成り立つ．ここで $\boldsymbol{z}+a=(z^{(1)}+a^{(1)},\cdots,z^{(g)}+a^{(g)})$ である．$\alpha_1,\cdots,\alpha_g$ を $\mathfrak{r}$ の $\boldsymbol{Z}$ 上の基底とし，$\boldsymbol{w}=(w^{(1)},\cdots,w^{(g)})\in H^g$ を

$$z^{(\nu)}=\sum_{\mu=1}^{g}\alpha_\mu^{(\nu)}w^{(\mu)}\qquad(1\leqq\nu\leqq g)$$

とおき，H^g 上の函数 $g(\boldsymbol{w})$ を

$$g(\boldsymbol{w})=F(\boldsymbol{z})$$

と定義すると g は $w^{(\nu)}\longmapsto w^{(\nu)}+1$ なる変換で不変である．よって，$D=\{\boldsymbol{q}=(q_1,\cdots,q_g)\in\boldsymbol{C}^g\,|\,|q_\nu|<1,\ q_\nu\neq0,\ (1\leqq\nu\leqq g)\}$ 上の正則函数 $G(\boldsymbol{q})$ が存在して

$$g(\boldsymbol{w})=G(e^{2\pi iw^{(1)}},\cdots,e^{2\pi iw^{(g)}})\qquad(\boldsymbol{w}\in H^g)$$

と書ける．D は Reinhart 領域であるから，$G(\boldsymbol{q})$ は Laurent 展開が可能で D で広義一様に収束する級数に

$$G(\boldsymbol{q})=\sum_{n_1,\cdots,n_g=-\infty}^{\infty}c_{n_1\cdots n_g}q_1^{n_1}\cdots q_g^{n_g}\tag{7.1.2}$$

と展開される*．もし $n_1, \cdots, n_g$ のうち少なくとも1つが負ならば $c_{n_1\cdots n_g}=0$ となるとき，即ち $G(\boldsymbol{q})$ が $\{\boldsymbol{q}=(q_1, \cdots, q_g)\in \boldsymbol{C}^g \mid |q_\nu|<1\}$ 上の正則函数に拡張されるときに，$F(\boldsymbol{z})$ は ∞ において**正則である**と言う．更に $c_{0,\cdots,0}=0$ ならば，$F(\boldsymbol{z})$ は ∞ において**零点を持つ**と言う．$F(\boldsymbol{z})$ が cusp で正則または零点を持つと言うことは，Γ_K の他の cusp についても同様に定義される．H^g で正則な Γ_K に関する modular 形式 $F(\boldsymbol{z})$ は，Γ_K のすべての cusp でも正則であるときに**正則な modular 形式**と呼ばれる．更に $F(\boldsymbol{z})$ がすべての cusp において零点を持つときに，$F(\boldsymbol{z})$ を一変数の場合と同様に **cusp 形式**と言う．

さて元に戻って $F(\boldsymbol{z})$ は Γ_K に関する modular 形式で H^g では正則なものとすると，(7.1.2) により

$$g(\boldsymbol{w})=\sum_{n_1,\cdots,n_g=-\infty}^{\infty} c_{n_1\cdots n_g} e^{2\pi i(n_1 w^{(1)}+\cdots+n_g w^{(g)})}$$

である．今 $\mathfrak{d}$ を K の共役差積とし $\mathfrak{d}^{-1}$ の $\boldsymbol{Z}$ 上の基底 $\beta_1, \cdots, \beta_g$ を $\alpha_1, \cdots, \alpha_g$ と tr_K に関して双対な基底になるようにとる．このとき

$$[\alpha_\mu^{(\nu)}]^{-1}=[\beta_\nu^{(\mu)}]$$

であるから

$$w^{(\nu)}=\sum_{\mu=1}^{g} \beta_\nu^{(\mu)} z^{(\mu)}=\mathrm{tr}(\beta_\mu \boldsymbol{z})$$

と書ける．よって $\lambda\in\mathfrak{d}^{-1}$ を $\lambda=n_1\beta_1+\cdots+n_g\beta_g$ と書いたときに $c_\lambda=c_{n_1\cdots n_g}$ とおくと

$$F(\boldsymbol{z})=\sum_{\lambda\in\mathfrak{d}^{-1}} c_\lambda e^{2\pi i \mathrm{tr}(\lambda \boldsymbol{z})} \tag{7.1.3}$$

である．ここで $g>1$ と仮定する．ε を総正な $\mathfrak{r}$ の単数とすると，$\begin{bmatrix}\varepsilon & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\in\Gamma_K$ だから

$$F(\varepsilon \boldsymbol{z})=F(\boldsymbol{z})$$

である．よって Laurent 展開の一意性により

$$c_\lambda=c_{\varepsilon\lambda} \tag{7.1.4}$$

が成り立つ．さて L を $(\alpha_\nu^{(1)}, \cdots, \alpha_\nu^{(g)})$, $1\leqq\nu\leqq g$, の生成する $\boldsymbol{R}^g$ の lattice

---

* 多変数函数論の教科書，例えば一松 信，多変数解析函数論（培風館）参照．

とする*．$y^{(\nu)}=\mathrm{Im}(z^{(\nu)})$，$(1\leqq\nu\leqq g)$，を固定したとき，$F(\boldsymbol{z})$ は有界であるから M を $|F(\boldsymbol{z})|<M$ にとる．さて $x^{(\nu)}=\mathrm{Re}(z^{(\nu)})$ とおき，$d\boldsymbol{x}=dx^{(1)}\cdots dx^{(g)}$ とすると

$$c_\lambda=\frac{1}{\sqrt{d_K}}\int_{R^n/L}F(\boldsymbol{z})e^{-2\pi i\,\mathrm{tr}(\lambda\boldsymbol{z})}d\boldsymbol{x}$$

であるから，K の判別式を d_K とすると

$$c_\lambda\leqq\frac{M}{\sqrt{d_K}}e^{2\pi\,\mathrm{tr}(\lambda\boldsymbol{y})},\qquad \boldsymbol{y}=(y^{(1)},\ \cdots,\ y^{(g)})$$

となる．よって (7.1.4) より任意の単数 ε と整数 m に対し

$$c_\lambda\leqq\frac{M}{\sqrt{d_K}}e^{2\pi\,\mathrm{tr}(\varepsilon^m\lambda\boldsymbol{y})}\tag{7.1.5}$$

を得る．ここで λ が負の共役を持つと仮定する．例えば $\lambda^{(1)}<0$ とする．Dirichlet の単数定理により K の単数 ε で $|\varepsilon^{(1)}|>1$, $|\varepsilon^{(\nu)}|<1$ $(\nu>1)$ なるものが存在するから，(7.1.5) において $m\longrightarrow\infty$ とし，$c_\lambda=0$ を得る．従って

$$F(\boldsymbol{z})=c_0+\sum_{\substack{\lambda\in\mathfrak{d}^{-1}\\ \lambda\gg0}}c_\lambda e^{2\pi i\,\mathrm{tr}(\lambda\boldsymbol{z})}$$

と Fourier 展開される．この右辺は H^g 上で広義一様に収束する．これより，$g>1$ ならば modular 形式 $F(\boldsymbol{z})$ は H^g で正則ならば ∞ でも正則であることがわかった．同様の議論で実は $g>1$ ならば Γ_K に関する modular 形式 $F(\boldsymbol{z})$ が H^g で正則ならば，$F(\boldsymbol{z})$ は Γ_K のすべての cusp で正則，即ち正則な modular 形式であることが示される．これは $g=1$ の場合との著しい違いである．Hilbert の modular 形式についても一変数の mobular 形式で得た結果の多く（例えば Hecke 環の理論，Weil の定理等）は拡張されるが，adele 化した方が統一的で簡潔になるのでここでは述べないが，次の節で Hilbert の modular 形式の例として §4.1 で述べた Eisenstein 級数を拡張しその Fourier 展開を調べる．群を adele 化することは，第5章で四元数環の単数群を調べたときにも，また Hecke 作用素の trace を計算するのにも非常に有効であった．

---

*　L が $\boldsymbol{R}^g$ の lattice とは，L が $\boldsymbol{R}^g$ の部分加群で，rank が g である自由加群のときに言う．

adele 化は，それのみならず今まで述べて来た modular 形式の理論を一般の代数体上に拡張する上で重要であり，拡張された moduler 形式（特に cusp 形式）は GL_2 の無限次の表現と密接な関係があることが示される．これについては [Weil 2], [Jacquet–Langlands], [Godement 2] を読まれることをお薦めする．

§7.2 総実な代数体上の Eisenstein 級数

この節では，前節で述べた Hilbert の modular 形式の例として，§4.1 で述べた $SL_2(\boldsymbol{Z})$ の Eisenstein 級数 $E_k(z)$ を拡張し，Hecke が主に考察を始めた Hilbert modular 型の Eisenstein 級数を定義し，それが Hilbert の modular 形式になることを示す．以下前節と同様に K は g 次の総実な代数体とし，$\mathfrak{r}$ を K の整数環，$\mathfrak{d}$ を K の共役差積，d を K の判別式とする．さて k を (7.1.1) を満たす自然数とし，$\mathfrak{a}$ を K の任意の分数 ideal とするときに，§4.1 で述べた $E_k(z)$ を拡張して

$$E_k(\boldsymbol{z};\ \mathfrak{a})=\mathrm{N}(\mathfrak{a})^k \sum_{\substack{(\lambda,\mu)\neq(0,0)\\ \lambda,\mu\in\mathfrak{a}}}{}' \mathrm{N}(\lambda\boldsymbol{z}+\mu)^{-k} \qquad (\boldsymbol{z}\in H^g) \tag{7.2.1}$$

と定義する．ここで $\sum'$ は $\mathfrak{a}\times\mathfrak{a}$ に同値関係～を $(\alpha,\ \beta)\sim(\varepsilon\alpha,\ \varepsilon\beta)$, $(\varepsilon\in\mathfrak{r}^\times)$ によって定義するとき，$(\lambda,\ \mu)$ が $\mathfrak{a}\times\mathfrak{a}/\sim$ の $(0,\ 0)$ 以外の代表系にわたる和を表わす．(7.1.1) により $E_k(\boldsymbol{z};\ \mathfrak{a})$ はこの代表系の選び方によらない．以下に示す通り，$E_k(\boldsymbol{z};\ \mathfrak{a})$ は $k>2$ であれば絶対かつ広義一様に収束し Γ_K に関する weight が k の modular 形式であるが，更に $k=1,\ 2$ の場合も込めて考察するために複素変数 s を用いて

$$E_k(\boldsymbol{z},\ s;\ \mathfrak{a})=\mathrm{N}(\mathfrak{a})^k \sum_{\substack{(\lambda,\mu)\neq(0,0)\\ \lambda,\mu\in\mathfrak{a}}}{}' \mathrm{N}(\lambda\boldsymbol{z}+\mu)^{-k}|\mathrm{N}(\lambda\boldsymbol{z}+\mu)|^{-2s} \tag{7.2.2}$$

とおく．

定理 7.2.1 k を (7.1.1) を満たす自然数とする．

(1) $E_k(\boldsymbol{z},\ s;\ \mathfrak{a})$ は $\{(\boldsymbol{z},\ s)\,|\,\boldsymbol{z}\in H^g,\ \mathrm{Re}(s)>2-k\}$ において広義一様に絶対収束する．更に $\boldsymbol{z}\in H^g$ を固定したときに $E_k(\boldsymbol{z},\ s;\ \mathfrak{a})$ は，s の函数として全平面に解析接続される．$s=0$ では特に正則であり

$$E_k(\boldsymbol{z};\ \mathfrak{a})=E_k(\boldsymbol{z},\ 0;\ \mathfrak{a})$$

とおくと，$g=1$, $k=2$ の場合を除き $E_k(\boldsymbol{z};\ \mathfrak{a})$ は Γ_K に関する正則 modular 形式になる．これを Γ_K に関する Eisenstein 級数と言う．$k\geqq 3$ ならば $E_k(\boldsymbol{z};\ \mathfrak{a})$ は 広義一様に収束する級数 (7.2.1) で与えられる．

（2） $g>1$, $k\geqq 2$ または $g=1$, $k>2$ ならば，$E_k(\boldsymbol{z};\ \mathfrak{a})$ は ∞ において次のように Fourier 展開される．

$$E_k(\boldsymbol{z};\ \mathfrak{a})=\zeta_k(k,\ \mathfrak{a})+\left(\frac{(2\pi i)^k}{(k-1)!}\right)^g d^{1/2-k}\sum_{\substack{\nu\in\mathfrak{d}^{-1}\\ \nu\gg 0}}\sigma_{k-1}(\nu,\ \mathfrak{a})e^{2\pi i\,\mathrm{tr}(\nu\boldsymbol{z})}.$$

ここで右辺の和は $\mathfrak{d}^{-1}$ に含まれる総正な元 ν 全体にわたる．$\zeta(s,\ \mathfrak{a})$, $\sigma_{k-1}(\nu,\ \mathfrak{a})$ は各々

$$\zeta_k(s,\ \mathfrak{a})=\mathrm{N}(\mathfrak{a})^s\sum_{(\mu)\subset\mathfrak{a}}\frac{\mathrm{sgn}(\mathrm{N}(\mu))^k}{|\mathrm{N}(\mu)|^s}$$

$$\sigma_{k-1}(\nu,\ \mathfrak{a})=\sum_{\substack{(\alpha)\\ \nu\in(\alpha)\mathfrak{a}\subset\mathfrak{d}^{-1}}}\mathrm{sgn}(\mathrm{N}(\alpha)^k)\mathrm{N}((\alpha)\mathfrak{a}\mathfrak{d})^{k-1}$$

と表わされる．但し定義において右辺の和は各々与えられた条件を満たす単項 ideal (μ), (α) にわたる．(k に関する仮定 (7.1.1) より $\zeta_k(s,\ \mathfrak{a})$ は意味を持つ.)

注意 1　$\sigma_{k-1}(\lambda,\mathfrak{a})$ は k が偶数の場合には簡単に

$$\sigma_{k-1}(\nu,\mathfrak{a})=\sum_{\substack{\mathfrak{b}\\ \mathfrak{b}\sim\mathfrak{a}\mathfrak{d}\\ \mathfrak{b}\supset\nu\mathfrak{d}}}\mathrm{N}(\mathfrak{b})^{k-1}$$

と表わされる．但し $\mathfrak{b}$ に関する和は $\mathfrak{a}\mathfrak{d}$ と同値な整 ideal $\mathfrak{b}$ であって $(\nu)\mathfrak{d}$ を含むものにわたる．(∵) $\nu\in(\alpha)\mathfrak{a}\subset\mathfrak{d}^{-1}\Longrightarrow(\alpha)\mathfrak{a}\mathfrak{d}=\mathfrak{t}$ とおけば，$\mathfrak{t}$ は整であって $(\nu)\mathfrak{d}\subset\mathfrak{t}$ かつ明らかに $\mathfrak{t}\sim\mathfrak{a}\mathfrak{d}$．逆に，$\mathfrak{t}\sim\mathfrak{a}\mathfrak{d}$, $(\nu)\mathfrak{d}\subset\mathfrak{t}\Longrightarrow\exists\beta\in K^\times$, $\mathfrak{t}=(\beta)\mathfrak{a}\mathfrak{d}$ であって $\nu\in(\beta)\mathfrak{a}\subset\mathfrak{d}^{-1}$.)

注意 2　$k=1$ の場合には常数項を $\zeta_1(1,\ \mathfrak{a})+\frac{1}{\sqrt{d}}\left(\frac{\pi}{i}\right)^g\zeta_1(0,\ \mathfrak{a})$ とすれば成り立つ．また，$g=1$, $k=2$ の場合には $E_k(z;\mathfrak{a})$ は z の正則函数とならない．

証明　T を H^g 内部の任意のコンパクト集合とする．$\boldsymbol{z}=(z^{(1)},\ \cdots,\ z^{(g)})\in T$ に対し，実変数 x, y に関する正定値2次形式 $|xz^{(j)}+y|^2$ ($j=1,\ \cdots,\ g$) を考える．x, y が $x^2+y^2=1$ 上にあれば ${}^\forall z\in T$, ${}^\forall j$ に対し明らかに正定数 κ

が存在して $|xz^{(j)}+y|^2\geqq\kappa>0$, したがって $\forall(x,\ y)\in\boldsymbol{R}\times\boldsymbol{R}$ に対し $|xz^{(j)}+y|^2\geqq\kappa(x^2+y^2)$ $(j=1,\ \cdots,\ g)$. ゆえに, $k+\mathrm{Re}(2s)>0$ であれば

$$|\mathrm{N}(\lambda z+\mu)|^{-k-2s}\leqq\kappa^{-(k+\mathrm{Re}(2s))g/2}\mathrm{N}(\lambda^2+\mu^2)^{-(k+\mathrm{Re}(2s))/2} \tag{7.2.3}$$

である. α を $\mathfrak{a}^{-1}$ に含まれる 0 でない元とすると, $\alpha\mathfrak{a}\subset\mathfrak{r}$ であるから

$$|E_k(z,\ s;\ \mathfrak{a})|\leqq\mathrm{N}(\mathfrak{a})^k\kappa^{-(k+\mathrm{Re}(2s))g/2}\sideset{}{'}\sum_{\substack{(\lambda,\mu)\neq(0,0)\\ \lambda,\mu\in\mathfrak{a}}}\mathrm{N}(\lambda^2+\mu^2)^{-(k+\mathrm{Re}(2s))/2}$$

$$\leqq C_1\mathrm{N}(\mathfrak{a})^k\kappa^{-(k+\mathrm{Re}(2s))g/2}\sideset{}{'}\sum_{\substack{(\lambda,\mu)\neq(0,0)\\ \lambda,\mu\in\mathfrak{r}}}\mathrm{N}(\lambda^2+\mu^2)^{-(k+\mathrm{Re}(2s))/2}$$

となる. ここで $K_1=K(i)$ とおき, $\mathfrak{r}_1$ を K_1 の整数環とする. $\lambda,\ \mu\in K$ ならば $\mathrm{N}_{K_1}(\lambda+\mu i)=\mathrm{N}(\lambda^2+\mu^2)$ であり, 単数群 $\mathfrak{r}_1^\times$ と $\mathfrak{r}^\times$ の rank は等しいから $[\mathfrak{r}_1^\times:\mathfrak{r}_2^\times]<\infty$ であることに注意すると, C_2 (>0) を適当にとると

$$\leqq C_2\mathrm{N}(\mathfrak{a})^k\kappa^{-(k+\mathrm{Re}(2s))g/2}\sum_{(\xi)\subset\mathfrak{r}_1}\mathrm{N}_{K_1}(\xi)^{-(k+\mathrm{Re}(2s))/2}$$

となり $E_k(z,\ s;\ \mathfrak{a})$ の収束性は K_1 の Dedekind の ζ 函数 $\zeta_{K_1}(s)$ の収束性に帰着される. §3.3 で見たように, $\zeta_{K_1}(s)$ は任意の δ (>0) に対して $\mathrm{Re}(s)\geqq1+\delta$ で一様に絶対収束するから, $E_k(z,\ s;\ \mathfrak{a})$ は $z\in T$ で $\mathrm{Re}(2s)\geqq2-k+\delta$ ならば, z および s に関して一様に絶対収束する. 特に $k>2$ ならば $s=0$ のとき, 即ち (7.2.1) は H^g において広義一様に収束し, z に関して正則である. 次に s に関する $E_k(z,\ s;\ \mathfrak{a})$ の解析接続を考察するために, (7.2.2) の右辺の和を $\mathrm{Re}(2s)>2-k$ の下で

$$\sideset{}{'}\sum_{\substack{(\lambda,\mu)\neq(0,0)\\ \lambda,\mu\in\mathfrak{a}}}=\sum_{\substack{(\mu)\in\mathfrak{a}\\ \mu\neq0\\ \lambda=0}}+\sum_{\substack{(\lambda)\in\mathfrak{a}\\ \lambda\neq0}}\sum_{\mu\in\mathfrak{a}}=\sum\nolimits_1+\sum\nolimits_2 \tag{7.2.4}$$

と分割する. ここで $\sum_{(\lambda)\in\mathfrak{a},\ \lambda\neq0}$ は, $\mathfrak{a}$ に含まれる 0 以外の単項 ideal (λ) 上の和である. 先ず

$$\sum\nolimits_1=\mathrm{N}(\mathfrak{a})^k\sum_{\substack{(\mu)\subset\mathfrak{a}\\ \mu\neq0}}\frac{\mathrm{sgn}(\mathrm{N}\mu)^k}{|\mathrm{N}(\mu)|^{k+2s}} \tag{7.2.5}$$

である. 次に $\lambda\in\mathfrak{a}$ を固定したとき, $\boldsymbol{R}^g$ 上の函数 f を

$$f(\boldsymbol{u})=\mathrm{N}(\lambda z+\boldsymbol{u})^{-k}|\mathrm{N}(\lambda z+\boldsymbol{u})|^{-2s}\qquad(\boldsymbol{u}=(u^{(1)},\cdots,u^{(g)})\in\boldsymbol{R}^g)$$

と定義すると, $\sum_2$ において各 λ に対して μ に関する和は $\sum_{\mu\in\mathfrak{a}}f(\mu)$ と表わ

される．$\mathfrak{a}$ は $\mathfrak{a}\ni\mu\longmapsto(\mu^{(1)},\cdots,\mu^{(g)})\in\boldsymbol{R}^g$ により $\boldsymbol{R}^g$ の部分加群とみて $\boldsymbol{R}^g$ の lattice であるので，(7.2.3) から $\sum_{\mu\in\mathfrak{a}}f(\boldsymbol{u}+\mu)$ は $\boldsymbol{R}^g$ で一様収束することがわかる．従って Poisson の和公式が適用できて，$\mathfrak{a}$ と $(\mathfrak{a}\mathfrak{d})^{-1}$ が trace に関し双対 lattice になることから

$$\sum_{\mu\in\mathfrak{a}}f(\mu)=\frac{1}{\mathrm{N}(\mathfrak{a})\sqrt{d}}\sum_{\alpha\in(\mathfrak{a}\mathfrak{d})^{-1}}\hat{f}(\alpha)$$

を得る．ここで $\hat{f}$ は f の Fourier 変換を表わす．$\boldsymbol{t}=(t^{(1)},\cdots,t^{(g)})\,(\in\boldsymbol{R}^g)$ 対して

$$(7.2.6)\qquad \hat{f}(\boldsymbol{t})=\frac{\mathrm{sgn}(\mathrm{N}(\lambda))^k}{|\mathrm{N}(\lambda)|^{2s+k-1}}\sum_{j=1}^{g}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{2\pi i\lambda^{(j)}t^{(j)}}}{(z^{(i)}+v)^k|z^{(i)}+v|^{2s}}dv$$

であるから

(7.2.7)

$$\sum\nolimits_2=\frac{\mathrm{N}(\mathfrak{a})^k}{\mathrm{N}(\mathfrak{a})\sqrt{d}}\sum_{\substack{(\lambda)\in\mathfrak{a}\\ \lambda\neq0}}\sum_{\alpha\in(\mathfrak{a}\mathfrak{d})^{-1}}\frac{\mathrm{sgn}(\mathrm{N}(\lambda))^k}{|\mathrm{N}(\lambda)|^{2s+k-1}}\prod_{j=1}^{g}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{2\pi iv\lambda^{(j)}\alpha^{(j)}}}{(z^{(i)}+v)^k|z^{(i)}+v|^{2s}}dv$$

となる．$k\geqq3$ ならば，$s=0$ でも (7.2.2) は意味を持っていたので，ここで $E_k(\boldsymbol{z};\,\mathfrak{a})$ の Fourier 展開を調べておこう．そこで，$z\in\boldsymbol{C}$, $\mathrm{Im}(z)>0$ に対して（複素積分の容易な練習問題*）

$$\int_{-\infty}^{\infty}e^{2\pi icv}(z+v)^{-k}dv=\begin{cases}0 & (c\geqq0\ \text{の場合})\\[2mm] \dfrac{2\pi e^{-\pi ik/2}}{\Gamma(k)}(-2\pi c)^{k-1}e^{-2\pi icz} & (c<0\ \text{の場合})\end{cases}$$

を用いれば，(7.2.7) から直ちに

$$(7.2.8)\qquad E_k(\boldsymbol{z},0;\,\mathfrak{a})=E_k(\boldsymbol{z};\,\mathfrak{a})$$
$$=\zeta(k,\mathfrak{a})+\frac{(2\pi i)^{kg}\mathrm{N}(\mathfrak{a})^{k-1}}{((k-1)!)^g\sqrt{d}}(-1)^{(k-1)g}$$

---

* $c\geqq0$ の場合は直接に v に関する複素積分として実軸を含む下半大円上で積分すればよい．$c<0$ の場合は Γ-函数の **Hankel** の公式と呼ばれる

$$\frac{2\pi}{\Gamma(s)}=\int_{-\infty}^{\infty}e^{a+iu}(a+iu)^{-s}du\qquad(a>0,\ \mathrm{Re}(s)>0)$$

から直ちに導かれる．この表示については例えば，Whittaker-Watson, A course of modern analysis (Cambridge Univ. Press 1920) § 12.22 Example 1. 参照．

$$\times\sum_{\substack{(\lambda)\in\mathfrak{a}\\ \lambda\neq 0}}{}' \sum_{\substack{\alpha\in(\mathfrak{a}\mathfrak{d})^{-1}\\ \lambda\alpha\ll 0}} \frac{(\operatorname{sgn} \mathrm{N}(\lambda))^k}{|\mathrm{N}(\lambda)|^{k-1}}\cdot \mathrm{N}(\lambda)^{k-1}\cdot \mathrm{N}(\alpha)^{k-1}\cdot e^{2\pi i \operatorname{tr}(-\lambda\alpha z)}$$

を得る．ここで，$(-1)^{(k-1)g}\mathrm{N}(\lambda)^{k-1}=\mathrm{N}(-\lambda)^{k-1}$，$\lambda\alpha\gg 0 \Longrightarrow \operatorname{sgn}(\mathrm{N}(\lambda))=\operatorname{sgn}(\mathrm{N}(\alpha))$ に注意して上式右辺を書きなおせば

$$E_k(z;\ \mathfrak{a})=\zeta(k,\ \mathfrak{a})+\frac{(2\pi i)^{kg}\mathrm{N}(\mathfrak{a})^{k-1}}{((k-1)!)^g\sqrt{d}}$$
$$\times\sum_{\substack{(\lambda)\in\mathfrak{a}\\ \lambda\neq 0}}{}' \sum_{\substack{\alpha\in(\mathfrak{a}\mathfrak{d})^{-1}\\ \lambda\alpha\gg 0}} \operatorname{sgn}(\mathrm{N}(\alpha))\mathrm{N}(\alpha)^{k-1}e^{2\pi i \operatorname{tr}(\lambda\alpha z)}$$

となる（第二項の和は代表 λ の選び方によらないことに注意されたい，それは任意の単数 ε に対し，$\lambda\alpha\gg 0 \Longrightarrow \lambda\alpha=\lambda\varepsilon\cdot\varepsilon^{-1}\alpha\gg 0$ から容易にみられる）．さらに，$\mathrm{N}(\alpha)=\operatorname{sgn}(\mathrm{N}(\alpha))\mathrm{N}((\alpha))$ から直ちに（2）の展開を得る．

次に一般の k に対して $E_k(z,\ s;\ \mathfrak{a})$ を全 s 平面に解析接続しよう．そのために (7.2.7) の右辺を更に $\alpha=0$ と $\alpha\neq 0$ に分解すると，$\mathrm{Re}(2s)>2-k$ において

(7.2.9) $E_k(z,\ s;\ \mathfrak{a})$

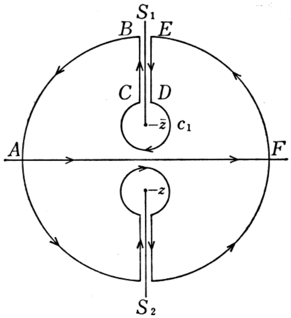
$$=\mathrm{N}(\mathfrak{a})^k\sum_{(\mu)\subset\mathfrak{a}}\frac{\operatorname{sgn}(\mathrm{N}(\mu))^k}{|\mathrm{N}(\mu)|^{k+2s}}$$
$$+\frac{\mathrm{N}(\mathfrak{a})^{k-1}\prod_{j=1}^{g}J_k(s;\ z^{(j)},\ 0)}{\left(\prod_{j=1}^{g}y^{(j)}\right)^{k+2s-1}\sqrt{d}}\sum_{\substack{(\lambda)\subset\mathfrak{a}\\ \lambda\neq 0}}\frac{\operatorname{sgn}(\mathrm{N}(\lambda))^k}{|\mathrm{N}(\lambda)|^{k+2s-1}}$$
$$+\frac{\mathrm{N}(\mathfrak{a})^{k-1}}{\sqrt{d}}\sum_{\substack{(\lambda)\subset\mathfrak{a}\\ \lambda\neq 0}}\sum_{\substack{\alpha\in(\mathfrak{a}\mathfrak{d})^{-1}\\ \alpha\neq 0}}\frac{\operatorname{sgn}(\mathrm{N}(\lambda))^k}{|\mathrm{N}(\lambda)|^{k+2s-1}}\prod_{j=1}^{g}J_k(s;\ z^{(j)},\ \lambda^{(j)}\alpha^{(j)})$$

が成り立つ．ここで $y^{(j)}=\mathrm{Im}(z^{(j)})$ $(1\leqq j\leqq g)$ であり，$w\in\boldsymbol{R}$, $z\in H$, $\mathrm{Re}(2s)>2-k$ に対し，J は

$$J_k(s;\ z,\ w)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{2\pi i wv}dv}{(z+v)^k|z+v|^{2s}}$$

と定義される．さて $J_k(s;\ z^{(j)},\ w)$ を調べよう．見易くするために $z^{(j)}$ を z と書き，上半平面上の点を表わす．U を $\boldsymbol{C}$ の 1 つの compact 集合とし，$s\in U$ とする．z_0 を上半平面上の 1 点とし，z を $|z-z_0|\leqq\mathrm{Im}(z_0)/3$ なる点とする．先ず $J_k(s;\ z,\ w)$ の積分の内部の函数において，v を複素数の範囲にまで拡

張する．複素平面において $-\bar{z}$ から虚軸に平行に $i\infty$ に至る半直線を S_1, $\bar{z}$ から虚軸に平行に $-i\infty$ に至る半直線を S_2 とする（図参照）．



$\log(z+v)$ および $\log(\bar{z}+v)$ を，

$$-\frac{\pi}{2}<\arg(z+v)<\frac{3}{2}\pi \quad (v\notin s_2), \qquad -\frac{3}{2}\pi<\arg(\bar{z}+v)<\frac{\pi}{2} \quad (v\notin s_1)$$

と定めると，$\boldsymbol{C}-S_1-S_2$ で一価函数であるから，$v\in\boldsymbol{C}-S_1-S_2$ に対して

$$(z+v)^{k+s}=e^{(k+s)\log(z+v)}, \qquad (\bar{z}+s)^s=e^{s\log(\bar{z}+v)}$$

と定義する．ここで $w\geqq 0$ と仮定すると，図の記号を用いて

$$J_k(s;\ z,\ w)=\lim_{\substack{A\to-\infty\\ F\to\infty}}\int_A^F\frac{e^{2\pi iwv}dv}{(z+v)^{k+s}(\bar{z}+v)^s}$$

と書けるが，Cauchy の定理と被積分函数の $|v|\longrightarrow\infty$ のときの評価により

$$(7.2.10)\qquad J_k(s;\ z,\ w)=-\left[\lim_{E\to\infty}\int_E^D+\lim_{B\to\infty}\int_C^B+\int_{c_1}\right]$$

となる．ここで c_1 は $-\bar{z}$ を中心とする円である．

もし更に $w\neq 0$ ならば（すなわち $w>0$ ならば），c_1 の半径を $\delta=\mathrm{Im}(z_0)/3$ ととると，$\delta<\mathrm{Im}(z)/2$ だから

$$\begin{aligned}|J_k(s;\ z,\ w)|&\leqq\left(2\lim_{B\to\infty}\int_C^B+\int_{c_1}\right)\frac{|e^{2\pi iwv}|\,|dv|}{|(z+v)^{k+s}|\,|(\bar{z}+v)^s|}\\&\leqq M_1e^{-2\pi w(\mathrm{Im}(z)+\delta)}+M_2e^{-2\pi w(\mathrm{Im}(z)-\delta)}\\&\leqq Me^{-\pi w\,\mathrm{Im}(z)}\end{aligned}$$

である．ここで M_1, M_2, M は $s\in U$ および z（$|z-z_0|\leqq\mathrm{Im}(z_0)/3$）に無関係

な定数である．$w<0$ ならば上半平面の代わりに下半平面をとって

$$|J_k(s;\ z,\ w)|\leqq Me^{-\pi|w|\mathrm{Im}(z)}$$

なる評価を得る．よって (7.2.9) の第3項は

$$M\cdot\frac{N(\mathfrak{a})^{k-1}}{\sqrt{d}}\sum_{\substack{(\lambda)\in\mathfrak{a}\\ \lambda\neq 0}}{}'\frac{\mathrm{sgn}(N(\lambda))^k}{|N(\lambda)|^{k+2s-1}}\sum_{\substack{\alpha\in\mathfrak{a}\mathfrak{d}^{-1}\\ \alpha\neq 0}}\exp\left(-\pi\sum_{i=1}^{g}|\mathrm{Im}\lambda_i\alpha_i z|\right)$$

を優級数としてもつ．これは $s\in\boldsymbol{C}$ および $z\in H^g$ に関し広義一様に収束するから，(7.2.9) の第3項は s に関する正則函数であり，$s=0$ とすると z に関する正則函数である．この級数は $s=0$ の時に意味を持ったからその Fourier 展開は $k\geqq 3$ の時と全く同じにして得られる．最後に第2項を調べることが残っている．$J_k(s,\ z,\ 0)$ を計算しよう．今 s を $0<\mathrm{Re}(s)<1$ に制限しておき，(7.2.10) において円 c_1 の半径を0に近づけると，$\int_{c_1}$ は0に近づくので

$$J_k(s;\ z,\ 0)=-\left\{\lim_{\substack{E\to i\infty\\ D\to-\bar{z}}}\int_E^D+\lim_{\substack{B\to i\infty\\ C\to-\bar{z}}}\int_C^B\frac{dv}{(z+v)^{k+s}(\bar{z}+v)^s}\right\}$$

であるが，簡単な計算で

$$=-i^{2-k}2^{2-k-2s}\sin(\pi s)\int_0^1(1-t)^{k-2+2s}t^{-s}dt$$

$$=-i^{2-k}2^{2-k-2s}\sin(\pi s)\frac{\Gamma(k-1+2s)\Gamma(1-s)}{\Gamma(k+s)}$$

$$=\begin{cases} i^{-k}\sqrt{\pi}\left(s+\dfrac{k-2}{2}\right)\left(s+\dfrac{k-3}{2}\right)\cdots s\dfrac{\Gamma\left(s+\dfrac{1}{2}\right)}{\Gamma(s+1)} & (k\geqq 2)\\[2ex] i^{-1}\sqrt{\pi}\dfrac{\Gamma\left(s+\dfrac{1}{2}\right)}{\Gamma(s+1)} & (k=1)\end{cases}$$

となる．従って任意の s に対し，$J_k(s;\ z,\ 0)$ をこの式で定義すれば

$$\zeta_k(s,\ \mathfrak{a})=\sum_{(\mu)\in\mathfrak{a}}\frac{\mathrm{sgn}(\mathrm{N}(\mu))^k}{|\mathrm{N}(\mu)|^{k+2s-1}}$$

は全平面に解析接続されるから，(7.2.9) の第2項も全 s 平面に解析接続される．$k=1,\ 2$ のときの正則性を調べてみよう．$k=2$ ならば $\zeta_2(s,\ \mathfrak{a})$ は $s=0$ で1位の極を持つが，$J_k(s;\ z,\ 0)$ が零点を持つので $E_2(z,\ s;\ \mathfrak{a})$ は $s=0$ で正則である．もし $g>1$ ならば (7.2.9) の第2項は0になるが，$g=1$ なら

ば $y=\mathrm{Im}(z)$ に関する項が現われるので $E_2(z;\mathfrak{a})$ は正則ではない．$k=1$ のときには $\zeta_k(s,\mathfrak{a})$ は $s=0$ で正則であるから*，$E_1(z,s;\mathfrak{a})$ は $s=0$ で正則で (7.2.9) の第2項は $s=0$ としたとき定数となって $E_1(z;\mathfrak{a})=E_1(z,0;\mathfrak{a})$ は正則である．最後に $E_k(z;\mathfrak{a})$ の保型性を調べよう．$E_k(z,s;\mathfrak{a})$ は定義により $\mathrm{Re}(s)>2-k$ において

$$E_k(\gamma z,s;\mathfrak{a})\mathrm{N}(cz+d)^{-k}|\mathrm{N}(cz+d)|^{-2s}$$
$$=E_k(z,s;\mathfrak{a}) \qquad \left(\gamma=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d\end{bmatrix}\in\Gamma_K\right)$$

を満たすから，$s=0$ においてもこの等式は意味を持つ．$g=1$ で $k=2$ の場合を除き $E_k(z;\mathfrak{a})$ は H^g で正則であるから，weight k の正則な modular 形式である． （証明終）

§7.3 ζ 函数の値 (Eisenstein 級数の応用)

さて Eisenstein 級数 $E_k(z;\mathfrak{a})$ は，1次元の場合と同様に定数項に Dirichlet 級数 $\zeta_k(s,\mathfrak{a})$ の整数値における値 $\zeta_k(k,\mathfrak{a})$ を含んでいた．K を代数体とし $\zeta_K(s)$ を K の Dedekind の ζ 函数とすると，$\zeta_K(s)$ の特殊値，とくに s を有理整数とするときの値は整数論の研究対象の中にしばしば現われるので重要であり，その値の具体的決定は非常に興味がもたれる（$\zeta_K(s,\mathfrak{a})$ と $\zeta_K(s)$ の関係は §7.5 で述べる）．例えば，すでに既述の Hecke 作用素の trace の公式において，不連続群 Γ の体積 (volume) は $\zeta_{\mathbf{Q}}(2)=\pi^2/6$ を含んでいた．このことはより一般の不連続群についても同様であって，その商空間の体積は自然に $\zeta_K(s)$ の特殊値によって表わされる．また，§7.5 でも $\zeta_K(s)$ の有理整数における値が重要な役割りを果たすこれとは別の1例を与える．なお，$\lim_{s\to1}(s-1)\zeta_K(s)$ が K の類数公式において本質的であることは周知の事実である（これに関しては [Hasse], [Siegel] 等を参照されたい）．

さて，$\zeta_K(s)$ の $s=k$（有理整数）$\geqq 2$ における値（言うまでもなく，函数等式によって $s=1$ を除けば任意の有理整数における値ということと同じである）

---

* 定理 3.3.1 また §7.4 も参照.

について，既知の事実をまとめておく．まず，$g=1$ ($K=\boldsymbol{Q}$) の場合，すなわち Riemann の ζ-函数 $\zeta(s)=\zeta_{\boldsymbol{Q}}(s)$ については，k を偶数とすれば Bernoulli 数 B_k を用いて

$$\zeta(k)=-(2\pi i)^k B_k/2(k!) \qquad (k=2,\ 4,\ 6,\ 8,\ \cdots)$$

と表わされた (定理 3.2.2)．これは古典的結果である (偶数値の場合に比して，奇数値 (>1) に対する $\zeta(s)$ の値はあまりよく知られていない．例えば [Grosswald] 参照)．Bernoulli 数に関する性質 (von-Staudt-Clausen の定理 (p. 317 参照)，Kummer の定理等) については [Borevich, Shafarevich, Chap. 5] を参照されたい．なお，この $\zeta(k)$ の B_k による表示の類似として，[Hurwitz p. 338〜373] は $\sum_{r,s}(r+si)^{-4n}=(2\omega)^{4n}E_n/(4n)!$ ($n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$) を示した．ここで左辺の和は同時には 0 をとらないすべての有理整数 $r,\ s$ にわたり，右辺の $\omega,\ E_n$ については，

$$\omega=2\int_0^1(1-x^4)^{-1/2}dx=\frac{1}{2}\int_0^1 u^{-3/4}(1-u)^{-1/2}du$$
$$=\left\{\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)\right\}^2\Big/4\sqrt{\pi}=2.62205756\cdots$$

であり，E_n はこの ω できまる Weierstrass の $\wp$-函数

$$\wp(z)=\frac{1}{z^2}+\sum_{(r,s)\neq(0,0)}\left\{\frac{1}{(z-(r+is)\omega)^2}-\frac{1}{((r+is)\omega)^2}\right\} \qquad (z\in\boldsymbol{C})$$

について，$\wp(z)-z^{-2}$ の $z=0$ における Taylor 展開

$$\wp(z)=\frac{1}{z^2}+\frac{2^4E_1}{4}\cdot\frac{z^2}{2!}+\cdots+\frac{2^{4n}E_n}{4n}\cdot\frac{z^{4n-2}}{(4n-2)!}+\cdots$$

の係数で与えられる．

また，χ を $\bmod m$ で定義される原始的な Dirichlet の指標とすると，$k\equiv\delta_\chi \pmod 2$ となる自然数 k については $L(k,\chi)$ の値が求められることを述べた (定理 3.3.4)．このことから特に $K/\boldsymbol{Q}$ が abel 拡大である場合には，$\zeta_K(s)$ を類体論によって適当な Dirichlet の L 函数の積に分解すること* によって，適当な自然数 k については $\zeta_K(k)$ が求められるわけである．一方，上述の拡

* 例えば [Weil] XIII Th. 10 参照．

張とは別の観点から [Hecke, 20] は $g=2$, K が実2次体の場合，次の事実を示した．$k(\geqq 2)$ を自然数，ただし K の基本単数 ε について $N\varepsilon=-1$ の場合は k は偶数とする．そのとき，$\zeta_K(k)/(\pi^{2k}\sqrt{d_K})\in\boldsymbol{Q}$ である．この結果はさらに [Klingen] によって，任意の総実な代数体 K (g は任意) の場合に拡張された．すなわち，$k(\geqq 2)$ を自然数，ただし K が $N\varepsilon=-1$ である単数 ε を含む場合は k は偶数とする．そのとき，$\zeta_K(k)/(\pi^{gk}\sqrt{d_K})\in\boldsymbol{Q}$ である．さて，次節 §7.4 で述べる [Siegel] の結果は，この $\zeta_K(k)$ の "有理数部分" $\zeta_K(k)/\pi^{gk}\sqrt{d_K}$ を既知の一変数保型形式の Fourier 係数を用いて具体的に "有限の形" に表わす方法を与えるものである．即ち前節で考察した Hilbert modular 群 Γ_K に関する Eisenstein 級数 $E_k(\boldsymbol{z};\mathfrak{a})$ は，∞ における Fourier 展開の定数項に $\zeta_k(k,\mathfrak{a})$ をもっていた．今 $\boldsymbol{z}$ として特に $z^{(1)}=\cdots=z^{(g)}=z$ なるものをとり

$$h_k(z;\mathfrak{a})=E_k(\boldsymbol{z};\mathfrak{a})$$

とおくと，$h_k(z;\mathfrak{a})$ は容易にわかるように，$SL_2(\boldsymbol{Z})$ に関する weight が kg である正則な modular 形式である．従って §4.1 の結果から

$$h_k(z;\mathfrak{a})=c_1E_{kg}(z)+c_2f(z)\qquad (f\in S_{kg}(SL_2(\boldsymbol{Z})))$$

と書ける．$E_{kg}(z)$ の常数項は $2\zeta(kg)$ であったから，c_1 が求まれば $\zeta_K(k,\mathfrak{a})$ がわかるのである．$SL_2(\boldsymbol{Z})$ については $G_k(SL_2(\boldsymbol{Z}))$ の生成元がわかっていたから，原理的には c_1 は求められる．以下において実際にこの c_1 を求めるための Siegel の巧妙な方法を紹介する．

そのために，一変数の保型形式に戻って $k(\geqq 4)$ を偶数とし，$\Gamma(1)=SL_2(\boldsymbol{Z})$ と書く．§4.1 と同様に

$$G_k(z)=\frac{1}{2\zeta(k)}E_k(z)=1+\frac{(2\pi i)^k}{\zeta(k)(k-1)!}\sum_{n=1}^{\infty}\sigma_{k-1}(n)e^{2\pi inz}$$

とおく．$\zeta(k)=-(2\pi i)^kB_k/(2\cdot k!)$ であり，B_k は

$$B_4=\frac{-1}{30},\quad B_6=\frac{1}{42},\quad B_8=\frac{-1}{30},\quad B_{10}=\frac{5}{66},\quad B_{14}=\frac{7}{6}$$

となるので，$q=e^{2\pi iz}$ とおくと

$$G_4(z)=1+240\sum_{n=1}^{\infty}\sigma_3(n)q^n,\qquad G_6(z)=1-504\sum_{n=1}^{\infty}\sigma_5(n)q^n,$$

$$(7.3.1)\qquad G_8(z)=1+480\sum_{n=1}^{\infty}\sigma_7(n)q^n,\qquad G_{10}(z)=1-264\sum_{n=1}^{\infty}\sigma_9(n)q^n,$$

$$G_{14}(z)=1-24\sum_{n=1}^{\infty}\sigma_{13}(n)q^n$$

である．これらの係数はすべて整数であることに注意する．また便宜上 $G_0(z)=1$ とおく．以降 k を固定し，$r=\dim G_k(\Gamma(1))$ とおく．系 4.1.4 により

$$r=\begin{cases}\left[\dfrac{k}{12}\right]+1 & (k\not\equiv 2 \pmod{12})\\[2ex] \left[\dfrac{k}{12}\right] & (k\equiv 2 \pmod{12})\end{cases}$$

であったから，$l=k-12r+12$ とおくと $l=0,\ 14,\ 4,\ 6,\ 8,\ 10$ であり $\dim G_l(\Gamma(1))=1$ である．よって

$$(7.3.2)\qquad G_4^2(z)=G_8(z),\qquad G_l(z)G_{14-l}(z)=G_{14}(z)$$

が成り立つ．また $\dim G_k(\Gamma(1))=\dim G_{k-l}(\Gamma(1))$ であるから，$G_{k-l}(\Gamma(1))$ と $G_k(\Gamma(1))$ は

$$G_{k-l}(\Gamma(1))\ni f(z)\longmapsto f(z)G_l(z)\in G_k(\Gamma(1))$$

によって同型である．$\Delta(z)\in S_{12}(\Gamma(1))$ は H で零点を持たなかったので

$$T_k(z)=G_{14-l}(z)\Delta(z)^{-r}$$

とおくと，$T_k(z)$ は H 上で正則な $A_{2-k}(\Gamma(1))$ の元で，$\Delta(z)=q\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^n)^{24}$ であるから

$$(7.3.3)\qquad T_k(z)=c_{k,r}q^{-r}+\cdots+c_{k,1}q^{-1}+c_{k,0}+\cdots$$

なる Fourier 展開を持ち，$c_{k,r}=1$ で

$$c_{k,j}\in \boldsymbol{Z}\qquad (0\leqq j\leqq r)$$

であることがわかる．

定理 7.3.1 (**Siegel**) $\{c_{k,j}\}_{j=0}^{r}$ を (7.3.3) で定義される整数とすると $c_{k,0}\neq 0$ である．更に任意の $f(z)\in G_k(\Gamma(1))$ を $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nq^n$ と展開すると

$$c_{k,0}a_0+\cdots+c_{k,r}a_r=0$$

が成り立つ．

証明　$J(z)$ は H 上では正則で ∞ においては $J(z)=q^{-1}+\cdots$ なる展開を持ったから，$\mathfrak{R}=\mathfrak{R}_{\Gamma(1)}$ 上の微分 $J^m dJ$ $(m=0,1,2\cdots)$ は，∞ に対応する点 $\boldsymbol{a}_\infty=\pi(\infty)$ では位数 $m+2$ の極を持ち，それ以外の点では正則である．今 ω を $\mathfrak{R}$ 上の微分で $\boldsymbol{a}_\infty$ 以外では正則なものとすると，$\deg(\mathrm{div}(\omega))=-2$ であるから，$\boldsymbol{a}_\infty$ では位数が 2 または 2 より大きい極を持つ．ω の $\boldsymbol{a}_\infty$ における極の位数を $n+2$ とすると $b_n, b_{n-1}, \cdots, b_0\in\boldsymbol{C}$ が存在して $\omega-(b_nJ^ndJ+\cdots+b_0dJ)$ は $\boldsymbol{a}_\infty$ 以外の点では正則で $\boldsymbol{a}_\infty$ では高々位数が 1 の極である．従って

$$\omega=b_nJ^ndJ+\cdots+b_0dJ \tag{7.3.4}$$

が成り立つ．さて $f(z)T_k(z)$ は $A_2(\Gamma(1))$ の元で H 上では正則であるから，対応する $\mathfrak{R}$ 上の微分 $f(z)T_k(z)dz$ を上の ω ととることが出来て

$$f(z)T_k(z)=b_nJ^n(z)\frac{dJ(z)}{dz}+\cdots+b_0\frac{dJ(z)}{dz}\qquad(b_j\in\boldsymbol{C}) \tag{7.3.5}$$

が成り立つ．ところで定義より $c_{k,0}a_0+\cdots+c_{k,r}a_r$ は $f(z)T_k(z)$ を ∞ において Fourier 展開（q に関する展開）した定数項であるが，一方

$$J^m(z)\frac{dJ(z)}{dz}=\frac{2\pi iq}{l+1}\frac{d(J(z)^{m+1})}{dq}\qquad(m=0,1,\cdots)$$

であるから，$J^m(z)\dfrac{dJ(z)}{dz}$ の q に関する展開における定数項は 0 であるので，定理の後半を得る．

次に $c_{k,0}\neq0$ を示そう．先ず $k\equiv2\pmod 4$ とする．$l\equiv k\pmod{12}$ であるから $l=14,6,10$，即ち $14-l=0,8,4$ である．$G_0(z)$, $G_8(z)$, $G_4(z)$ の Fourier 展開の係数は (7.3.1) により全部正であり，$\Delta^{-r}(z)$ の Fourier 展開の係数も，すべて正であるから $c_{k,j}$ $(0\leqq j\leqq r)$ はすべて正である．特に $c_{k,0}\neq0$ である．次に $k\equiv0\pmod 4$ の場合を考えよう．このときには $l=0,4,8$ であるから $l=4t$ $(t=0,1,2)$ とおく．さて $G_{14}(z)\Delta^{-1}(z)dz$ は $\boldsymbol{a}_\infty$ では 2 位の極を持ち，$\mathfrak{R}_\Gamma$ 上の $\boldsymbol{a}_\infty$ 以外の点では正則な微分と考えられるから，(7.4.4) より $c\neq0$ が存在して

$$G_{14}(z)\Delta^{-1}(z)=c\frac{dJ(z)}{dz}$$

が成り立つので

$$T_k = cG_{14-l}\Delta G_{14}^{-1}\Delta\frac{dJ}{dz}$$

$$= cG_l^{-1}\Delta^{1-r}\frac{dJ}{dz} = cG_4^{-t}\Delta^{1-r}\frac{dJ}{dz}$$

であるが, $J(z)=G_4(z)^3/\Delta(z)$ であるから

$$= c\Delta^{1-r-t/3}J^{-t/3}\frac{dJ}{dz}$$

$$= \frac{3c}{3-t}\Delta^{1-r-t/3}\frac{d(J^{1-t/3})}{dz}$$

$$= \frac{3c}{3-t}\frac{d(G_4^{3-t}\Delta^{-r})}{dz} + \frac{(3r+t-3)c}{(t-3)r}G_4^{3-t}\frac{d(\Delta^{-r})}{dz}$$

となる. $d(G_4^{3-t}\Delta^{-r})/dz=(2\pi i)qd(G^{3-t}\Delta^{-r})/dq$ であるから, 第1項の q に関する展開における常数項は 0 である. また $k>2$ であるから, $3r+t-3>0$ となるので G_4^{3-t} の展開の係数はすべて正である. 更に $d(\Delta^{-r})/dz=(2\pi i)q\cdot d(\Delta^{-r})/dq$ であって, $qd(\Delta^{-r})/dq$ の展開に現われる q の負巾の項の係数はすべて負で, 定数項は 0 であるから, $c_{k,0}\neq 0$ である. (証明終)

注意 定理 7.3.1 の $f(z)$ として特に $G_k(z)$ を適用すれば,

$$\frac{c_{k,0}\ B_k}{2k} = \sum_{l=1}^{r} c_{k,l}\ \sigma_{k-1}(l), \qquad \sigma_{k-1}(l) = \sum_{t \mid l} t^{k-1} \qquad (k=4,6,\cdots)$$

を得る. 任意の j に対して $c_{k,j}\in \boldsymbol{Z}$ であるから $B_k/2k$ の分母, よって特に B_k の分母は, $c_{k,0}$ を割りきらなければならない. 一方 B_k に関する von–Staudt–Clausen の定理 (例えば [Borevich-Shafarevich] 参照) "$k\geqq 2$ を偶数とするとき

$$B_k \equiv -\sum_p \frac{1}{p} (\mathrm{mod}\ \boldsymbol{Z}).$$

ただし和における p は素数であって $p-1$ が k を割りきるものすべてにわたる" から B_k の分母の素因数 p は $p-1|k$ のものに限る. したがって $c_{k,0}$ の素因数にはこの p が必ず現われる. 例えば $c_{24,0}=-2^9\cdot 3^2\cdot 5^3\cdot 7\cdot 13$, 一方 $p-1|24$ となる p は 2, 3, 5, 7, 13 であり, $B_{24}=-236364091/2\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot 13$ である. ただし $c_{k,0}$ の素因子はこの p に限るわけではない. 例えば $c_{26,0}=2^3\cdot 3^2\cdot 17$ であるが, $B_{26}=13\cdot 657931/2\cdot 3$ である.

§7.4 総実な代数体の ζ 函数 (Siegel の定理)

さて再び K を総実な体とし §7.1 の記号を用いる. 以下 $g=1$, $k>2$ また

は $g>1$, $k\geqq 2$ とする．$E_k(z;\mathfrak{a})$ において z を $z^{(1)}=z^{(2)}=\cdots=z^{(g)}=z$ ととり

$$h_k(z;\mathfrak{a})=E_k(z;\mathfrak{a})$$

とおくと $h_k(z;\mathfrak{a})\in G_{kg}(\Gamma(1))$ であり，$f(z)$ の ∞ における Fourier 展開を

$$h_k(z;\mathfrak{a})=\sum_{n=0}^{\infty}b_n e^{2\pi inz}$$

とすると，その係数は定理 7.2.1 より

$$b_0=\zeta_k(k;\mathfrak{a}),$$

$$b_n=\left(\frac{(2\pi i)^k}{(k-1)!}\right)^g d_k{}^{1/2-k}\sum_{\substack{\nu\gg 0\\ \nu\in\mathfrak{d}^{-1}\\ \mathrm{tr}(\nu)=n}}\sigma_{k-1}(\nu,\mathfrak{a})\qquad(n\geqq 1)$$

である．ここで簡単のために

$$(7.4.1)\qquad s_n(k,\mathfrak{a})=\sum_{\substack{\nu\gg 0\\ \nu\in\mathfrak{d}^{-1}\\ \mathrm{tr}(\nu)=n}}\sigma_{k-1}(\nu,\mathfrak{a})$$

とおくと，$\sigma_{k-1}(\nu,\mathfrak{a})$ の定義により $s_n(k,\mathfrak{a})$ は整数であり

$$(7.4.2)\qquad s_n(k,\mathfrak{a})=\sum_{(\alpha)}\mathrm{sgn}(\mathrm{N}(\alpha)^k)\mathrm{N}((\alpha)\mathfrak{a}\mathfrak{d})^{k-1}$$

と表わされる．ここで右辺の和は $\alpha\in(\mathfrak{a}\mathfrak{d})^{-1}$ であり $(\mathfrak{a}\mathfrak{d})^{-1}\ni\nu$, $\nu\gg 0$, $\mathrm{tr}(\nu)=n$ なる ν と $\beta\in\mathfrak{a}$ が存在して，$\nu=\alpha\beta$ となるような単項 ideal (α) の上にわたる．

以上の記号を用いて，定理 7.3.1 をこの $h_k(z;\mathfrak{a})$ に適用する．(kg は (7.1.1) の仮定から常に偶数である．)

定理 7.4.1　定理 7.2.1 および定理 7.3.1 の記号を用いる．$r=\dim G_{kg}(\Gamma(1))$ とすると

$$(7.4.3)\qquad ((k-1)!)^g(2\pi i)^{-kg}d_K^{k-1/2}\zeta_k(k,\mathfrak{a})=-c_{kg,0}^{-1}\sum_{m=1}^{r}c_{kg,m}s_m(k,\mathfrak{a})$$

が成り立つ．

注意　(7.4.1) から明らかに $\pi^{-kg}\,d^{k-1/2}\,\zeta(k,\mathfrak{a})\in\boldsymbol{Q}$ であり，その分母の因子は高高 $((k-1)!)^g c_{kg,0}$ に含まれる．さらに $c_{kg,0}$ は定義から kg のみによって定まる整数であって，拡大体 $K/\boldsymbol{Q}$ にはよらない．

系 7.4.2 K を任意の総実な代数体，ただし $[K:\boldsymbol{Q}]=g\geqq 2$ とする．このとき，r を

$$r=\begin{cases}\left[\dfrac{g}{6}\right]+1 & (g\not\equiv 1 \pmod 6)\\ \left[\dfrac{g}{6}\right] & (g\equiv 1 \pmod 6)\end{cases}$$

とすれば，K の任意の ideal 類の中に

$$1\leqq N(\mathfrak{t})\leqq (r/g)^g d_K$$

を満たす整 ideal $\mathfrak{t}$ が存在する．

注意 $d=d_k$ の下からの評価式として，この不等式と，Minkowski の定理：$d\geqq (g^g/g!)^2$ ([高木5章] 参照) とを比べれば，大きな g に対しては後者が，小なる g に対しては前者がそれぞれより良い評価を与えることがわかる．

証明 系 4.1.4 において $k=2g$ とすれば

$$r=\begin{cases}\left[\dfrac{g}{6}\right]+1 & (g\not\equiv 1 \pmod 6)\\ \left[\dfrac{g}{6}\right] & (g\equiv 1 \pmod 6)\end{cases}$$

である．$g>1$ とすれば，定理 7.5.1 の等式において $\zeta_2(2,\mathfrak{a})>0$ であるから左辺は 0 ではない．ゆえに右辺の $s_m(2,\mathfrak{a})$, $m=1, 2, \cdots, r$ がすべて 0 ということはない．すなわち，$\alpha\in(\mathfrak{a}\mathfrak{d})^{-1}$, $\beta\in\mathfrak{a}$, $\alpha\beta\gg 0$, $\mathrm{tr}(\alpha\beta)\leqq r$ となる K の元 α, β が存在する．よって，整 ideal $\mathfrak{t}, \mathfrak{v}$ が存在して

$$(\alpha)=(\mathfrak{a}\mathfrak{d})^{-1}\mathfrak{t},\qquad (\beta)=\mathfrak{a}\mathfrak{v},$$

$$\mathfrak{t}\mathfrak{v}\mathfrak{d}^{-1}=(\nu),\qquad \nu\gg 0,\qquad \mathrm{tr}(\nu)\leqq r$$

となる．したがって

$$d^{-1}\mathrm{N}(\mathfrak{t}\mathfrak{v})=\mathrm{N}(\mathfrak{t}\mathfrak{v}\mathfrak{d}^{-1})=\mathrm{N}(\nu)\leqq (g^{-1}\mathrm{tr}(\nu))^g\leqq (r/g)^g$$

すなわち

$$1\leqq N(\mathfrak{t})\leqq N(\mathfrak{t}\mathfrak{v})\leqq (r/g)^g d.$$

$\mathfrak{a}$ は K の任意の ideal であったから，系の結果を得る． (証明終)

次に定理 7.4.1 を用いて具体的な例について $\zeta_k(k,\mathfrak{a})$ を実際に計算してみよう．その前に $\zeta_k(s,\mathfrak{a})$ と K の ζ 函数および L 函数との関係を調べてお

く．I を K の ideal 群とし，P, P_+ を各々 K の単項 ideal 全体，K の norm が正であるような元で生成される単項 ideal の全体とする．即ち

$$P=\{(\alpha)\mid\alpha\in K^\times\},\qquad P_+=\{(\alpha)\in P\mid \mathrm{N}(\alpha)>0\}$$

とすると，定義から直ちに

$$[P:P_+]=\begin{cases}2 & (K\text{ は }\mathrm{N}(\varepsilon)=-1\text{ なる単数 }\varepsilon\text{ を持たない})\\ 1 & (K\text{ は }\mathrm{N}(\varepsilon)=1\text{ なる単数 }\varepsilon\text{ を持つ})\end{cases}$$

である．k が (7.1.1) を満たす自然数ならば，$\zeta_k(s,\mathfrak{a})$ は $\mathfrak{a}$ の属する I/P_+ の同値類によって決まり，更に $(\alpha)\in P$ ならば

$$\zeta_k(s,\mathfrak{a}(\alpha))=\mathrm{sgn}(\alpha)^k\zeta_k(s,\mathfrak{a})$$

である．今 Hecke の指標 χ が特に I/P_+ の指標で

(7.4.4)　$$\chi((\alpha))=\mathrm{sgn}(\alpha)^k\qquad((\alpha)\in P)$$

なるものとすると

(7.4.5)　$$L(s,\chi)=\sum_{\mathfrak{a}\in I/P}\chi(\mathfrak{a})^{-1}\zeta_k(s,\mathfrak{a})$$

が成り立つ．逆に $\zeta_k(s,\mathfrak{a})$ は (7.4.4) を満たす Hecke の指標 χ を持つ Hecke の L 函数 $L(s,\chi)$ の 1 次結合で書けることは明らかであろう．このことから特に

(7.4.6)　$\zeta_k(s,\mathfrak{a})$ は k が奇数ならば全平面で正則である

ことがわかる．また k を偶数とすると，(7.4.5) は

$$\zeta_K(s)=\sum_{\mathfrak{a}\in I/P}\zeta_k(s,\mathfrak{a})$$

と書き表わされる．以上の考察より，k が偶数ならば $\zeta_K(k)$ の値が求まるのである．さて実例を計算する用意としてまず，(7.3.3) で定めた $c_{k,j}$ の値を用意する（ここで，(7.4.3) の右辺に必要な $c_{kg,0}, c_{kg,m}$ $(m=1,2,\cdots,r)$ については (7.3.3) において k としては kg で，$r=r_{kg}$ であることに注意する）．特に，$c_{kg,r}$ は 1 である．

$c_{4,0}=-240=-2^4\cdot 3\cdot 5$

$c_{6,0}=504=2^3\cdot 3^2\cdot 7$

$c_{8,0}=-480=-2^5\cdot 3\cdot 5$

$c_{10,0}=264=2^3\cdot 3\cdot 11$

$c_{12,0}=-196560=-2^4\cdot 3^3\cdot 5\cdot 7\cdot 13$

$c_{12,1}=24=2^3\cdot 3$

$c_{14,0}=24=2^3\cdot 3$

$c_{16,0}=-146880=-2^6\cdot 3^3\cdot 5\cdot 17$

$c_{16,1}=-216=-2^3\cdot 3^3$

$c_{18,0}=86184=2^3\cdot 3^4\cdot 7\cdot 19$

$c_{18,1}=528=2^4\cdot 3\cdot 11$

$c_{20,0}=-39600=-2^4\cdot 3^2\cdot 5^2\cdot 11$

$c_{20,1}=-456=-2^3\cdot 3\cdot 19$

$c_{22,0}=14904=2^3\cdot 3^4\cdot 23$

$c_{22,1}=288=2^5\cdot 3^2$

$c_{24,0}=-52416000=-2^9\cdot 3^2\cdot 5^3\cdot 7\cdot 13$

$c_{24,1}=-195660=-2^2\cdot 3^2\cdot 5\cdot 1087$

$c_{24,2}=48=2^4\cdot 3$

$c_{26,0}=1224=2^3\cdot 3^2\cdot 17$

$c_{26,1}=48=2^4\cdot 3$

$c_{28,0}=-15590400=-2^{10}\cdot 3\cdot 5^2\cdot 7\cdot 29$

$c_{28,1}=-151740=-2^2\cdot 3^3\cdot 5\cdot 281$

$c_{28,2}=-192=-2^6\cdot 3$

$c_{30,0}=6874560=2^6\cdot 3^2\cdot 5\cdot 7\cdot 11\cdot 31$

$c_{30,1}=99180=2^2\cdot 3^2\cdot 5\cdot 19\cdot 29$

$c_{30,2}=552=2^3\cdot 3\cdot 23$

$c_{32,0}=-2611200=-2^{11}\cdot 3\cdot 5^2\cdot 17$

$c_{32,1}=-50220=-2^2\cdot 3^4\cdot 5\cdot 31$

$c_{32,2}=-432=-2^4\cdot 3^3$

$c_{34,0}=880320=2^6\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot 131$

$c_{34,1}=22140=2^2\cdot 3^3\cdot 5\cdot 41$

$c_{34,2}=312=2^3\cdot 3\cdot 13$

$c_{36,0}=-6218175600=-2^4\cdot 3^5\cdot 5^2\cdot 7\cdot 13\cdot 19\cdot 37$

$c_{36,1}=-57093088=-2^5\cdot 13\cdot 71\cdot 1933$

$c_{36,2}=-194184=-2^3\cdot 3^3\cdot 29\cdot 31$

$c_{36,3}=72=2^3\cdot 3^2$

上の $c_{k,j}$ の値は，$k\leqq 26$ については [Siegel 3] により，$k>26$ については，その定義 (7.3.3) にしたがって，市川尚美氏が（電子計算機の使用により）計算したものである．

例 1 $K=\boldsymbol{Q}(\sqrt{5})$ とする．従って，$\mathfrak{d}=(\sqrt{5})$，$d=5$，$g=[K:\boldsymbol{Q}]=2$ である．以下 $\mathrm{N}=\mathrm{N}_K$，$\mathrm{tr}=\mathrm{tr}_K$ と書く．K の類数は 1 であるから k が偶数ならば

$$\zeta_K(k)=\zeta(k,\mathfrak{r})$$

である．ここで $k=12$ とする．$kg=24$ であるから $r=3$ である．$c_{24,3}=1$ であるから

$$\zeta_K(12)=\zeta_{12}(12,\mathfrak{r})=\sum_{\mathfrak{a}\subset\mathfrak{r}}N(\mathfrak{a})^{-12}$$

$$=\frac{-(2\pi)^{24}}{(11!)^2\ c_{24,0}\ d^{23/2}}(c_{24,1}s_1(12,\mathfrak{r})+c_{24,2}s_2(1,2\mathfrak{r})+s_3(12,\mathfrak{r}))$$

$$=\frac{\pi^{24}}{2\cdot 3^{10}\cdot 5^7\cdot 7^3\cdot 11^2\cdot 13\cdot 5^{11}\sqrt{5}}(-195660s_1(12,\mathfrak{r})+48s_2(12,\mathfrak{r})+s_3(12,\mathfrak{r})).$$

次に $s_i=s_i(12,\mathfrak{r})$ $(i=1,2,3)$ を求める．$\mathfrak{d}^{-1}=(\sqrt{5})^{-1}\ni\nu$，$\nu\gg 0$ かつ $\mathrm{tr}(\nu)=1,2,3$ となる ν は，$\nu=(a+b\sqrt{5})/2\sqrt{5}$，$a,b\in\boldsymbol{Z}$，$a\equiv b\pmod 2$ とおけば，容易に $(\pm 1+\sqrt{5})/2\sqrt{5}$，$(a+\sqrt{5})/\sqrt{5}\,(a=0,\pm 1,\pm 2)$，$(a+3\sqrt{5})/2\sqrt{5}\,(a=\pm 1,\pm 3,\pm 5)$ で与えら

れることがわかる．そこで定理 7.4.1 の等号の右辺の和にうつって，まず s_1 についてみる．$\mathrm{tr}(\nu)=\mathrm{tr}(\alpha\beta)=1$ から $\alpha\beta=(1+\sqrt{5})/2\sqrt{5}$，$(-1+\sqrt{5})/2\sqrt{5}$．$(\pm 1+\sqrt{5})/2$ は K の単数であるから $(\alpha)=(1/\sqrt{5})$ に対し，例えば $\alpha=1/\sqrt{5}$，$\beta=(1+\sqrt{5})/2$ および $(-1+\sqrt{5})/2$ だけが s_1 の和に寄与する．ゆえに，$s_1=2\cdot 1^{11}=2$．s_2 について；$\nu=\alpha\beta=(a+\sqrt{5})/\sqrt{5}\,(a=0,\pm 1,\pm 2)$ において，$a=0$ については $\alpha=1/\sqrt{5}$，$\beta=\sqrt{5}$ および $\alpha=1$，$\beta=1$ である．$a=\pm 1$ のとき $\pm 1+\sqrt{5}$ は自明な分解以外に整数の積に分解しないから，α，β の組 (α,β) は $(1/\sqrt{5},\ 1+\sqrt{5})$，$((1+\sqrt{5})/\sqrt{5},\ 1)$，$(1/\sqrt{5},\ -1+\sqrt{5})$，$((-1+\sqrt{5})/\sqrt{5},\ 1)$ である．$a=\pm 2$ については，$\pm 2+\sqrt{5}$ が単数であるから，$(\alpha)=(1/\sqrt{5})$，$\beta=\pm 2+\sqrt{5}$ である．ゆえに，$s_2=1^{11}+5^{11}+2\,(1^{11}+4^{11})+2\cdot 1^{11}=57216738$．$s_3$ も上と同様の方法で，$s_3=2(1^{11}+11^{11})+2(1^{11}+9^{11})+2(1^{11}+5^{11})=633483116696$．

以上から

$$\zeta_K(12)=\frac{2^4\cdot 691\cdot 1150921\pi^{24}}{3^{10}\cdot 5^{16}\cdot 7^3\cdot 11^2\cdot 13\sqrt{5}}$$

を得る．

例 2　$K=\boldsymbol{Q}(\zeta+\zeta^{-1})$，$\zeta=e^{2\pi i/7}$ の場合．このとき $g=3$，$d=7^2$．よって系 7.5.2 により K の類数は 1 である．$\mathfrak{r}$ を K の整数環とする．$k=2$ として，$\zeta(2,\mathfrak{r})=\zeta_K(2)$ を求める．まず，$\rho=2-\zeta-\zeta^{-1}=(1-\zeta)(1-\zeta^{-1})$ とおけば，$[1,\rho,\rho^2]$ が $\mathfrak{r}$ の一つの $\boldsymbol{Z}$-基底であり，$\mathrm{N}(\rho)=7$，$(\rho^3)=(7)$．したがって $\mathfrak{d}=(\rho^2)$ である．この場合 $kg=6$，$r=1$ を定理 7.5.1 に適用して，$s_1=s_1(2,\mathfrak{r})$ とおくと

$$\zeta_K(2)=\sum_{(\mu)\subset\mathfrak{r}}N(\mu^{-2})=\frac{(2\pi)^6}{c_{6,0}d^{3/2}}s_1=\frac{8\pi^6}{63d\sqrt{d}}s_1.$$

次に s_1 を計算する．そのために $\nu\in\mathfrak{d}^{-1}$ を

$$\nu=x+y\rho^{-1}+z\rho^{-2}\qquad(x,y,z\in\boldsymbol{Z})$$

とおいて，$\mathrm{tr}(\nu)=1$，$\nu\gg 0$ を満たす解 (x,y,z) を求める．$\rho^3=7(\rho-1)^2$ であり，$\mathrm{tr}(\rho^{-1})=2$，$\mathrm{tr}(\rho^{-2})=2$ である．したがって

$$\mathrm{tr}(\nu)=3x+2y+2z=1.$$

そこで $x=1+2u\,(u\in\boldsymbol{Z})$ とおけば，$y=-1-z-3u$．$\nu\gg 0\iff\rho^2\nu\gg 0$ であるから，ν の右辺に代入して

$$(2\rho^2-3\rho)u+(1-\rho)z+\rho^2-\rho\gg 0.$$

ここで $\lambda_j=\zeta^j+\zeta^{-j}=2\cos(2j\pi/7)\ (j=1,2,3)$ とおけば，

$$1<\lambda_1<3/2$$
$$-1/2<\lambda_2<0$$
$$-2<\lambda_3<-3/2$$

であるから $1-\rho=\lambda_1-1>0$，$\lambda_2-1<0$，$\lambda_3-1<0$．さらに，$3\rho-2\rho^2=(1-\rho)(\lambda_2+5)$ に

注意して

$$\rho^2\nu \gg 0 \Longleftrightarrow \begin{cases} z+\lambda_1-2>(\lambda_2+5)u \\ z+\lambda_2-2<(\lambda_3+5)u \\ z+\lambda_3-2<(\lambda_1+5)u \end{cases} \Longrightarrow \frac{\lambda_3-\lambda_1}{\lambda_1-\lambda_2}=\lambda_3<u<\frac{\lambda_1-\lambda_2}{\lambda_2-\lambda_3}=\lambda_1$$

を得る．上の右の不等式から u のとりうる値は 0, ±1．しかし，$u=1$ とすると中間の不等式から $5<\lambda_2-\lambda_1+7<z<\lambda_3-\lambda_2+7<6$ となり矛盾．$u=0$ ($\Longrightarrow 2-\lambda_1<z<2-\lambda_2<2-\lambda_3$) $\Longrightarrow z=1$, $y=-2$, $x=1$ または $z=2$, $y=-3$, $x=1$．$u=-1$ ($\Longrightarrow \lambda_3-2<z<\lambda_2-2<\lambda_1-2$) $\Longrightarrow z=-3$, $y=5$, $x=-1$．はじめの解から $\nu=(\rho-1)^2\cdot\rho^{-2}$ であり，他の 2 解から ν の共役元を得る．$(\rho-1)^2$ は K の単数であるから，$(\nu)\mathfrak{d}=\mathfrak{r}$．したがって，定理 7.2.1 の後の注意 1 によって，この場合 $\mathfrak{t}=\mathfrak{r}$．故に，$s_1=3$．結局

$$\zeta_K(2)=\frac{8\pi^6\cdot 3}{63\cdot 49\sqrt{49}}=\frac{2^3\cdot\pi^6}{3\cdot 7^4}.$$

例 3 $K=\boldsymbol{Q}(\theta)$, θ は 3 次方程式 $f(X)=X^3+aX+b=0$ の一根とする．このとき，よく知られているように，$f'(\theta)=3\theta^2+a\in\mathfrak{d}$ であって，とくに $d(\theta)=-\mathrm{N}(f'(\theta))$ が平方因子を含まなければ $d(\theta)=d$ であり，$[1,\theta,\theta^2]$ が $\mathfrak{r}$ の $\boldsymbol{Z}$-基底を与える．さらに容易な計算によって，$f'(\theta)^{-1}=d(\theta)^{-1}(-6a\theta^2+9b\theta-4a^2)\in\mathfrak{d}^{-1}$ である．ここで，$a=-4$, $b=1$ としてみよう．すなわち，$K=\boldsymbol{Q}(\theta)$, θ は 3 次方程式 $f(X)=X^3-4X+1=0$ の 1 根とする．このとき，K は総実であり，$d(\theta)=d=229$ である．K の類数は 1 である ([Borevich-Shafarevich, p. 428] 参照)．ゆえに $\beta=f'(\theta)^{-1}=(24\theta^2+9\theta-64)/229$ とおけば，$\mathfrak{d}^{-1}=(\beta)$．$\mathfrak{r}=\boldsymbol{Z}[1,\theta,\theta^2]\ni\forall\mu=x\theta^2+y\theta+z\ (x,y,z\in\boldsymbol{Z})$ と表わす．このとき，$\forall\nu\in\mathfrak{d}^{-1}$ を $\nu=\beta\mu$ とすれば，容易に $\mathrm{tr}(\nu)=x$ を得る．そこで，$\mathrm{tr}(\nu)=1$, $\nu=\beta\mu\gg 0$ となる μ を求める．そのために，θ およびその共役 θ', θ'' をそれぞれ求めると

$$\begin{cases} \theta=1.861\pm 1/1000 \\ \theta'=0.254\pm 1/1000 \\ \theta''=-2.115\pm 1/1000 \end{cases}$$

である．これから条件を満たす $\mu=x\theta^2+y\theta+z$ は左記の 7 通りである: なお，$\mathrm{N}(\mu)$ は各 μ の norm を表わし，(μ) は μ の生成する単項 ideal を標記したものである，ただし $\mathfrak{p}_1$, $\mathfrak{p}_2$ は $\mathfrak{r}$ の素イデアルであって，$(2)=\mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_2$, $\mathrm{N}\mathfrak{p}_1=2^2$, $\mathrm{N}\mathfrak{p}_2=2$ なるものである．したがって，$s_1(2,\mathfrak{r})=(1+4)+(1+2)+(1+2+4+8)+(1+7)+(1+2)+(1+2)+(1+4)=42=2\cdot 3\cdot 7$．故に，

x	y	z	$\mathrm{N}(\mu)$	(μ)
1	1	−1	4	$\mathfrak{p}_1$
1	1	−2	2	$\mathfrak{p}_2$
1	0	−1	8	$\mathfrak{p}_2^3$
1	0	−2	7	素
1	0	−3	2	$\mathfrak{p}_2$
1	−1	0	2	$\mathfrak{p}_2$
1	−1	−1	4	$\mathfrak{p}_1$

$$\zeta_K(2)=\frac{2^3\pi^6 s_1(2,\mathfrak{r})}{3^2\cdot 7\cdot 229\sqrt{229}}=\frac{2^4\cdot\pi^6}{3\cdot 229\sqrt{229}}.$$

同様の計算によって，$((k-1)!)^3(2\pi i)^{-3k}(229)^{k-1/2}\,\zeta_K(k)$ の値は

$k=4$	$31\cdot 43/2^3\cdot 3\cdot 5$
$k=6$	$-131\cdot 138191/2^2\cdot 3^2\cdot 7$
$k=8$	$11\cdot 97783579343^*/2^4\cdot 3\cdot 5$
$k=10$	$-12433\cdot 15092210930317^*/2^2\cdot 3\cdot 11$
$k=12$	$113\cdot 691\cdot 6760727167822068433 01^*/2^3\cdot 3^2\cdot 5\cdot 7\cdot 13$

である（＊印の数は素数であるかどうかはわからない）．

例 4　$K=\boldsymbol{Q}(\theta)$，θ は次のような3次方程式の根とする；

$$X^3-4X+2,\quad X^3-5X+3,\quad X^3-7X+5.$$

このときには，例3と同様の計算で $\boldsymbol{d}_K$ は各々 148(＝$2^2\cdot 37$)，257，697(＝17.41) となる．よって例3と同様にして $((k-1)!)^3(2\pi i)^{-3k}\boldsymbol{d}_K{}^{k-1/2}\zeta_K(k)$ の値が計算でき以下の値を得る（ただし，＊印の数は素数であるかどうかはわからない）．

$\boldsymbol{d}_K=148$	$k=4$	$577/2^4\cdot 3\cdot 5$
	$k=6$	$-19\cdot 373\cdot 463/2^3\cdot 3^2\cdot 7$
	$k=8$	$81447877057^*/2^5\cdot 3\cdot 5$
$\boldsymbol{d}_K=257$	$k=4$	$31\cdot 61/2^3\cdot 3\cdot 5$
	$k=6$	$-467\cdot 72053/2^2\cdot 3^2\cdot 7$
	$k=8$	$17\cdot 19\cdot 7880419457^*/2^4\cdot 3\cdot 5$
$\boldsymbol{d}_K=697$	$k=4$	$11\cdot 17\cdot 41/3\cdot 5$
	$k=6$	$-2029818781/3^2\cdot 7$
	$k=8$	$71\cdot 3981572785241^*/3\cdot 5$

上の例3，例4における値は (7.4.3) にしたがって，肥田晴三，市川尚美の両氏が（電子計算機の利用により）計算したものである．

§7.5　modular 形式と体の拡大

この節では，紙数の都合とその後の理論の発展などからここでは詳しく述べることが出来ないが，§7.1〜§7.4 の内容と関連して本書に取り入れておきたい幾つかの事実を必要な場合には文献を参照することにして略説する．先ず §7.1 で述べた Γ_K の modular 形式に Dirichlet 級数を対応させることから始める．以下 §7.1 の記号を用いることとし，便宜上 K の狭義の類数は **1** で

あると仮定する．さて $F(z)$ を Γ_K に関する weight が k の modular 形式とする．但し k はもし K が norm が -1 であるような単数を含むならば偶数とする．$\mathfrak{d}$ を K の共役差積とし

$$\mathfrak{d}=(\delta), \qquad \delta\gg 0$$

とおく．$\mathfrak{r}$ の任意の整 ideal $\mathfrak{a}$ は総正な元 α で生成されるから α を用いて

$$c_{\mathfrak{a}}=c_{\alpha\delta^{-1}}$$

とおく．ここで c_λ は (7.1.5) で与えられる $F(z)$ の Fourier 展開の係数である．(7.1.3) により $c_{\mathfrak{a}}$ は $\mathfrak{a}$ を生成する元 α のとり方によらずに決まる．そこで $c_{\mathfrak{a}}$ を用いて

$$L(s;\ f)=\sum_{\mathfrak{a}\subset\mathfrak{r}} c_{\mathfrak{a}}\mathrm{N}\mathfrak{a}^{-s}$$

と定義する．F と $L(s;\ F)$ は一変数の場合と同様に Mellin 変換（を一般化したもの）により対応している．F が一変数の場合の $L(s;\ F)$ を Riemann の ζ 函数に喩えるならば，$g>1$ の場合には $L(s;\ F)$ は Dedekind の ζ 函数に相当するものである．Dedekind の ζ 函数が Dirichlet の L 函数の積に分解できたように，$L(s;\ F)$ が一変数の modular 形式に対応する Dirichlet 級数と同様の関係を持つのではないかということが予想される．そのために K として実 2 次体 $\boldsymbol{Q}(\sqrt{d})$ をとる．ここで d は K の判別式する．k は偶数であるとし

$$F(z)=\left(\frac{(k-1)!}{(2\pi i)^k}\right)^g d^{k-1/2}E_k(z;\ \mathfrak{r})$$

とおくと

$$\begin{aligned}L(s;\ F)&=\sum_{\mathfrak{a}\subset\mathfrak{r}}\Big(\sum_{\mathfrak{a}\subset\mathfrak{b}\subset\mathfrak{r}}\mathrm{N}(\mathfrak{b})^{k-1}\Big)\mathrm{N}\mathfrak{a}^{-s}\\&=\zeta_K(s)\zeta_K(s-k+1)\end{aligned}$$

と書かれる．一方

$$f(z)=\frac{(k-1)!}{2(2\pi i)^k}E_k(z)$$

とおくと

$$L(s;\ f)=\zeta(s)\zeta(s-k+1)$$

であったから（(4.1.10) 参照）

$$L(s;\ F)=L(s;\ f)L(s;\ f,\chi) \tag{7.5.1}$$

が成り立っていることがわかる．次に χ_0 を単位指標，$\chi=\left(\frac{d}{}\right)$ とし §4.7 の記号を用いて

$$g(z)=f(z;\ \chi_0,\chi)\in\mathcal{E}_k(N,\chi)$$

$$h(z)=f(z;\ \chi,\chi_0)\in\mathcal{E}_k(N,\chi)$$

と定義すると

$$L(s;\ g)=\zeta(s)L(s-k+1,\chi),\qquad L(s;\ h)=L(s,\chi)\zeta(s-k+1)$$

であるから

$$L(s;\ F)=L(s;\ g)L(s;\ h) \tag{7.5.2}$$

が成り立つ．$L(s;\ h)$ は本質的には $L(s;\ g,\chi)$ に外ならないことに注意すると (7.5.2) もやはり定理 3.3.3 の類似であると考えられる．Eisenstein 級数に対応する Dirichlet 級数は，§4.7 で見たように Dirichlet の L 函数の積に過ぎなかったから (7.5.1) や (7.5.2) のように定理 3.3.3 の類似が成り立っても当然と言えるが，それでは同様の類似が cusp 形式についても成り立つであろうかという興味がわく．実際，以下に述べるとおりに，$S_k(\Gamma(1))$ および $S_k(N,\chi)$ の元と Hilbert の cusp 形式との間にも (7.5.1) および (7.5.2) の類似が存在するのである．このことは cusp 形式もやはり整数論と深くかかわっていることを示している．

定理 7.5.1（土井–長沼） $K=\boldsymbol{Q}(\sqrt{d})$ は実2次体とし，d を K の判別式とする．K の狭義の類数は1であると仮定する．$S_k(\Gamma(1))$ の任意の元 $f(z)$ に対して

$$L(s;\ F)=L(s;\ f)L(s;\ f,\chi)$$

となる，Γ_K に関する Hilbert の cusp 形式 F が存在する．

定理 7.5.2（長沼） $K=\boldsymbol{Q}(\sqrt{p})$ を実2次体で，K の判別式 p が素数で且つ K の狭義の類数が1であるようなものとする．$\chi=\left(\frac{p}{}\right)$ とし $S_k(N,\chi)$ の

原始的な元 f, g を $f|[\omega_p]_k$ が g の定数倍となるようなものとすると，Γ_K に関する（Hilbert の）cusp 形式 F で

$$L(s;\ F)=L(s;\ f)L(s;\ g)$$

となるものが存在する．

定理 7.5.2 において $L(s;\ g)$ は本質的には（p における Euler 因子を除いて）$L(s;\ f, \chi)$ に一致することに注意しておく．上に述べた 2 つの定理の証明を詳しく述べることは出来ないが，証明の方針を述べておくと，定理における Dirichlet 級数に関する等号を用いて $L(s;\ F)$ を定義し，その Mellin の逆変換によって F を定義する．実は Hilbert の modular 形式に関しても，§4.3 で述べた Hecke の定理（定理 4.3.4）の類似が成り立ち，F の $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ に関する変換式は $L(s;\ F)$ の函数等式に帰着されるのである．体の次数が 1 より大きければ，体 K の Hecke の指標が必要であるから，一変数の場合ほど簡単ではないが原理的には同様である．そこで $L(s;\ F)$ およびそれに Hecke の指標をつけた Dirichlet 級数の函数等式を証明すると，Γ_K が $\begin{bmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ $(a\in K)$ $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} \varepsilon' & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}(\varepsilon'\in r_+^\times)$, $\begin{bmatrix} \varepsilon & 0 \\ 0 & \varepsilon^{-1} \end{bmatrix}(\varepsilon\in r^\times)$ で生成されること* から，上の F が Hilbert の cusp 形式になることがわかる．詳しくは [土井-長沼] および [長沼] を参照されたい．話をわかり易くするために 2 次体についてのみ説明したが，これらの事柄は 2 次体に限ったことではなく，第 6 章で述べた Hecke 作用素の trace の公式を用いて更に一般の場合にも成り立つことがわかっている．これについては [斎藤 2], [新谷], [Langlands 2] 等を見ていただきたい．さて上の 2 つの定理に戻ってこれと関係して興味深い事実を述べる．

Ramanujan は $\Delta(z)\in SL_{12}(\Gamma(1))$ の Fourier 展開

$$\Delta(z)=e^{2\pi iz}\prod_{n=1}^{\infty}(1-e^{2\pi inz})^{24}=\sum_{n=1}^{\infty}\tau(n)e^{2\pi inz}$$

の係数 $\tau(n)$ について

---

* [Vaserstein] 参照．

(7.5.3)　任意の素数 p に対して，$1+p^{11}-\tau(p)\equiv 0 \pmod{691}$

なる合同式が成り立つことを示した．691 が $B_{12}=691/2730$ の分子であることに注目すると，この合同式は次のように一般化される．

定理 7.5.3 (**Brumer，土井**)　$G_k(\Gamma(1))$ の元 $f(z)$ で，Fourier 展開を $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{2\pi i n z}$ とするときに $a_n \in \boldsymbol{Z}$, $a_0=1$ となるものが存在するとする．Hecke 作用素 $T(p)$ を $S_k(\Gamma(1))$ に作用させて得られる表現行列を $T(p)_k$ と書くと

$$\det[1+p^{k+1}-T(p)_k]\equiv 0 \qquad (\mathrm{mod}\ l)$$

が成り立つ．ここで l は $B_k/(2k)$ を既約分数に書き表わしたときの分子である．

証明　Hecke 作用素 $T(p)$ を $S_k(\Gamma(1))$ 上の作用素と考えたものを $T(p)^S$, $G_k(\Gamma(1))$ 上の作用素と考えたものを $T(p)^G$ と書くことにする．f を

$$f=f_S+f_E, \qquad f_S\in S_k(\Gamma(1)), \qquad f_E\in \mathcal{E}_k(\Gamma(1))$$

と書き表わすと，f_E は $G_k(z)$ の定数倍であるが，定数項を比べると

$$(7.5.4) \qquad f_E(z)=G_k(z)=1-\frac{2k}{B_k}\sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{2\pi i n z}, \qquad a_n=\sum_{\substack{dd'=n\\ d,d'>0}} dd'^{k-1}$$

である．特に $f_E|T(p)^G=(1+p^{k-1})f_E$ であるから

$$(7.5.5) \qquad f|(T(p)^G-(1+p^{k-1}))=f_S|(T(p)^S-(1+p^{k-1}))$$

となる．定理 4.5.16 により $T(p)^S-(1+p)^{k-1}$ は $S_k(\Gamma(1))$ の自己同型を与えるので，(7.5.5) から

$$f_S=f|(T(p)^G-(1+p^{k-1}))(T(p)^S-(1+p^{k-1}))^{-1}$$

となることがわかる．補題 4.5.13 により $f|(T(p)^G-(1+p^{k-1}))$ の Fouier 展開の係数はすべて整数である．よって定理 4.5.18 により $\det[T(p)_k-(1+p^{k-1})]f_S$ の Fourier 展開の係数は整数であり，従って $\det[T(p)_k-(1+p^{k-1})]f_E$ の Fourier 展開の係数は整数であることがわかる．特に $e^{2\pi i z}$ の係数を調べると

$$\det[T(p)_k-(1+p^{k-1})]\left(\frac{2k}{B_k}\right)\in \boldsymbol{Z}$$

となり定理を得る．　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　(証明終)

特に k が4の倍数であるならば，系 4.9.6 により $G_k(\Gamma(1))$ に定理の仮定を満たす modular 形式 $f(z)$ が存在することがわかる．合同部分群に関しても次のように合同式が成り立つ．

定理 7.5.4 (Brumer, 土井) k は偶数とし，q は素数とする．

(1) p を q と異なる素数とし，$T(p)_k$ を $T(p)$ の $S_k(\Gamma_0(q))$ における表現行列とする．l を $(1+(-q)^{k/2})B_k/(2k)$ の分子とすると

$$\det[1+p^{k-1}-T(p)_k]\equiv 0 \pmod{l}$$

が成り立つ．

(2) $\chi=\left(\frac{q}{}\right)$ とする．p を q と異なる素数とし，$T(p)_{k,\chi}$ を $T(p)$ の $S_k(q,\chi)$ における表現行列とする．l を $B_{k;\chi}/\{2k(1+(-1)^{k/2}q^{(k-1)/2})\}$ の分子を割る素数とすると

$$\det[1+\chi(p)p^{k-1}-T(p)_{k,\chi}]\equiv 0 \pmod{l}$$

が成り立つ．

証明は，(i) $k=2$，$\chi=$単位指標 (ii) $k>2$，$\chi=$単位指標 (iii) $\chi=\left(\frac{q}{}\right)$ に分けて定理 7.5.3 と同様の議論を行なえばよい．但し次の2つの注意をしておく．

1° $S_k(\Gamma_0(q))\neq\{0\}$ であるならば，$G_k(\Gamma_0(q))$ の元 $f(z)$ で

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n e^{2\pi i n z} \qquad (a_0=1,\ a_n\in\boldsymbol{Z})$$

で，更に

$$f|[\omega_q]_k=(-1)^{k/2}f(z)$$

となるものが存在する．これは $k=2$ ならば定符号の四元数環の order から得られる2次形式から θ 函数を作ることによって得られ，一般には その積を作ればよい．([Eichler]，[土方-斎藤] 参照)．

2° $S_k(q,\chi)\neq\{0\}$ であるならば，$G_k(q,\chi)$ の元 $f(z)$ で

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n e^{2\pi i n z} \qquad (a_0=1,\ a_n\in\boldsymbol{Z})$$

で，更に

$$f|[\omega_q]_k=(-1)^{k/2}\quad f(z)$$

となるものが存在する．これは $k=2$ ならば［北岡］によって，$f(z)$ を θ 函数によって与えるような2次形式の lattice の存在が示され，一般には 1° で得られた $f(z)$ を掛けて得られる．

ところで上の合同式は，総実な代数体に関する Hilbert の modular 形式についても拡張でき，その Hecke 作用素を考えると $\zeta_K(k)$ の分子に現われる素因子で割り切れることがわかる．これらは定理 7.5.1, 7.5.2 と関係して興味深い事実である．

最後に定理 7.5.4 の例を1つ与えておく．定理 7.5.4（2）において $q=5$, $k=12$ とすると $\dim S_{12}(5, \chi)=4$ であって，$T(2)_{12,\chi}$ の固有多項式 $f_{T(2)}(x)$ は

$$f_{T(2)}(x)=x^4+4132x^2+2496256, \qquad 2496256=2^8\cdot 7^2\cdot 199$$

であるから

$$\det[1+\chi(2)2^{11}-T(2)_{12,\chi}]=f_{T(2)}(1-2^{11})=3^4\cdot 5^2\cdot 7541\cdot 1150921$$

となり，確かに $B_{12,\chi}$ の分子の素因数 1150921 で割り切れる．なお，$f_{T(2)}(x)=0$ の任意の1根を α とし $\boldsymbol{Q}(\alpha)/\boldsymbol{Q}(\alpha^2)$ の相対差積を $\mathfrak{d}$ とすれば，明らかに $199|\mathrm{N}(\mathfrak{d})$ である．一方，$K=\boldsymbol{Q}(\sqrt{5})$ の基本単数 $\varepsilon=(1+\sqrt{5})/2$ について

$$\varepsilon^{11}=(199+89\sqrt{5})/2$$

となる．この例からわかるように，$S_k(N, \chi)$ における Hecke 作用素の固有値によって $\boldsymbol{Q}$ 上生成される体の相対差積と $\boldsymbol{Q}(\sqrt{N})$ の基本単数 ε に対する $\mathrm{tr}(\varepsilon^{k-1})$ に現われる素因子の間には，密接な関係がある．これは志村五郎氏によってなされた実2次体上の類体の構成に関連する著しい事実の1つなのである（［志村 4, 5, 6］参照）．

付　録 A

$S_2(\Gamma_0(N))$（N は素数，$11 \leqq N \leqq 71$）に作用する **Hecke** 作用素 $T(p)$ の固有多項式 $F(X)$ の表をあげる．p は素数であって，$(p, N)=1$，$2 \leqq p \leqq 997$．例えば，$F(X)=X^n+a_1X^{n-1}+\cdots+a_n$ であれば表では $F(X)$ の最高次の係数から順に 1, a_1, …, a_n と表わしている．また，$F(X)$ が $\boldsymbol{Z}[X]$ の多項式として分解して $F(X)=(X^l+b_1X^{l-1}+\cdots+b_l)(X^m+c_1X^{m-1}+\cdots+c_m)$ であれば，表では 1, b_1, …, b_l, *1, c_1, …, c_m と表わしている．$N=37$ で初めてみられる $F(X)=f(X)f^*(X)$ における $f^*(X)$ は $S_2(\Gamma^*(N))$ に作用する $T(p)$ の固有多項式を表わす，ただし $\Gamma^*(N)$ は $\Gamma_0(N)$ と $\omega_N=\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ N & 0 \end{bmatrix}$ とで生成される群．$N=43$ 以後でも $f^*(X)$ は上と同様であるが，$F(X)=f^*(X)f(X)$ の順になっていることに注意されたい．なお，$\Gamma_0(N)$ に関連して興味深い数表が Springer Lecture Note, 476 (1975), Modular Functions of One Variable IV にある．

N = 11

p	F(X)	p	F(X)	p	F(X)	p	F(X)
2	1,2	3	1,1	5	1,-1	7	1,2
13	1,-4	17	1,2	19	1,0	23	1,1
29	1,0	31	1,-7	37	1,-3	41	1,8
43	1,6	47	1,-8	53	1,6	59	1,-5
61	1,-12	67	1,7	71	1,3	73	1,-4
79	1,10	83	1,6	89	1,-15	97	1,7
101	1,-2	103	1,16	107	1,-18	109	1,-10
113	1,-9	127	1,-8	131	1,18	137	1,7
139	1,-10	149	1,10	151	1,-2	157	1,7
163	1,-4	167	1,12	173	1,6	179	1,15
181	1,-7	191	1,-17	193	1,-4	197	1,2
199	1,0	211	1,-12	223	1,-19	227	1,-18
229	1,-15	233	1,-24	239	1,30	241	1,8
251	1,23	257	1,2	263	1,-14	269	1,-10
271	1,28	277	1,2	281	1,18	283	1,-4
293	1,-24	307	1,-8	311	1,-12	313	1,1
317	1,-13	331	1,-7	337	1,22	347	1,-28
349	1,-30	353	1,21	359	1,20	367	1,17
373	1,26	379	1,5	383	1,1	389	1,15
397	1,2	401	1,-2	409	1,30	419	1,-20
421	1,-22	431	1,18	433	1,11	439	1,-40
443	1,11	449	1,-35	457	1,12	461	1,-12
463	1,11	467	1,27	479	1,-20	487	1,-23
491	1,8	499	1,-20	503	1,26	509	1,-15
521	1,3	523	1,16	541	1,8	547	1,-8
557	1,2	563	1,-4	569	1,0	571	1,28
577	1,-33	587	1,-28	593	1,-44	599	1,-40
601	1,-2	607	1,22	613	1,16	617	1,-18
619	1,25	631	1,-7	641	1,33	643	1,-29
647	1,7	653	1,41	659	1,-10	661	1,-37
673	1,-14	677	1,42	683	1,16	691	1,-17
701	1,-2	709	1,25	719	1,-15	727	1,-3
733	1,36	739	1,-50	743	1,-4	751	1,23
757	1,22	761	1,-12	769	1,-20	773	1,6
787	1,32	797	1,-53	809	1,0	811	1,38
821	1,-22	823	1,-39	827	1,52	829	1,-25
839	1,5	853	1,-14	857	1,-8	859	1,15
863	1,-24	877	1,12	881	1,43	883	1,-4
887	1,22	907	1,12	911	1,-12	919	1,-10
929	1,30	937	1,-8	941	1,-42	947	1,27
953	1,-34	967	1,32	971	1,-47	977	1,27
983	1,-39	991	1,8	997	1,-38		

N = 17

p	F(X)	p	F(X)	p	F(X)	p	F(X)
2	1,1	3	1,0	5	1,2	7	1,-4
11	1,0	13	1,2	19	1,4	23	1,-4
29	1,-6	31	1,-4	37	1,2	41	1,6
43	1,-4	47	1,0	53	1,-6	59	1,12
61	1,10	67	1,-4	71	1,4	73	1,6
79	1,-12	83	1,4	89	1,-10	97	1,-2
101	1,10	103	1,-8	107	1,-8	109	1,-6
113	1,14	127	1,-8	131	1,-16	137	1,6
139	1,8	149	1,10	151	1,16	157	1,2
163	1,-24	167	1,4	173	1,-22	179	1,-12
181	1,2	191	1,16	193	1,-2	197	1,18
199	1,20	211	1,-8	223	1,-24	227	1,24
229	1,-6	233	1,6	239	1,16	241	1,-18
251	1,-12	257	1,-18	263	1,16	269	1,-22
271	1,16	277	1,-14	281	1,6	283	1,16
293	1,-6	307	1,12	311	1,-28	313	1,22
317	1,10	331	1,-4	337	1,14	347	1,-32
349	1,18	353	1,30	359	1,0	367	1,-28
373	1,-6	379	1,8	383	1,24	389	1,-6
397	1,-6	401	1,14	409	1,-26	419	1,-8
421	1,-22	431	1,-12	433	1,-2	439	1,20
443	1,-28	449	1,-34	457	1,6	461	1,2
463	1,-32	467	1,-12	479	1,-36	487	1,-20
491	1,-20	499	1,40	503	1,12	509	1,2
521	1,-26	523	1,36	541	1,-6	547	1,32
557	1,-30	563	1,4	569	1,38	571	1,32
577	1,14	587	1,-4	593	1,-18	599	1,24
601	1,-10	607	1,-20	613	1,26	617	1,6
619	1,48	631	1,-16	641	1,30	643	1,-32
647	1,-8	653	1,-6	659	1,-4	661	1,-38
673	1,-2	677	1,-30	683	1,40	691	1,8
701	1,18	709	1,34	719	1,-4	727	1,-40
733	1,50	739	1,-28	743	1,-12	751	1,-20
757	1,-22	761	1,22	769	1,14	773	1,26
787	1,32	797	1,50	809	1,-26	811	1,-40
821	1,18	823	1,-20	827	1,48	829	1,34
839	1,-20	853	1,-14	857	1,-10	859	1,-52
863	1,-16	877	1,-6	881	1,46	883	1,12
887	1,-12	907	1,-32	911	1,4	919	1,-24
929	1,30	937	1,-10	941	1,-6	947	1,-32
953	1,22	967	1,0	971	1,12	977	1,-18
983	1,-12	991	1,12	997	1,-46		

N = 19

p	F(X)	p	F(X)	p	F(X)	p	F(X)
2	1,0	3	1,2	5	1,-3	7	1,1
11	1,-3	13	1,4	17	1,3	23	1,0
29	1,-6	31	1,4	37	1,-2	41	1,6
43	1,1	47	1,3	53	1,-12	59	1,6
61	1,1	67	1,4	71	1,-6	73	1,7
79	1,-8	83	1,-12	89	1,-12	97	1,-8
101	1,-6	103	1,-14	107	1,18	109	1,16
113	1,-6	127	1,-2	131	1,15	137	1,3
139	1,13	149	1,-21	151	1,10	157	1,-14
163	1,-20	167	1,18	173	1,18	179	1,18
181	1,-2	191	1,-3	193	1,4	197	1,-18
199	1,-11	211	1,-14	223	1,10	227	1,-12
229	1,-5	233	1,21	239	1,-15	241	1,10
251	1,-21	257	1,0	263	1,-9	269	1,-24
271	1,16	277	1,19	281	1,-6	283	1,13
293	1,12	307	1,-20	311	1,3	313	1,10
317	1,-6	331	1,28	337	1,-32	347	1,-21
349	1,-17	353	1,6	359	1,-15	367	1,-8
373	1,4	379	1,34	383	1,-12	389	1,-15
397	1,7	401	1,-12	409	1,4	419	1,12
421	1,-8	431	1,24	433	1,-2	439	1,10
443	1,3	449	1,0	457	1,37	461	1,-9
463	1,31	467	1,27	479	1,12	487	1,-2
491	1,-12	499	1,-5	503	1,-12	509	1,0
521	1,0	523	1,-38	541	1,25	547	1,28
557	1,-21	563	1,-6	569	1,24	571	1,4
577	1,-11	587	1,-45	593	1,42	599	1,36
601	1,-26	607	1,-32	613	1,-29	617	1,-9
619	1,-44	631	1,-11	641	1,0	643	1,13
647	1,-27	653	1,39	659	1,30	661	1,-32
673	1,10	677	1,42	683	1,-36	691	1,-17
701	1,-6	709	1,-26	719	1,-15	727	1,19
733	1,22	739	1,-11	743	1,24	751	1,-32
757	1,25	761	1,-33	769	1,-23	773	1,6
787	1,4	797	1,12	809	1,9	811	1,16
821	1,-33	823	1,49	827	1,-12	829	1,16
839	1,-18	853	1,-26	857	1,-18	859	1,49
863	1,-18	877	1,22	881	1,27	883	1,-47
887	1,-18	907	1,-8	911	1,6	919	1,-20
929	1,18	937	1,7	941	1,18	947	1,36
953	1,48	967	1,40	971	1,-60	977	1,-24
983	1,36	991	1,34	997	1,-17		

N = 23

p	F(X)	p	F(X)	p	F(X)
2	1,1,-1	3	1,0,-5	5	1,2,-4
7	1,-2,-4	11	1,6,4	13	1,-3,*1,-3
17	1,-6,4	19	1,2,*1,2	29	1,3,*1,3
31	1,0,-45	37	1,-2,-4	41	1,-2,-19
43	1,0,*1,0	47	1,0,-5	53	1,8,-4
59	1,-4,-16	61	1,-4,-76	67	1,10,20
71	1,-20,95	73	1,-22,101	79	1,4,-76
83	1,22,116	89	1,12,16	97	1,-22,76
101	1,0,-20	103	1,-14,-76	107	1,0,-180
109	1,0,*1,0	113	1,-22,116	127	1,28,151
131	1,-24,99	137	1,8,-304	139	1,8,-29
149	1,-12,-284	151	1,-4,-1	157	1,-4,-176
163	1,16,59	167	1,-12,16	173	1,-28,116
179	1,12,-9	181	1,-2,-244	191	1,30,100
193	1,-2,-79	197	1,-6,-11	199	1,38,316
211	1,20,-80	223	1,-4,*1,-4	227	1,2,-124
229	1,12,*1,12	233	1,22,101	239	1,-32,251
241	1,6,-396	251	1,-18,36	257	1,6,-11
263	1,12,-44	269	1,-2,-79	271	1,-8,*1,-8
277	1,-22,101	281	1,22,116	283	1,-42,396
293	1,12,16	307	1,-28,176	311	1,-4,-121
313	1,-4,-496	317	1,-24,-36	331	1,8,-229
337	1,-20,-80	347	1,-16,-256	349	1,-22,-59
353	1,26,-331	359	1,4,-316	367	1,-14,-76
373	1,-2,-44	379	1,-4,-496	383	1,-32,176
389	1,-60,880	397	1,22,-59	401	1,6,-116
409	1,2,-499	419	1,36,144	421	1,34,244
431	1,44,464	433	1,-58,716	439	1,24,99
443	1,-36,-81	449	1,12,-44	457	1,-30,-180
461	1,-6,-11	463	1,20,*1,20	467	1,44,404
479	1,-14,-556	487	1,16,19	491	1,-48,331
499	1,-52,631	503	1,36,244	509	1,-6,-971
521	1,-36,144	523	1,-42,36	541	1,42,261
547	1,-8,-1109	557	1,-12,-144	563	1,48,496
569	1,22,-4	571	1,42,396	577	1,-10,-295
587	1,36,279	593	1,-12,-44	599	1,-32,-64
601	1,-58,521	607	1,-44,464	613	1,2,-44
617	1,24,124	619	1,-12,-144	631	1,20,-400
641	1,-28,-784	643	1,10,-580	647	1,0,-45
653	1,14,-931	659	1,-10,-220	661	1,28,116
673	1,-3,*1,-3	677	1,-18,*1,-18	683	1,-4,-601
691	1,-32,176	701	1,30,100	709	1,26,-676
719	1,24,64	727	1,42,396	733	1,58,836
739	1,-76,1319	743	1,-42,36	751	1,44,-16
757	1,46,-76	761	1,-30,-755	769	1,6,-396
773	1,20,80	787	1,-76,1264	797	1,24,-356

N = 23

p	F(X)	p	F(X)	p	F(X)
809	1,-60,580	811	1,80,1355	821	1,60,820
823	1,12,-1089	827	1,-12,16	829	1,0,-1620
839	1,42,36	853	1,48,396	857	1,6,-11
859	1,20,55	863	1,-24,-981	877	1,64,1004
881	1,-66,964	883	1,-4,*1,-4	887	1,12,-809
907	1,0,-1620	911	1,0,-980	919	1,-42,36
929	1,66,1009	937	1,-46,404	941	1,18,164
947	1,44,359	953	1,-32,236	967	1,12,-1089
971	1,-24,124	977	1,78,1276	983	1,72,1276
991	1,-24,*1,-24	997	1,20,-620		

N = 29

p	F(X)	p	F(X)	p	F(X)
2	1,2,-1	3	1,-2,-1	5	1,1,*1,1
7	1,0,-8	11	1,-2,-1	13	1,2,-7
17	1,4,-4	19	1,-6,*1,-6	23	1,4,-28
31	1,-6,-41	37	1,4,*1,4	41	1,-8,-56
43	1,-10,23	47	1,-2,-17	53	1,-2,-71
59	1,-4,-28	61	1,4,-4	67	1,0,-32
71	1,12,28	73	1,-4,*1,-4	79	1,2,-1
83	1,-4,-28	89	1,8,-56	97	1,8,-56
101	1,16,32	103	1,4,-4	107	1,24,136
109	1,-14,17	113	1,4,-124	127	1,20,68
131	1,-20,-28	137	1,-12,*1,-12	139	1,-14,*1,-14
149	1,10,17	151	1,0,-200	157	1,0,-72
163	1,-22,71	167	1,12,28	173	1,-36,292
179	1,-4,-68	181	1,6,-119	191	1,-28,68
193	1,16,56	197	1,-2,*1,-2	199	1,-16,-8
211	1,2,-337	223	1,12,28	227	1,-12,-164
229	1,24,72	233	1,-14,-79	239	1,28,164
241	1,14,-79	251	1,-26,119	257	1,42,433
263	1,-14,31	269	1,-12,-612	271	1,-2,-241
277	1,12,-92	281	1,-30,-63	283	1,-12,4
293	1,-4,-28	307	1,14,-49	311	1,-28,68
313	1,-14,41	317	1,12,-612	331	1,2,-1
337	1,-4,-388	347	1,12,-36	349	1,-18,-119
353	1,-20,-188	359	1,-22,71	367	1,-18,*1,-18
373	1,30,97	379	1,-20,-188	383	1,24,72
389	1,-40,112	397	1,-50,593	401	1,26,137
409	1,4,-284	419	1,36,252	421	1,-12,-932
431	1,-28,164	433	1,-16,-448	439	1,12,4
443	1,60,868	449	1,36,36	457	1,-36,36
461	1,-14,*1,-14	463	1,26,*1,26	467	1,6,-1241
479	1,6,-89	487	1,40,328	491	1,34,271

N = 29

p	F(X)	p	F(X)	p	F(X)
499	1,-4,-284	503	1,-26,7	509	1,38,289
521	1,30,25	523	1,-32,128	541	1,32,224
547	1,-32,-136	557	1,12,-92	563	1,10,7
569	1,68,1124	571	1,16,-448	577	1,20,-292
587	1,-4,-28	593	1,22,49	599	1,34,-433
601	1,40,392	607	1,-10,-137	613	1,9,*1,9
617	1,-24,16	619	1,-70,1223	631	1,68,1148
641	1,4,-388	643	1,-48,504	647	1,-68,1124
653	1,32,56	659	1,-26,167	661	1,-44,356
673	1,-2,-511	677	1,22,*1,22	683	1,-8,-272
691	1,-48,*1,-48	701	1,18,-887	709	1,-30,25
719	1,12,-164	727	1,20,-28	733	1,-8,-2032
739	1,6,-41	743	1,-36,292	751	1,-28,68
757	1,-68,1084	761	1,-12,-1532	769	1,36,-644
773	1,56,712	787	1,12,-2276	797	1,4,-2884
809	1,-16,-736	811	1,-16,56	821	1,-14,-23
823	1,52,-124	827	1,-46,431	829	1,20,-292
839	1,30,175	853	1,12,-252	857	1,18,73
859	1,-14,-113	863	1,28,-772	877	1,46,329
881	1,-14,*1,-14	883	1,8,-1784	887	1,-54,631
907	1,12,-764	911	1,62,719	919	1,12,-164
929	1,-60,772	937	1,-12,-476	941	1,34,-1279
947	1,-42,103	953	1,26,-343	967	1,62,943
971	1,20,68	977	1,-78,1513	983	1,-10,-697
991	1,20,92	997	1,0,-800		

N = 31

p	F(X)	p	F(X)	p	F(X)
2	1,-1,-1	3	1,2,-4	5	1,-1,*1,-1
7	1,4,-1	11	1,-2,*1,-2	13	1,2,-4
17	1,-6,4	19	1,0,-5	23	1,2,-44
29	1,-10,20	37	1,2,*1,2	41	1,-7,*1,-7
43	1,2,-4	47	1,4,-16	53	1,12,16
59	1,0,-5	61	1,6,-116	67	1,-8,*1,-8
71	1,-4,-121	73	1,-8,-4	79	1,10,-20
83	1,12,-44	89	1,-10,-20	97	1,14,-31
101	1,3,*1,3	103	1,-8,11	107	1,-16,59
109	1,10,-55	113	1,2,-19	127	1,-16,44
131	1,-12,*1,-12	137	1,-26,124	139	1,0,-180
149	1,-10,*1,-10	151	1,6,-116	157	1,-6,-311
163	1,-8,-29	167	1,4,-16	173	1,12,-44
179	1,10,-20	181	1,-14,-76	191	1,16,-61
193	1,2,-19	197	1,4,-176	199	1,20,20
211	1,-24,19	223	1,-4,*1,-4	227	1,4,-16
229	1,0,-180	233	1,-18,1	239	1,10,-20

N = 31

p	F(X)	p	F(X)	p	F(X)
241	1,16,-436	251	1,26,44	257	1,14,-31
263	1,42,436	269	1,40,320	271	1,6,-116
277	1,-6,-236	281	1,-17,*1,-17	283	1,-8,-304
293	1,-8,-4	307	1,44,439	311	1,36,199
313	1,-38,356	317	1,-26,89	331	1,-2,*1,-2
337	1,34,284	347	1,-26,44	349	1,-20,-220
353	1,12,-144	359	1,-40,395	367	1,-18,*1,-18
373	1,-19,*1,-19	379	1,40,80	383	1,12,-284
389	1,0,-320	397	1,7,*1,7	401	1,-54,604
409	1,30,100	419	1,-20,-305	421	1,-14,-451
431	1,-12,*1,-12	433	1,2,-124	439	1,-20,-25
443	1,-48,531	449	1,0,-980	457	1,24,64
461	1,-24,-356	463	1,32,76	467	1,4,-41
479	1,-60,855	487	1,34,284	491	1,36,-176
499	1,40,220	503	1,-28,-49	509	1,-10,-580
521	1,-2,*1,-2	523	1,22,76	541	1,6,-491
547	1,-16,-341	557	1,12,*1,12	563	1,12,-1089
569	1,-20,80	571	1,-34,164	577	1,4,-716
587	1,4,-16	593	1,22,101	599	1,-20,-505
601	1,6,-1116	607	1,-36,304	613	1,52,356
617	1,-56,764	619	1,10,-100	631	1,-24,-356
641	1,-12,*1,-12	643	1,-48,556	647	1,-16,-16
653	1,32,-724	659	1,-20,-145	661	1,46,29
673	1,-18,-1364	677	1,4,-1996	683	1,12,-89
691	1,16,-61	701	1,-7,*1,-7	709	1,-60,880
719	1,50,500	727	1,84,1759	733	1,2,-19
739	1,10,-100	743	1,-78,1396	751	1,-24,-981
757	1,14,-196	761	1,-2,*1,-2	769	1,50,125
773	1,-18,-324	787	1,-46,284	797	1,84,1584
809	1,-20,-80	811	1,28,*1,28	821	1,6,-1116
823	1,42,396	827	1,-66,844	829	1,20,-620
839	1,-40,320	853	1,-48,396	857	1,4,-2876
859	1,-40,80	863	1,42,316	877	1,54,649
881	1,-4,-496	883	1,-8,-1264	887	1,4,-841
907	1,44,479	911	1,-14,-76	919	1,20,80
929	1,20,*1,20	937	1,-36,244	941	1,38,*1,38
947	1,44,404	953	1,-78,1476	967	1,-76,944
971	1,28,*1,28	977	1,14,-1571	983	1,-88,1916
991	1,-34,-836	997	1,14,-451		

N = 37

p	F(X)=f(X)f*(X)	p	F(X)=f(X)f*(X)	p	F(X)=f(X)f*(X)
2	1,0,*1,2	3	1,-1,*1,3	5	1,0,*1,2
7	1,1,*1,1	11	1,-3,*1,5	13	1,4,*1,2

N = 37

p	F(X)=f(X)f*(X)	p	F(X)=f(X)f*(X)	p	F(X)=f(X)f*(X)
17	1,-6,*1,0	19	1,-2,*1,0	23	1,-6,*1,-2
29	1,6,*1,-6	31	1,4,*1,4	41	1,9,*1,9
43	1,-8,*1,-2	47	1,-3,*1,9	53	1,3,*1,-1
59	1,-12,*1,-8	61	1,-8,*1,8	67	1,4,*1,-8
71	1,15,*1,-9	73	1,-11,*1,1	79	1,10,*1,-4
83	1,-9,*1,15	89	1,-6,*1,-4	97	1,-8,*1,-4
101	1,-3,*1,-3	103	1,4,*1,-18	107	1,-12,*1,12
109	1,-2,*1,16	113	1,6,*1,18	127	1,7,*1,-1
131	1,6,*1,12	137	1,6,*1,6	139	1,4,*1,-4
149	1,-15,*1,5	151	1,-8,*1,-16	157	1,13,*1,-23
163	1,16,*1,18	167	1,-18,*1,12	173	1,-9,*1,-9
179	1,-18,*1,-18	181	1,7,*1,-5	191	1,24,*1,4
193	1,4,*1,26	197	1,-15,*1,-3	199	1,-2,*1,-2
211	1,13,*1,13	223	1,1,*1,17	227	1,-24,*1,16
229	1,-23,*1,-7	233	1,18,*1,-6	239	1,6,*1,6
241	1,10,*1,-14	251	1,0,*1,2	257	1,24,*1,0
263	1,-15,*1,-19	269	1,18,*1,6	271	1,-29,*1,31
277	1,-8,*1,-12	281	1,0,*1,-12	283	1,4,*1,-4
293	1,18,*1,2	307	1,25,*1,17	311	1,6,*1,0
313	1,28,*1,-22	317	1,18,*1,-22	331	1,10,*1,2
337	1,-23,*1,25	347	1,-6,*1,10	349	1,10,*1,-6
353	1,18,*1,-8	359	1,27,*1,15	367	1,-8,*1,-8
373	1,-5,*1,19	379	1,-11,*1,-15	383	1,-36,*1,-20
389	1,12,*1,-4	397	1,-11,*1,5	401	1,-24,*1,-18
409	1,4,*1,-20	419	1,-3,*1,-7	421	1,10,*1,24
431	1,-12,*1,30	433	1,-29,*1,-9	439	1,28,*1,-28
443	1,15,*1,-1	449	1,6,*1,-36	457	1,28,*1,-18
461	1,-36,*1,-30	463	1,-14,*1,22	467	1,-18,*1,2
479	1,-18,*1,-14	487	1,-2,*1,24	491	1,12,*1,28
499	1,-32,*1,-12	503	1,-42,*1,-16	509	1,-21,*1,31
521	1,-3,*1,33	523	1,16,*1,22	541	1,-20,*1,-20
547	1,28,*1,-8	557	1,30,*1,18	563	1,12,*1,30
569	1,-12,*1,24	571	1,-23,*1,-7	577	1,34,*1,0
587	1,-6,*1,32	593	1,-27,*1,5	599	1,27,*1,-1
601	1,10,*1,22	607	1,-14,*1,32	613	1,25,*1,-15
617	1,15,*1,-17	619	1,37,*1,1	631	1,-38,*1,28
641	1,9,*1,1	643	1,-14,*1,-14	647	1,6,*1,8
653	1,-36,*1,24	659	1,3,*1,15	661	1,-50,*1,28
673	1,1,*1,-27	677	1,-21,*1,11	683	1,-24,*1,-18
691	1,28,*1,20	701	1,48,*1,12	709	1,-26,*1,-40
719	1,-15,*1,-39	727	1,10,*1,-16	733	1,13,*1,-7
739	1,-11,*1,9	743	1,27,*1,-21	751	1,-41,*1,-25
757	1,-2,*1,50	761	1,15,*1,35	769	1,22,*1,-26
773	1,-3,*1,9	787	1,-23,*1,5	797	1,-12,*1,-52
809	1,-30,*1,-2	811	1,-11,*1,-47	821	1,3,*1,47
823	1,-32,*1,16	827	1,-30,*1,-22	829	1,-20,*1,4
839	1,0,*1,-44	853	1,46,*1,-26	857	1,6,*1,48
859	1,-14,*1,20	863	1,48,*1,24	877	1,22,*1,-50

N = 37

p	F(X)=f(X)f*(X)	p	F(X)=f(X)f*(X)	p	F(X)=f(X)f*(X)
881	1,6,*1,14	883	1,52,*1,-48	887	1,3,*1,-25
907	1,-8,*1,-52	911	1,24,*1,-26	919	1,-20,*1,58
929	1,-6,*1,-18	937	1,7,*1,-37	941	1,-30,*1,10
947	1,-18,*1,-12	953	1,3,*1,-61	967	1,22,*1,14
971	1,12,*1,8	977	1,-12,*1,-28	983	1,27,*1,-9
991	1,-20,*1,18	997	1,10,*1,42		

N = 41

p	F(X)	p	F(X)
2	1,1,-5,-1	3	1,0,-4,2
5	1,2,-4,-4	7	1,-6,8,-2
11	1,-2,-20,50	13	1,2,-12,-8
17	1,2,*1,2,*1,2	19	1,-4,-16,-10
23	1,-4,-32,-32	29	1,6,-4,-40
31	1,-16,64,-32	37	1,6,-36,-108
43	1,4,-8,-16	47	1,0,-120,-502
53	1,-6,-4,8	59	1,8,-16,-160
61	1,-2,-52,184	67	1,2,-20,-50
71	1,-20,84,134	73	1,2,-180,244
79	1,-32,328,-1090	83	1,0,-64,-128
89	1,6,-148,-920	97	1,-6,-52,248
101	1,-18,-12,488	103	1,4,-256,-1424
107	1,16,0,-256	109	1,6,-124,-760
113	1,-6,-148,-116	127	1,-16,48,-32
131	1,20,80,-208	137	1,-18,-148,2344
139	1,12,-352,-3680	149	1,-10,-212,1720
151	1,-28,196,-338	157	1,14,-172,-2392
163	1,16,32,-128	167	1,14,28,-122
173	1,30,236,232	179	1,-2,-296,-610
181	1,34,140,-2264	191	1,-14,-412,3562
193	1,26,188,248	197	1,-50,780,-3592
199	1,-46,612,-2510	211	1,-10,-160,1382
223	1,8,-64,-256	227	1,-8,-28,214
229	1,6,-268,-1240	233	1,-26,-116,4616
239	1,-16,-48,430	241	1,-6,-388,2792
251	1,28,208,464	257	1,-10,-276,-344
263	1,-20,-740,12506	269	1,-10,-228,-200
271	1,4,-16,-32	277	1,2,-332,2116
281	1,-38,428,-1352	283	1,4,-448,-1376
293	1,-42,140,5528	307	1,40,480,1808
311	1,-10,-360,-1718	313	1,34,76,-712
317	1,42,452,344	331	1,-6,-576,4658
337	1,38,164,-3676	347	1,-12,-144,1678

N = 41

p	F(X)	p	F(X)
349	1,50,828,4540	353	1,22,-172,-4388
359	1,24,-256,-6400	367	1,16,-216,-1648
373	1,54,716,2248	379	1,-48,656,-2720
383	1,22,-32,-1798	389	1,-2,-596,3560
397	1,-22,68,152	401	1,6,-700,-5132
409	1,-6,-436,-2740	419	1,4,-1224,80
421	1,-22,-100,2600	431	1,12,-424,-4688
433	1,-30,-1044,29592	439	1,-50,-268,25750
443	1,-80,2048,-16976	449	1,-22,76,520
457	1,-10,-116,1096	461	1,38,300,100
463	1,4,-516,1286	467	1,56,1024,6112
479	1,2,-192,670	487	1,-8,-1552,2416
491	1,8,-352,-3616	499	1,-48,764,-4030
503	1,40,176,-3098	509	1,50,532,-200
521	1,42,188,-712	523	1,-20,-720,5696
541	1,-30,-436,14044	547	1,68,1168,3622
557	1,50,684,2536	563	1,-58,732,-1934
569	1,-2,-44,20	571	1,6,-1212,-9838
577	1,46,364,-2008	587	1,18,104,194
593	1,38,-564,-9176	599	1,40,-432,-160
601	1,-26,-116,1928	607	1,52,8,-14864
613	1,-46,396,2908	617	1,-94,2860,-28136
619	1,-44,32,3040	631	1,-52,752,-1984
641	1,2,-36,-104	643	1,34,-64,-7262
647	1,64,1168,4688	653	1,6,-540,-5400
659	1,-44,-896,42410	661	1,-26,-908,10412
673	1,-26,-228,2504	677	1,-50,-300,28268
683	1,28,-464,-12346	691	1,-4,-448,-2866
701	1,78,1868,13844	709	1,-34,-44,1480
719	1,0,-1528,-19630	727	1,-24,-816,14302
733	1,-66,332,28024	739	1,-72,1664,-12160
743	1,68,1296,7024	751	1,-50,740,-2738
757	1,-2,-1852,-13688	761	1,-22,-52,764
769	1,-54,524,5560	773	1,18,-340,-4472
787	1,52,640,-400	797	1,-10,-116,856
809	1,102,3404,37000	811	1,36,288,432
821	1,38,-148,-11884	823	1,-24,32,382
827	1,-86,2272,-18814	829	1,18,-1812,-340
839	1,-42,144,6210	853	1,22,-1748,14216
857	1,-50,-988,55612	859	1,-8,-432,4880
863	1,-32,-264,464	877	1,-34,-948,32248
881	1,-30,-1300,32152	883	1,32,-2332,-79018
887	1,34,68,-1382	907	1,-8,-928,2704
911	1,-72,1592,-10064	919	1,-90,2112,-5870
929	1,54,236,-14680	937	1,-6,-100,632

N = 41

p	F(X)	p	F(X)
941	1,-26,-980,11336	947	1,24,-1440,-14688
953	1,82,1260,-17956	967	1,-46,68,578
971	1,72,1284,5906	977	1,6,-180,-536
983	1,-100,2976,-27488	991	1,-76,1404,-7442
997	1,-30,-820,-3832		

N = 43

p	F(X)=f*(X)f(X)	p	F(X)=f*(X)f(X)
2	1,2,*1,0,-2	3	1,2,*1,0,-2
5	1,4,*1,-4,2	7	1,0,*1,4,2
11	1,-3,*1,2,-7	13	1,5,*1,-2,-7
17	1,3,*1,-10,17	19	1,2,*1,4,-4
23	1,1,*1,-2,-31	29	1,6,*1,0,-18
31	1,1*1,3,*1,3	37	1,0,*1,0,-72
41	1,-5,*1,2,-7	47	1,-4,*1,-6,*1,-6
53	1,5,*1,-22,113	59	1,12,*1,4,-4
61	1,-2,*1,-8,-2	67	1,3,*1,-2,-71
71	1,-2,*1,12,28	73	1,-2,*1,24,126
79	1,8,*1,-4,-4	83	1,-15,*1,-18 49
89	1,4,*1,12,18	97	1,-7,*1,2,-7
101	1,9,*1,-6,1	103	1,-1,*1,-18,9
107	1,12,*1,12,4	109	1,-7,*1,6,-279
113	1,20,*1,8,8	127	1,-1,*1,-2,-7
131	1,-8,*1,-8,-16	137	1,-6,*1,12,-36
139	1,-19,*1,6,-63	149	1,-12,*1,0,-72
151	1,20,*1,-28,178	157	1,10,*1,10,*1,10
163	1,-14,*1,32,238	167	1,9,*1,6,-119
173	1,-6,*1,-36,292	179	1,-20,*1,12,34
181	1,-10,*1,8,-112	191	1,16,*1,-16,-136
193	1,-3,*1,2,-287	197	1,-2,*1,0,-200
199	1,-14,*1,-4,-28	211	1,-2,*1,-28,-4
223	1,28,*1,-28,98	227	1,4,*1,24,112
229	1,15,*1,18,-207	233	1,-6,*1,-4,-4
239	1,-16,*1,-12,-36	241	1,12,*1,-4,*1,-4
251	1,23,*1,-18,-119	257	1,24,*1,12,18
263	1,18,*1,28,-4	269	1,25,*1,3,*1,3
271	1,-23,*1,18,-207	277	1,32,*1,4,-94
281	1,-19,*1,6,-23	283	1,-21,*1,-14,-79
293	1,26,*1,-32,224	307	1,7,*1,-14,-343
311	1,-15,*1,-6,-279	313	1,-22,*1,8,-434
317	1,-9,*1,-46,521	331	1,26,*1,-40,398
337	1,3,*1,5,*1,5	347	1,28,*1,12,34

N = 43

p	F(X)=f*(X)f(X)	p	F(X)=f*(X)f(X)
349	1,-14,*1,32,238	353	1,31,*1,-6,1
359	1,-19,*1,54,697	367	1,32,*1,20,-292
373	1,-32,*1,0,-72	379	1,-11,*1,-38,233
383	1,-32,*1,24,72	389	1,-6,*1,-12,-476
397	1,6,*1,-8,-632	401	1,-5,*1,42,369
409	1,24,*1,-20,-622	419	1,28,*1,28,98
421	1,10,*1,20,68	431	1,21,*1,10,-775
433	1,12,*1,-52,658	439	1,-17,*1,-6,-63
443	1,4,*1,-44,284	449	1,-30,*1,-24,-306
457	1,18,*1,24,-18	461	1,-30,*1,-40,-112
463	1,-4,*1,36,162	467	1,-6,*1,-36,292
479	1,-21,*1,2,-31	487	1,-36,*1,-56,752
491	1,6,*1,-24,142	499	1,8,*1,60,882
503	1,-6,*1,-12,-1316	509	1,15,*1,-18,9
521	1,-14,*1,-48,526	523	1,-12,*1,36,-126
541	1,-1,*1,22,-271	547	1,29,*1,-9,*1,-9
557	1,3,*1,9,*1,9	563	1,-37,*1,-34,-223
569	1,-7,*1,-38,329	571	1,14,*1,-8,-34
577	1,20,*1,-52,626	587	1,-2,*1,-28,-196
593	1,16,*1,4,-46	599	1,1,*1,-62,929
601	1,4,*1,16,-224	607	1,4,*1,32,-32
613	1,18,*1,-8,8	617	1,21,*1,-6,-279
619	1,-36,*1,-24,-144	631	1,6,*1,-20,-1252
641	1,-12,*1,28,-46	643	1,36,*1,36,252
647	1,12,*1,8,8	653	1,14,*1,-36,316
659	1,19,*1,-10,-103	661	1,-31,*1,17,*1,17
673	1,-14,*1,8,-146	677	1,-34,*1,-28,188
683	1,9,*1,42,-207	691	1,40,*1,28,34
701	1,2,*1,48,544	709	1,1,*1,14,-919
719	1,-8,*1,0,-512	727	1,-16,*1,16,-224
733	1,-32,*1,0,-288	739	1,10,*1,28,-452
743	1,24,*1,32,-712	751	1,6,*1,32,238
757	1,-28,*1,-24,72	761	1,-20,*1,24,-824
769	1,42,*1,-16,-1288	773	1,4,*1,-36,226
787	1,-4,*1,20,-292	797	1,42,*1,-48,448
809	1,-26,*1,0,-32	811	1,14,*1,-72,1134
821	1,-49,*1,42,-527	823	1,1,*1,98,2369
827	1,36,*1,-8,-16	829	1,-44,*1,-8,-376
839	1,40,*1,44,-238	853	1,29,*1,-14,-1519
857	1,10,*1,-4,-28	859	1,32,*1,0,-288
863	1,6,*1,4,-2044	877	1,-41,*1,-34,-103
881	1,-37,*1,18,-1967	883	1,-31,*1,50,337
887	1,22,*1,-84,1476	907	1,-47,*1,6,-279
911	1,22,*1,0,-18	919	1,49,*1,42,369
929	1,6,*1,-84,1756	937	1,-32,*1,20,-1582

N = 43

p	F(X)=f*(X)f(X)	p	F(X)=f*(X)f(X)
941	1,-33,*1,18,-431	947	1,33,*1,6,1
953	1,-22,*1,0,-578	967	1,-37,*1,14,-1103
971	1,13,*1,-22,-79	977	1,-34,*1,24,16
983	1,24,*1,60,-158	991	1,-2,*1,8,-226
997	1,-4,*1,-20,50		

N = 47

p	F(X)	p	F(X)
2	1,-1,-5,5,-1	3	1,0,-7,4,1
5	1,2,-16,-16,48	7	1,-4,-7,44,-43
11	1,6,-4,-56,-48	13	1,-8,0,56,48
17	1,-6,-21,74,141	19	1,0,-16,-8,16
23	1,6,-20,-40,-16	29	1,10,20,-8,-16
31	1,8,0,-56,48	37	1,-10,15,34,9
41	1,-6,-8,32,-16	43	1,-2,-80,-112,432
53	1,6,-101,-314,2429	59	1,-4,-115,704,-519
61	1,6,-73,10,337	67	1,-10,-120,752,3184
71	1,12,-19,-320,657	73	1,-22,60,1368,-7664
79	1,-20,77,240,-47	83	1,-20,80,192,-256
89	1,6,-161,206,4841	97	1,-30,179,1634,-14307
101	1,22,35,-1398,-5903	103	1,20,77,-240,-47
107	1,-12,-84,848,1488	109	1,6,-276,-1064,5776
113	1,4,-216,-1656,-3024	127	1,-22,-76,4088,-20688
131	1,-28,173,-144,-199	137	1,-36,376,-1256,368
139	1,28,-136,-7992,-41488	149	1,6,-189,-1030,721
151	1,0,-224,8,12368	157	1,2,-25,-78,-59
163	1,-6,-56,304,-304	167	1,-6,-60,152,912
173	1,42,503,1234,-371	179	1,-28,0,3184,752
181	1,36,408,1304,-1328	191	1,-20,-48,320,768
193	1,-48,732,-4208,7984	197	1,12,-336,-2224,7984
199	1,2,-300,-2952,-7472	211	1,-2,-652,4344,17872
223	1,2,-824,-928,39056	227	1,14,-248,-2896,8912
229	1,-10,-768,8272,2576	233	1,-2,-192,-1216,-2128
239	1,-8,-475,472,8741	241	1,-18,-165,3382, -11723
251	1,4,-667,1888,21441	257	1,24,-264,-3080,6576
263	1,16,-467,-3376,56349	269	1,-32,168,2432,-17328
271	1,44,101,-16720,-182799	277	1,14,-357,-6350,-22639
281	1,-26,-56,2704,8144	283	1,52,757,760,-30439
293	1,-6,-592,2000,72208	307	1,-48,689,-2212,-9839
311	1,26,-400,-10656,-47248	313	1,6,-248,-1792,3824
317	1,-20,-592,10216,21936	331	1,56,977,4524,-12911
337	1,-90,3003,-44026,239373	347	1,16,-803,-10336,103341

N = 47

p	F(X)	p	F(X)
349	1,-18,-524,4232,49616	353	1,30,-441,-16902,-80919
359	1,0,-312,-2776,-6704	367	1,4,-304,64,5888
373	1,-24,-616,18536,-103184	379	1,24,141,-104,-1523
383	1,-16,-171,1984,10629	389	1,42,344,-656,-752
397	1,74,2027,24398,109001	401	1,42,67,-11594,-73039
409	1,0,-544,-4160,9472	419	1,8,-868,-4240,104816
421	1,-2,-112,112,2832	431	1,12,-1099,-21728,-56807
433	1,-18,-32,1216,-2128	439	1,-20,-576,17024,-108288
443	1,6,-744,-5536,10512	449	1,26,-296,-11536,-70864
457	1,-62,899,1158,-35303	461	1,-56,288,24896,-320256
463	1,-22,-1412,25048,7824	467	1,-24,-712,4064,59152
479	1,0,-559,1348,18217	487	1,-20,-224,640,-256
491	1,12,-375,-2012,21973	499	1,-36,376,-328,-8752
503	1,40,-64,-10248,-29872	509	1,16,-184,-3072,-5552
521	1,-58,415,13186,10089	523	1,-20,-624,3136,256
541	1,26,-853,-28918,-204739	547	1,26,-604,-15880,-43984
557	1,-6,-1408,-13024,-13584	563	1,-16,-216,5016,-22544
569	1,20,-16,-856,1008	571	1,-32,321,-932,-719
577	1,26,140,-88,-1296	587	1,-84,2160,-16832,40192
593	1,-14,-500,4040,-7536	599	1,40,-152,-10784,27728
601	1,-6,-365,-2414,-3259	607	1,14,-1036,-22504,-118192
613	1,-66,971,4834,-32271	617	1,34,-829,-19758,115613
619	1,8,-560,-6656,-5376	631	1,-10,-736,-7344,-20528
641	1,40,-1196,-61696,-590448	643	1,-8,-1851,10584,107893
647	1,12,-1795,-9584,-4647	653	1,70,1507,9118,-3307
659	1,-68,1589,-15480,53681	661	1,-38,-609,28110,-177143
673	1,-134,6484,-134216,999248	677	1,20,-1540,-6064,269904
683	1,32,-151,-11668,-79863	691	1,-50,-880,39696,476144
701	1,-146,7924,-189544,1686288	709	1,50,627,-1502,-38067
719	1,56,617,-8164,-121263	727	1,2,-1288,2976,261776
733	1,-26,-701,26714,-206031	739	1,24,-615,-6892,-14087
743	1,40,-656,-43832,-452944	751	1,56,-300,-32160,159184
757	1,-44,-632,27992,103536	761	1,28,-416,-8048,-28816
769	1,22,-1645,-27474,-94411	773	1,-90,1163,75094,-1671987
787	1,-24,-2048,41960,546032	797	1,16,-2160,-65272,-421968
809	1,46,-1924,-106040,-789744	811	1,-24,-2019,76912,-681171
821	1,-38,-1352,23840,547632	823	1,-28,-1440,31104,186624
827	1,56,-355,-52120,-596091	829	1,22,-628,-2280,47728
839	1,-102,2892,-9880,-246512	853	1,74,1307,-1138,-70711
857	1,16,-1848,-35544,-109232	859	1,-72,1012,5920,6608
863	1,-56,645,7976,-130803	877	1,66,708,-1720,-22544
881	1,42,92,-14600,-52784	883	1,56,365,-10432,-63891
887	1,92,896,-114288,-2675984	907	1,-16,-1472,15040,361728
911	1,12,-2911,-38116,5853	919	1,52,320,-8784,26864
929	1,-62,359,24802,-304347	937	1,-32,-1560,71688,-710288

N = 47

p	F(X)	p	F(X)
941	1,-38,255,2762,-23499	947	1,-84,1472,29440,-743168
953	1,-122,5124,-85096,461424	967	1,20,-511,-6444,71957
971	1,-40,-408,7080,-3152	977	1,-96,2632,-10496,-259888
983	1,128,3960,-45800,-2315856	991	1,-28,-587,-1664,-1263
997	1,24,-1588,-20272,506416		

N = 53

p	F(X)=f*(X)f(X)	p	F(X)=f*(X)f(X)
2	1,1,*1,1,-3,-1	3	1,3,*1,-3,-1,1
5	1,0,*1,2,-4,-4	7	1,4,*1,-4,0,4
11	1,0,*1,4,-4,-20	13	1,-1,*1,-1,*1,-1,*1,3
17	1,3,*1,5,-5,-17	19	1,5,*1,-11,37,-37
23	1,-7,*1,-3,-31,-29	29	1,7,*1,5,-37,-61
31	1,-4,*1,2,-76,116	37	1,-5,*1,5,-89,-353
41	1,-6,*1,10,20,-8	43	1,2,*1,-18,24,556
47	1,2,*1,10,-4,-8	59	1,2,*1,-2,-60,200
61	1,8,*1,10,-56,-556	67	1,12,*1,-6,-72,-108
71	1,-1,*1,5,-105,277	73	1,4,*1,-6,-28,-4
79	1,1,*1,7,-77,131	83	1,1,*1,-27,213,-457
89	1,14,*1,2,-212,1048	97	1,-1,*1,1,-133,-137
101	1,2,*1,-32,332,-1124	103	1,1,*1,-11,25,-13
107	1,-6,*1,-14,32,-20	109	1,-16,*1,20,80,-64
113	1,-15,*1,11,7,1	127	1,-13,*1,-7,-77,-131
131	1,2,*1,14,60,76	137	1,-12,*1,-18,-192,3580
139	1,20,*1,-14,-84,1292	149	1,5,*1,-1,-53,-131
151	1,3,*1,-5,-375,-1759	157	1,4,*1,-26,148,-148
163	1,6,*1,-18,-160,932	167	1,-21,*1,9,-205,-863
173	1,-10,*1,-22,-212,3448	179	1,-11,*1,13,-167,-313
181	1,2,*1,-18,92,-104	191	1,21,*1,19,71,43
193	1,16,*1,-18,-172,3188	197	1,18,*1,10,-164,-1432
199	1,-4,*1,44,488,92	211	1,2,*1,-10,-52,200
223	1,14,*1,6,-148,116	227	1,-6,*1,-10,-580,6404
229	1,-21,*1,-15,-517,8311	233	1,8,*1,4,-128,416
239	1,0,*1,6,-172,548	241	1,11,*1,17,-117,-989
251	1,-20,*1,-30,-60,548	257	1,28,*1,12,-352,608
263	1,28,*1,26,136,172	269	1,-9,*1,-7,-77,535
271	1,14,*1,-30,-36,216	277	1,8,*1,48,536,-976
281	1,-17,*1,21,-433,-3473	283	1,9,*1,-61,1175,-7213
293	1,-26,*1,-6,-468,4968	307	1,16,*1,-48,648,-2192
311	1,-16,*1,-4,-144,832	313	1,6,*1,8,-656,2260
317	1,-3,*1,35,-45,-4703	331	1,-28,*1,4,-232,1072
337	1,-10,*1,32,-4,-3484	347	1,30,*1,10,-20,-136

N = 53

p	F(X)=f*(X)f(X)	p	F(X)=f*(X)f(X)
349	1,-24,*1,10,-424,-4892	353	1,18,*1,-48,740,-3596
359	1,-9,*1,-37,-447,19057	367	1,-22,*1,-22,-692,14548
373	1,10,*1,8,-132,-740	379	1,-11,*1,7,-285,1259
383	1,-16,*1,-38,348,-436	389	1,-12,*1,24,-40,-2704
397	1,-18,*1,42,-612,-30024	401	1,32,*1,-60,1056,-5552
409	1,-19,*1,75,1835,14701	419	1,12,*1,6,-268,1172
421	1,-14,*1,22,108,8	431	1,36,*1,32,148,-1604
433	1,7,*1,37,155,-2033	439	1,34,*1,14,-900,-14744
443	1,33,*1,45,605,2411	449	1,11,*1,9,-373,-3317
457	1,-38,*1,-22,-140,2008	461	1,9,*1,99,3203,33953
463	1,23,*1,7,-143,-139	467	1,28,*1,36,272,416
479	1,-3,*1,3,-837,8235	487	1,-20,*1,36,296,592
491	1,-27,*1,-45,639,-2889	499	1,23,*1,23,-363,-8291
503	1,-16,*1,-6,-420,316	509	1,-2,*1,18,-916,-14120
521	1,45,*1,-69,1355,-5471	523	1,42,*1,-26,-252,8
541	1,-22,*1,18,-228,-3944	547	1,38,*1,-50,600,500
557	1,-14,*1,24,152,116	563	1,1,*1,-41,203,1627
569	1,-24,*1,-24,-648,9936	571	1,4,*1,-18,-628,-3484
577	1,-10,*1,-74,1740,-13192	587	1,-28,*1,-12,-244,1684
593	1,-25,*1,1,-1493,-15193	599	1,30,*1,-98,2964,-25720
601	1,-22,*1,20,-212,-3020	607	1,8,*1,-44,408,1712
613	1,16,*1,-32,80,2608	617	1,42,*1,28,-664,2764
619	1,-16,*1,8,-1052,8572	631	1,-7,*1,15,-661,59
641	1,-46,*1,-42,116,6728	643	1,8,*1,28,-776,-17200
647	1,-38,*1,-18,-324,2916	653	1,38,*1,-22,-972,-6536
659	1,-12,*1,70,1500,9500	661	1,1,*1,-17,-101,125
673	1,10,*1,-26,-372,-1048	677	1,-40,*1,-24,-288,-688
683	1,-2,*1,74,1020,-13304	691	1,-41,*1,-79,1847,-10915
701	1,-12,*1,-26,-124,4108	709	1,-6,*1,22,-212,296
719	1,-24,*1,-30,-60,548	727	1,30,*1,-18,-340,4472
733	1,-14,*1,-26,-1140,14216	739	1,-15,*1,11,-1453,-21145
743	1,26,*1,30,48,-116	751	1,0,*1,20,-800,-2192
757	1,43,*1,-11,-749,9335	761	1,28,*1,94,2552,15436
769	1,2,*1,-74,332,43336	773	1,-40,*1,-62,1248,-8212
787	1,4,*1,-50,524,-1244	797	1,-16,*1,42,-148,124
809	1,16,*1,10,-148,-932	811	1,-42,*1,-30,-900,8500
821	1,24,*1,52,816,3440	823	1,-26,*1,86,1532,-12808
827	1,-47,*1,85,2249,18451	829	1,30,*1,14,-1156,-20872
839	1,30,*1,10,-1460,-1432	853	1,56,*1,-48,320,1072
857	1,-42,*1,18,-28,-104	859	1,58,*1,-22,-1108,14984
863	1,30,*1,-2,-652,232	877	1,2,*1,-26,44,1000
881	1,-16,*1,-50,652,-1972	883	1,36,*1,-46,-1076,42796
887	1,7,*1,-101.3385,-37663	907	1,-46,*1,-38,-280,11404
911	1,32,*1,0,-1888,-25040	919	1,-15,*1,25,-1087,-15341
929	1,-38,*1,-30,-540,3672	937	1,55,*1,-55,207,13747

N = 53

p	F(X)=f*(X)f(X)	p	F(X)=f*(X)f(X)
941	1,-10,*1,-110,3788,-41240	947	1,12,*1,96,2888,25972
953	1,42,*1,2,-2132,-9704	967	1,-52,*1,-64,1020,-3356
971	1,-42,*1,6,-72,108	977	1,20,*1,-36,-496,7856
983	1,-46,*1,110,3980,47192	991	1,-34,*1,18,-2008,556
997	1,13,*1,43,-429,-3415		

N = 59

p	F(X)	p	F(X)
2	1,0,-9,2,16,-8	3	1,2,-8,-11,13,-1
5	1,-2,-14,23,19,1	7	1,-2,-16,43,13,-71
11	1,2,-24,-24,128,-64	13	1,-8,0,88,-48,-224
17	1,1,-45,-81,224,412	19	1,-6,-28,217,-167,-469
23	1,8,0,-88,-112,-32	29	1,-14,10,389,-485,-1757
31	1,0,-116,56,1280,256	37	1,-18,80,64,-592,32
41	1,10,-70,-693,-93,217	43	1,4,-28,-56,256,-128
47	1,20,124,192,-320,-256	53	1,10,-22,-77,91,73
61	1,-22,56,1368,-8448,11072	67	1,0,-188,-200,5472,-8896
71	1,-3,-77,15,1696,3424	73	1,8,-120,-1128,-336,9952
79	1,-10,-60,1005,-3631,3923	83	1,-6,-260,848,15296,29152
89	1,-10,-80,600,1984,-1984	97	1,22,60,-576,-352,2656
101	1,4,-280,-504,16560,-1568	103	1,2,-224,736,3184,2144
107	1,22,-4,1323,4377,-2837	109	1,-62,1460,-16160,83200,-159968
113	1,-2,-256,-1352,-960,2432	127	1,14,-384,-4743,33493,372751
131	1,-4,-264,120,12976,-32	137	1,30,118,-3033,-21617,8417
139	1,-13,-269,1473,28288,80384	149	1,-28,-44,5752,-18848,-204352
151	1,-18,-168,4944,-28528,47072	157	1,-10,-360,6200,-29376,39296
163	1,-9,-741,7029,122960,-1218752	167	1,38,384,-1041,-31139,-100259
173	1,20,-88,-4056,-26064,-45472	179	1,-40,460,-392,-12032,-18176
181	1,-2,-414,2209,17163,-4781	191	1,18,-136,-2704,3600,82208
193	1,-18,2,767,-1789,-311	197	1,-3,-301,-181,14616,-9076
199	1,14,-4,-289,33,1237	211	1,28,108,-1512,-2912,-1216
223	1,5,-493,-1513,44656,220448	227	1,18,-32,-1304,-576,-64
229	1,-26,216,-440,-1920,6592	233	1,50,820,5440,13984,11552
239	1,-70,1592,-10637,-46371,448621	241	1,-6,-626,4053,69535,-292829
251	1,46,584,355,-27219,-83671	257	1,2,-306,1709,-3049,1627
263	1,-18,-124,2687,-8087,2437	269	1,58,1232,11192,33984,-28544
271	1,-22,-560,9885,84469,-850417	277	1,-22,-442,9931,33351,-854951
281	1,-18,-214,2819,-149,-3227	283	1,36,-204,-11720,23296,411008
293	1,-6,-1346,6433,408855,-2334961	307	1,26,-856,-19077,129677,2786917
311	1,-26,-676,20947,-102191,18697	313	1,-32,12,7912,-67552,55232
317	1,14,-456,-1584,44048,-49696	331	1,30,-504,-7987,135661,-471173
337	1,-4,-1080,3944,183792,59936	347	1,-34,-20,6448,-7040,-318304
349	1,-84,2244,-15000,-164992,1554688	353	1,-48,736,-3576,-4208,47584
359	1,22,-728,-6215,184805,-802481	367	1,40,88,-11096,-83536,275296
373	1,-61,515,21749,-222296,-1839052	379	1,2,-1472,-3669,279709,1765397
383	1,-48,784,-5056,12288,-8192	389	1,-5,-1085,18973,-80056,98356
397	1,0,-780,1352,77536,202432	401	1,-2,-372,816,28928,-104288
409	1,30,172,-1424,-10752,-16096	419	1,-2,-880,448,94384,-361184

N = 59

p	F(X)
21	1,-54,0,35256,-457792,1053056
33	1,-34,178,1659,-13877,23189
43	1,-66,248,49352,-587904,-4214272
57	1,-46,-868,52128,122624,-14180576
63	1,-18,-532,9296,-3840,-251488
79	1,31,155,-1187,1984,-992
91	1,62,-104,-74789,-1672795,-11097527
99	1,50,-908,-77011,-1112287,-3724489
03	1,10,-268,-1664,-1152,3104
21	1,-1,-973,-4767,201968,1598596
41	1,-108,4000,-52040,-44400,3339488
57	1,-70,1102,8779,-158633,-289327
69	1,-72,660,51672,-1282816,7955072
77	1,-6,-1474,-2459,586615,4980059
93	1,62,762,-14259,-352253,-1891961
01	1,-10,-2488,10456,1537536,4456192
13	1,-40,-424,14208,39296,-138752
19	1,10,-132,-1485,-1055,5813
41	1,-75,1331,7651,-184376,131756
47	1,-6,-2272,23767,852197,-5187511
59	1,24,-1856,-14888,698256,-943264
73	1,52,-1192,-62752,431616,16610816
83	1,-38,-328,32752,-499184,2387104
01	1,34,-1060,-37736,25984,4134016
19	1,18,-1992,-72144,-842224,-3277792
27	1,0,-800,5440,122624,-1125376
39	1,-28,-1144,18344,178288,-1802848
51	1,88,1896,-10632,-423632,-1251232
61	1,-50,-238,17725,184731,436727
73	1,120,5300,106040,941024,2994496
97	1,46,-436,-3968,19680,101216
11	1,46,-1008,-60992,-432464,-411104
23	1,6,-376,-472,14656,-11456
29	1,42,-1058,-44719,272487,10202143
53	1,58,338,-16191,-87141,1433239
59	1,-60,864,4888,-152816,636512
77	1,10,-2234,-20011,748519,-3311437
83	1,-70,20,34139,299617,378101
07	1,2,-2280,20273,869669,-9352037
19	1,46,-236,-15616,105760,176096
37	1,-128,5928,-113144,582064,3642976
41	1,44,-1768,-78296,-620496,1141792
53	1,70,824,-15728,-102896,1043296
71	1,-46,-196,22555,-82959,-1705291
83	1,80,372,-88336,-1692288,-6199552
97	1,38,-1342,-331,84099,102079

p	F(X)
431	1,-30,-232,15128,-145408,323584
439	1,45,563,-545,-48000,-213632
449	1,18,-1006,-23587,-124445,-136517
461	1,-42,184,4752,-44528,101984
467	1,50,308,-10512,-129984,-341152
487	1,98,2844,-1809,-1254135,-14287847
509	1,-42,-520,27688,-121920,-1049216
523	1,2,-1292,-7937,90145,420473
547	1,56,672,-5952,-77056,453632
563	1,58,972,2976,-22336,-75104
571	1,-74,244,90992,-2360000,17488544
587	1,-24,-892,16792,-57888,-87488
599	1,-22,-616,2965,47493,-156769
607	1,-6,-2072,1007,798381,-238367
617	1,-2,-474,993,39743,-123653
631	1,-64,1520,-16192,71680,-77824
643	1,-54,548,4325,-51255,-20881
653	1,46,-30,-19169,-113677,612281
661	1,-78,1474,11503,-355909,-305827
677	1,-38,-1176,40464,-48304,-22496
691	1,32,-1104,-15048,-43952,-6368
709	1,-102,1322,170141,-6728621,71468251
733	1,-41,59,10793,-52920,-358844
743	1,-77,2203,-28447,155464,-234352
757	1,-42,466,1625,-52797,218539
769	1,-8,-180,760,8480,14528
787	1,-28,-4496,133312,4956160,-15502131
809	1,28,-1744,-27776,438784,3859456
821	1,-34,-2680,99960,-82944,-415936
827	1,87,1411,-51691,-1690728,-12203408
839	1,18,-1232,-30776,-24832,2322752
857	1,-32,-2040,46584,981424,-10167328
863	1,48,-784,-32248,464464,-336992
881	1,-34,-2292,73952,794944,-26696992
887	1,-18,-1692,46784,-183104,-1712288
911	1,58,-1740,-148821,-2815559,-1683261
929	1,14,-592,-7256,72384,711872
947	1,34,-164,-13291,-100415,-19337
967	1,-144,7908,-201736,2250496,-7129088
977	1,80,824,-40792,-520656,2786464
991	1,22,-4436,-61840,4067744,-25649632

N = 61

p	F(X)=f*(X)f(X)
2	1,1,*1,-1,-3,1
5	1,3,*1,1,-9,-13
11	1,5,*1,-13,53,-67
17	1,-4,*1,2,-8,4
23	1,9,*1,-5,5,1
31	1,0,*1,2,-76,116
41	1,-5,*1,-3,-61,191
47	1,-4,*1,4,-88,16
59	1,-9,*1,-29,231,-325
71	1,8,*1,-14,-12,92
79	1,-3,*1,-13,-51,625
89	1,4,*1,4,-56,80
101	1,0,*1,10,0,-148
107	1,2,*1,-26,92,1096
113	1,-1,*1,9,-133,-1061
131	1,16,*1,-8,-24,92
139	1,11,*1,3,-1,-5
151	1,-11,*1,-3,-277,2033
163	1,-18,*1,-10,-284,-668
173	1,-10,*1,10,-4,-8
181	1,-8,*1,20,-80,-1088
193	1,8,*1,20,80,-64
199	1,-6,*1,50,812,4280
223	1,-23,*1,11,-183,-1343
229	1,-9,*1,9,-133,-25
239	1,-2,*1,38,404,1220
251	1,12,*1,-38,296,-548
263	1,16,*1,28,20,-2732
271	1,-14,*1,2,-496,-2404
281	1,0,*1,-28,176,272
293	1,-18,*1,2,-668,856
311	1,15,*1,-15,-43,823
317	1,30,*1,-58,1068,-6344
337	1,2,*1,-26,-748,17896
349	1,24,*1,-14,-116,380
359	1,-12,*1,-14,-564,8780
373	1,10,*1,-24,-532,7108
383	1,-5,*1,37,297,131
397	1,-8,*1,-6,-580,6652
409	1,-30,*1,2,-196,680
421	1,-8,*1,-2,-8,-4
433	1,8,*1,44,584,2096
443	1,-12,*1,4,-256,-1424
457	1,20,*1,-90,2672,-26108
463	1,4,*1,-36,-48,3904

p	F(X)=f*(X)f(X)
3	1,2,*1,-2,-4,4
7	1,-1,*1,3,-1,-1
13	1,-1,*1,9,11,-37
19	1,4,*1,0,-48,-20
29	1,6,*1,-4,-4,20
37	1,-8,*1,6,-36,-108
43	1,8,*1,14,56,68
53	1,-6,*1,2,-12,-8
67	1,7,*1,-9,-85,559
73	1,11,*1,1,-45,-25
83	1,-4,*1,8,-64,-256
97	1,14,*1,-10,-116,1096
103	1,-4,*1,-12,0,108
109	1,17,*1,-13,3,145
127	1,-6,*1,18,68,52
137	1,-9,*1,-3,-253,859
149	1,-19,*1,-9,11,5
157	1,4,*1,10,-300,-3412
167	1,12,*1,32,148,-1604
173	1,18,*1,-42,476,-760
191	1,-3,*1,-31,139,-167
197	1,3,*1,29,203,323
211	1,-4,*1,-22,-52,764
227	1,-21,*1,-11,-483,5891
233	1,14,*1,40,440,796
241	1,3,*1,-7,-345,1675
257	1,22,*1,-2,-36,184
269	1,18,*1,10,-268,-1160
277	1,-10,*1,-4,-256,92
283	1,-6,*1,-34,232,-68
307	1,19,*1,-7,-291,919
313	1,6,*1,30,188,-536
331	1,17,*1,13,35,25
347	1,-8,*1,-32,264,-556
353	1,-19,*1,15,-1009,-18043
367	1,-14,*1,38,428,1352
379	1,14,*1,-18,-696,12580
389	1,14,*1,34,324,920
401	1,-16,*1,28,208,464
419	1,-4,*1,-50,-92,21380
431	1,-6,*1,-2,-388,-1304
439	1,0,*1,44,464,860
449	1,35,*1,29,191,335
461	1,18,*1,-6,-756,2808
467	1,-11,*1,21,35,-691

N = 61

p	F(X)=f*(X)f(X)	p	F(X)=f*(X)f(X)
479	1,-14,*1,-22,-76,-40	487	1,12,*1,-20,-176,-4
491	1,28,*1,-8,-164,-388	499	1,-13,*1,-45,-225,16875
503	1,-10,*1,22,-48,-604	509	1,-28,*1,58,1076,6340
521	1,20,*1,58,140,-23300	523	1,9,*1,19,-483,-871
541	1,-28,*1,8,-928,8576	547	1,29,*1,31,169,137
557	1,28,*1,40,320,-512	563	1,10,*1,22,-212,-4588
569	1,15,*1,1,-33,-85	571	1,-38,*1,46,252,344
577	1,-10,*1,-8,-512,5996	587	1,-32,*1,22,-268,-1916
593	1,6,*1,-12,0,108	599	1,35,*1,-45,-225,16875
601	1,43,*1,-15,-205,587	607	1,26,*1,46,620,2344
613	1,6,*1,2,-980,-10856	617	1,-10,*1,-46,620,-2008
619	1,28,*1,0,-1792,16000	631	1,-25,*1,-23,-407,2183
641	1,-46,*1,-46,372,1432	643	1,4,*1,6,-28,-148
647	1,-39,*1,1,-533,-4687	653	1,-46,*1,-54,492,-1208
659	1,34,*1,-62,168,25460	661	1,-34,*1,-12,-708,10196
673	1,-32,*1,10,-2412,-17956	677	1,32,*1,-40,-136,7856
683	1,-26,*1,-106,3736,-43772	691	1,-16,*1,68,1392,8896
701	1,-18,*1,-34,-212,2152	709	1,34,*1,40,-1308,-50980
719	1,46,*1,-38,-796,8020	727	1,-8,*1,-52,528,3952
733	1,-49,*1,17,-1597,2267	739	1,-45,*1,13,-151,-1625
743	1,-27,*1,-63,95,32129	751	1,10,*1,38,-452,-6056
757	1,-27,*1,-1,-1813,-2479	761	1,26,*1,88,2248,13124
769	1,52,*1,62, 964,580	773	1,46,*1,-34,148,-152
787	1,-48,*1,38,-856,-33556	797	1,23,*1,17,-1617,-19589
809	1,15,*1,-55,-533,25735	811	1,-7,*1,45,-553,-30647
821	1,36,*1,52,-592,-41792	823	1,12,*1,38,16,-716
827	1,-8,*1,-60,1172,-7388	829	1,-3,*1,-49,-389,28285
839	1,30,*1,6,-148,-920	853	1,43,*1,5,-1325,15931
857	1,-37,*1,-67,643,11167	859	1,-6,*1,50,572,20
863	1,-16,*1,64,472,-13936	877	1,12,*1,-48,488,-304
881	1,29,*1,19,-265,-3119	883	1,-9,*1,-93,2295,-15201
887	1,-16,*1,18,-696,3364	907	1,-12,*1,30,-2116,-67244
911	1,-2,*1,-50,620,-668	919	1,56,*1,-64,216,26800
929	1,3,*1,-3,-109,-305	937	1,21,*1,-5,-421,2641
941	1,6,*1,20,-868,-8212	947	1,41,*1,77,623,-26479
953	1,-14,*1,8,-2212,-42844	967	1,-14,*1,58,616,428
971	1,6,*1,-2,-2612,-37816	977	1,18,*1,6,-220,904
983	1,36,*1,70,1540,10196	991	1,48,*1,88,1808,8944
997	1,56,*1,-6,-772,388		

N = 67

p	$F(X)=f^*(X)f_1(X)f_2(X)$	p	$F(X)=f^*(X)f_1(X)f_2(X)$
2	1,3,1,*1,-2,*1,1,-1	3	1,3,1,*1,2,*1,-1,-1
5	1,3,*1,3,*1,-2,*1,-4,-1	7	1,1,-11,*1,2,*1,-1,-1
11	1,0,-5,*1,4,*1,-1,*1,-1	13	1,7,1,*1,-2,*1,1,-1
17	1,6,4,*1,-3,*1,-6,4	19	1,-1,-11,*1,-7,*1,11,29
23	1,-6,-11,*1,-9,*1,2,-19	29	1,6,-11,*1,5,*1,-10,5
31	1,1,*1,1,*1,10,*1,0,-45	37	1,1,-11,*1,1,*1,-3,1
41	1,3,1,*1,0,*1,-5,-25	43	1,-3,-9,*1,2,*1,9,-11
47	1,15,55,*1,1,*1,7,11	53	1,9,*1,9,*1,-10,*1,0,-45
59	1,-6,*1,-6,*1,-9,*1,6,*1,6	61	1,7,-89,*1,2,*1,9,9
71	1,-12,31,*1,0,*1,0,-245	73	1,4,*1,4,*1,7,*1,-8,*1,-8
79	1,7,-89,*1,8,*1,11,-31	83	1,15,-5,*1,-4,*1,-13,31
89	1,0,-5,*1,-7,*1,16,19	97	1,-2,-179,*1,0,*1,0,-45
101	1,9,-11,*1,-2,*1,-19,59	103	1,5,-95,*1,16,*1,-3,1
107	1,-24,99,*1,7,*1,-16,19	109	1,3,-9,*1,-2,*1,-9,-11
113	1,-33,271,*1,12,*1,-11,-71	127	1,5,-5,*1,-7,*1,21,79
131	1,3,*1,3,*1,12,*1,-6,-11	137	1,12,-9,*1,-12,*1,26,149
139	1,3,*1,3,*1,-22,*1,-24,139	149	1,-9,-191,*1,-21,*1,3,-59
151	1,1,*1,1,*1,-3,*1,-6,-71	157	1,-13,-59,*1,-9,*1,-13,-239
163	1,7,1,*1,-19,*1,-13,41	167	1,-12,-284,*1,-24,*1,-14,*1,-14
173	1,39,349,*1,-11,*1,-17,61	179	1,18,76,*1,12,*1,-6,-36
181	1,7,-89,*1,-7,*1,11,19	191	1,6,-11,*1,6,*1,32,211
193	1,-27,171,*1,23,*1,1,-1	197	1,18,61,*1,2,*1,-36,319
199	1,13,-239,*1,-7,*1,-39,349	211	1,11,19,*1,12,*1,-1,-61
223	1,-18,36,*1,-11,*1,-2,-404	227	1,3,-359,*1,-3,*1,-21,-171
229	1,31,229,*1,-4,*1,7,-269	233	1,-12,16,*1,-10,*1,20,-80
239	1,27,151,*1,20,*1,-15,-155	241	1,-45,495,*1,19,*1,-17,11
251	1,-18,76,*1,2,*1,14,-196	257	1,18,-239,*1,1,*1,2,-79
263	1,3,-99,*1,-16,*1,23,121	269	1,-9,131,*1,-2,*1,-29,149
271	1,-36,279,*1,-8,*1,34,269	277	1,-12,-684,*1,2,*1,4,-76
281	1,-15,55,*1,18,*1,11,-71	283	1,18,-99,*1,3,*1,-14,-131
293	1,18,-99,*1,-18,*1,-26,89	307	1,-8,-164,*1,25,*1,-20,-220
311	1,0,-720,*1,-18,*1,24,64	313	1,21,99,*1,16,*1,7,-199
317	1,12,-569,*1,18,*1,-44,439	331	1,-20,-80,*1,6,*1,12,16
337	1,-17,-209,*1,-22,*1,11,-251	347	1,0,-125,*1,30,*1,10,-295
349	1,6,*1,6,*1,-6,*1,28,-124	353	1,-3,-359,*1,0,*1,-55,755
359	1,18,*1,18,*1,-19,*1,-28,116	367	1,-2,-404,*1,8,*1,6,-836
373	1,17,-29,*1,0,*1,5,-55	379	1,-4,*1,-4,*1,18,*1,-24,64
383	1,39,229,*1,16,*1,17,-589	389	1,6,-236,*1,10,*1,10,-20
397	1,51,549,*1,31,*1,7,-139	401	1,-9,9,*1,20,*1,45,475
409	1,14,-356,*1,-8,*1,-6,-596	419	1,0,-500,*1,9,*1,28,116
421	1,55,745,*1,21,*1,-13,-19	431	1,-60,895,*1,9,*1,8,11
433	1,7,-1349,*1,18,*1,21,-251	439	1,17,-839,*1,-23,*1,-31,209
443	1,30,205,*1,-2,*1,56,739	449	1,-33,211,*1,-39,*1,27,-29
457	1,46,349,*1,-29,*1,-18,-99	461	1,21,99,*1,-37,*1,21,-341

N = 67

p	F(X)=f*(X)f$_1$(X)f$_2$(X)	p	F(X)=f*(X)f$_1$(X)f$_2$(X)
463	1,35,205,*1,8,*1,21,-101	467	1,-24,19,*1,12,*1,-36,279
479	1,-30,-20,*1,29,*1,-2,-244	487	1,-26,-551,*1,-2,*1,16,19
491	1,-30,45,*1,9,*1,-2,-719	499	1,25,*1,25,*1,-24,*1,-28,71
503	1,-66,1009,*1,2,*1,-16,19	509	1,12,-144,*1,-9,*1,-4,*1,-4
521	1,18,*1,18,*1,-4,*1,72,1276	523	1,-17,-29,*1,19,*1,3,-1049
541	1,-36,144,*1,-14,*1,12,-144	547	1,-31,139*1,-38,*1,29,109
557	1,63,991,*1,2,*1,-1,-661	563	1,6,-36,*124,*1,58,796
569	1,-18,-44,*1,-9,*1,2,-44	571	1,-5,-545,*1,23,*1,31,-121
577	1,-32,211,*1,24,*1,-2,-79	587	1,-57,781,*1,-12,*1,41,419
593	1,60,880,*1,-18,*1,-36,-176	599	1,-12,16,*1,32,*1,24,-576
601	1,-26,-236,*1,5,*1,-10,-380	607	1,-67,1021,*1,-8,*1,-11,-251
613	1,,2,-179,*1,-39,*1,42,421	617	1,45,-45,*1,1,*1,-3,-9
619	1,82,1636,*1,-20,*1,30,-180	631	1,29,109,*1,50,*1,-45,475
641	1,-24,-701,*1,-20,*1,10,-1255		
643	1,21,9,*1,-12,*1,21,-1251	647	1,54,724,*1,-6,*1,38,356
653	1,0,-20,*1,18,*1,-44,404	659	1,42,361,*1,9,*1,18,-1199
661	1,-60,495,*1,18, 1,-14,-31	673	1,11,-881,*1,14,*1,-77,1421
677	1,,0,-125,*1,-12,*1,-34,-31	683	1,-21,109,*1,30,*1,-35,275
691	1,-8,*1,-8,*1,-15,*1,-40,80	701	1,,-36,-176,*1,-20,*1,-20,-880
709	1,-16,-116,*1,10,*1,0,-1620	719	1,,-90,2005,*1,-25,*1,-50,445
727	1,-28,*1,-28,*1,2,*1,4,-496	733	1,-4,*1,-4,*1,0,*1,-40,80
739	1,-11,-251,*1,20,*1,-25,55	743	1,0,-605,*1,24,*1,-72,1291
751	1,-48,171,*1,-35,*1,-20,-145	757	1,-50,445,*1,-40,*1,60,895
761	1,12,*1,12,*1,-47,*1,-24,-1136		
769	1,8,-29,*1,18,*1,46,209	773	1,6,-491,*1,-9,*1,-58,821
787	1,,14,-131,*1,-52,*1,-44,479	797	1,-9,-1511,*1,6,*1,-93,2161
809	1,15,-45,*1,6,*1,87,1861	811	1,56,379,*1,-38,*1,34,-431
821	1,36,319,*1,25,*1,20,95	823	1,7,-899,*1,-51,*1,-37,61
827	1,-30,220,*1,15,*1,30,220	829	1,-32,149,*1,55,*1,40,-5
839	1,-24,-836,*1,23,*1,-4,-1276	853	1,-19,-821,*1,-29,*1,-63,711
857	1,18,-99,*1,6,*1,12,-1089	859	1,-43,-89,*1,,8,*1,1,-61
863	1,-51,549,*1,-1,*1,-27,181	877	1,-16,-341,*1,-41,*1,88,1811
881	1,48,571,*1,57,*1,-16,-181	883	1,-28,151,*1,44,*1,38,41
887	1,12,-809,*1,31,*1,-68,1151	907	1,49,589,*1,43,*1,-19,89
911	1,93,2151,*1,51,*1,-35,-245	919	1,74,1189,*1,-12,*1,-4,-241
929	1,-18,1,*1,-50,*1,0,-245	937	1,-36,279,*1,-30,*1,110,3005
941	1,54,9,*1,-8,*1,4,-121	947	1,39,99,*1,-9,*1,-33,271
953	1,-18,-419,*1,7,*1,-26,-1451	967	1,62,241,*1,0,*1,50,605
971	1,-30,-1055,*1,15,*1,-10,-955		
977	1,24,-101,*1,13,*1,36,79	983	1,6,-711,*1,-16,*1,8,-1429
991	1,-81,1539,*1,-44,*1,67,841	997	1,12,-1089,*1,-6,*1,8,-29

N = 71

p	$F(X)=f_1(X)f_2(X)$	p	$F(X)=f_1(X)f_2(X)$
2	1,0,-5,3,*1,1,-4,-3	3	1,1,-8,-3,*1,-1,-4,3
5	1,3,-2,-7,*1,-5,-2,25	7	1,-2,-16,24,*1,-2,-16,24
11	1,2,-16,-24,*1,0,-20,24	13	1,-4,*1,-4,*1,-4,*1,6,-8,-56
17	1,-2,-16,24,*1,2,-32,-24	19	1,-11,36,-35,*1,-1,-20,-25
23	1,4,*1,4,*1,4,*1,-8,-12,72	29	1,5,-2,-25,*1,-11,14,71
31	1,-4,*1,-4,*1,-4,*1,6,-8,-56	37	1,-9,-26,37,*1,15,70,97
41	1,-14,48,-8,*1,2,-68,56	43	1,17,72,81,*1,-13,48,-45
47	1,10,0,-72,*1,-4,-28,40	53	1,0,-20,-24,*1,18,28,-456
59	1,22,144,280,*1,4,-36,-152	61	1,-8,-76,536,*1,-16,16,320
67	1,12,-32,-64,*1,12,28,-40	73	1,-3,-2,7,*1,-27,202,-461
79	1,-7,-136,525,*1,3,-44,15	83	1,-23,172,-419,*1,19,96,63
89	1,-13,-82,45,*1,-1,-22,-27	97	1,-4,-36,152,*1,-22,144,-280
101	1,3,-62,129,*1,-9,22,-15	103	1,9,-48,-191,*1,7,-152,-53
107	1,12,-32,-64,*1,-28,192,-64	109	1,-19,-14,735,*1,1,-26,15
113	1,0,-260,-1544,*1,8,-12,-72	127	1,26,60,-1576,*1,-10,-64,-8
131	1,13,-12,-371,*1,-9,-236,2287	137	1,22,-48,-1256,*1,-8,-112,320
139	1,-26,192,-360,*1,-8,-68,-56	149	1,10,-132,280,*1,4,-84,-392
151	1,27,196,367,*1,-47,732,-3779	157	1,7,-30,25,*1,23,-14,-691
163	1,-10,-72,504,*1,42,508,1816	167	1,-55,984,-5679,*1,-9,-20,175
173	1,6,-288,-648,*1,22,92,-216	179	1,3,-356,-945,*1,1,-124,477
181	1,-38,376,-888,*1,6,-200,-1176	191	1,23,-80,-925,*1,-15,-260,-743
193	1,2,-528,-4824,*1,-12,-132,1304	197	1,0,-80,-192,*1,20,92,120
199	1,25,128,185,*1,-37,436,-1657	211	1,-14,-68,504,*1,38,296,648
223	1,-5,-312,2479,*1,5,-740,-8911	227	1,-4,-428,2168,*1,0,-596,-3896
229	1,-23,-114,1935,*1,-11,-518,-821	233	1,21,-242,-1777,*1,-7,-346,-1061
239	1,46,616,1960,*1,-4,-348,200	241	1,-62,1248,-8136,*1,-36,276,-200
251	1,-7,-192,1629,*1,-37,324,315	257	1,12,-380,-200,*1,38,348,360
263	1,15,-144,27,*1,-39,328,-447	269	1,24,36,-1080,*1,34,176,-1032
271	1,-23,168,-387,*1,15,-308,-1225	277	1,3,-386,-991,*1,7,-62,-95
281	1,-20,64,64,*1,10,-8,-200	283	1,54,792,1944,*1,6,-144,-648
293	1,10,-292,984,*1,54,892,4200	307	1,20,-400,-3392,*1,-22,144,-280
311	1,23,-348,-5689,*1,-3,-504,-2039	313	1,-9,-558,-3483,*1,-13,-14,441
317	1,18,88,72,*1,16,-124,-1080	331	1,-18,-516,776,*1,-4,-852,9432
337	1,-56,948,-4392,*1,8,-828,-6616	347	1,-14,-216,2952,*1,16,-80,64
349	1,-10,-288,3240,*1,-36,60,56	353	1,32,272,576,*1,-20,-404,4392
359	1,21,-104,-915,*1,-5,-160,-489	367	1,29,-468,-13999,*1,-53,564,3771
373	1,-7,-330,2243,*1,-3,-38,-61	379	1,-13,48,-45,*1,65,1300,7625
383	1,10,-504,-648,*1,34,220,376	389	1,40,492,1720,*1,-18,-696,-2824
397	1,6,-360,1944,*1,0,-180,-648	401	1,6,-1232,-19368,*1,-6,-144,648
409	1,-75,1782,-12965,*1,-39,-558,24835		
419	1,3,-44,15,*1,41,352,861	421	1,10,-936,-13896,*1,6,-584,-5080
431	1,-17,-168,-9,*1,-47,-104,15409	433	1,8,-1264,-21056,*1,-14,-768,3528
439	1,50,552,-1800,*1,8,-692,5048	443	1,-24,-332,-72,*1,30,112,-1368
449	1,16,-4,-600,*1,68,1376,7104	457	1,38,-352,-17768,*1,-80,2044,-16856
461	1,-4,-180,1208,*1,20,-528,2240	463	1,67,1328,7707,*1,21,-8,-111
467	1,-42,424,-1256,*1,-18,-1092,6536		

N = 71

p	$F(X)=f_1(X)f_2(X)$	p	$F(X)=f_1(X)f_2(X)$
79	1,24,*1,24,*1,24,*1,-30,-72,5400	487	1,-10,-576,536,*1,-2,-80,-200
91	1,18,-72,-216,*1,-30,144,216	499	1,17,-276,-4635,*1,-9,-104,835
03	1,-11,-664,-2727,*1,27,-152,63	509	1,-30,*1,-30,*1,-30,*1,14,-100,-1464
21	1,-23,-266,-389,*1,25,-950,24125	523	1,-14,-40,200,*1,80,2100,18072
41	1,-4,-92,-168,*1,-38,-56,5880	547	1,17,-72,-1099,*1,95,2988,31079
57	1,-19,-1130,24179,*1,-79,1522,743		
63	1,-16,-1284,18488,*1,18,-152,200	569	1,35,-58,-4815,*1,3,-1022,11601
71	1,-65,1200,-6813,*1,-7,-412,3433	577	1,-39,-126,11907,*1,-3,-1022,-11601
87	1,-45,244,5931,*1,-47,212,6489	593	1,-17,86,-111,*1,7,-418,2481
99	1,-8,4,40,*1,-8,-1076,-7880	601	1,-50,624,-1256,*1,-36,-572,6328
07	1,30,220,8,*1,100,3244,33784	613	1,-7,-870,10683,*1,13,-1078,-19441
17	1,-27,-2,447,*1,61,1030,3183	619	1,12,-684,-9720,*1,20,28,-216
31	1,26,128,-488,*1,58,460,-11912	641	1,-3,-386,991, *1,61,942,4315
43	1,64,832,-1536,*1,8,-368,1344	647	1,-32,*1,-32,*1,-32,*1,16,-80,64
53	1,-38,60,4824,*1,-118,4544,-57320		
59	1,19,-1228,-9645,*1,21,-968,-12135		
61	1,32,68,-2952,*1,-18,-1760,33192	673	1,34,-776,-12984,*1,-14,-16,24
77	1,31,310,1009,*1,35,-370,-7523	683	1,-94,2620,-22600,*1,0,-1668,-26008
91	1,52,-364,-32328,*1,-48,148,10872		
01	1,-6,-1040,-10104,*1,60,1012,4728		
09	1,-94,2912,-29720,*1,-10,-2344,50152		
19	1,29,-568,-14175,*1,7,-872,1467	727	1,-4,-1280,-15936,*1,-76,1844,-13944
33	1,42,408,872,*1,-12,-1340,-9272	739	1,-52,-2064,107840,*1,44,-96,-15424
43	1,74,976,-10312,*1,-52,160,-64	751	1,-16,44,168,*1,18,-1172,-19752
57	1,30,144,-904,*1,28,-1476,-43256	761	1,40,464,1344,*1,4,-416,960
69	1,0,-372,2680,*1,-84,1684,-2968	773	1,14,-648,3704,*1,-60,-80,29888
87	1,27,-368,1039,*1,-43,-1392,60309		
97	1,-95,2514,-12429,*1,-31,-1674,24143		
09	1,24,36,-1080,*1,-86,2384,-21480	811	1,-33,-1256,7571,*1,-11,-752,-5663
21	1,-95,2982,-30897,*1,73,622,-28709		
23	1,-4,-468,72,*1,-26,-304,8408	827	1,42,400,600,*1,-112,3956,-44376
29	1,53,818,2935,*1,21,-458,-7885	839	1,29,-568,-14175,*1,-21,-1224,14175
53	1,5,-1774,14827,*1,25,-2402,-37121		
57	1,109,3658,35863,*1,21,-242,-1777		
59	1,-56,492,7000,*1,44,-480,576	863	1,-84,1108,29768,*1,56,492,-40
77	1,-121,4590,-54063,*1,103,2934,17845		
81	1,-25,82,-67,*1,15,-782,-1295	883	1,-48,-432,15552,*1,-30,-944,-5448
87	1,-20,-976,576,*1,48,612,1944	907	1,-92,2348,-13768,*1,-24,-756,12200
11	1,-2,-2788,20616,*1,-12,-704,-960		
19	1,30,-72,-5400,*1,-12,-108,216	929	1,19,-3178,-48495,*1,-5,-206,1389
37	1,-34,-48,5048,*1,-18,-1424,13496		
41	1,-121,4154,-30087,*1,-89,2366,-16623		
47	1,-39,340,9,*1,111,3636,33615	953	1,85,2118,14679,*1,-59,-510,42975
67	1,74,1288,648,*1,-20,100,-72	971	1,-76,1024,12608,*1,8,-2672,-28096
77	1,87,1678,-9459,*1,51,-878,-28755		
83	1,11,-1588,7767,*1,-67,452,19269	991	1,82,2136,17352,*1,14,-472,-3512
97	1,41,-1198,-48677,*1,-67,270,20291		

付　　録 B

$S_2\left(\Gamma_0(29),\ \left(\frac{}{29}\right)\right)$ および $S_2\left(\Gamma_0(37),\ \left(\frac{}{37}\right)\right)$ の原始的な cusp 形式 (primitive form) $f(z)=\sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{2\pi i n z}$, $a_1=1$ の **Fourier** 係数 a_p の値の表をあげる．$S_2\left(\Gamma_0(29),\ \left(\frac{}{29}\right)\right)$ および $S_2\left(\Gamma_0(37),\ \left(\frac{}{37}\right)\right)$ はともに 2 次元であるから $g(z)=\sum_{n=1}^{\infty} \bar{a}_n e^{2\pi i n z}$ が他の 1 つの原始的な cusp 形式を与える (§4.6 参照), $\bar{a}_n$ は a_n の複素共役．p は素数であって，$2\leqq p\leqq 3571$．$\left(\frac{p}{29}\right)$, $\left(\frac{p}{37}\right)$ はそれぞれ **Legendre** 記号であって，表ではその符号を p の次の欄に記している．

$S_2(\Gamma_0(29),\ (\frac{\ }{29}))$

p	$(\frac{p}{29})$	a_p	p	$(\frac{p}{29})$	a_p	p	$(\frac{p}{29})$	a_p
2	-	$\sqrt{-5}$	3	-	$-\sqrt{-5}$	5	+	-3
7	+	2	11	-	$\sqrt{-5}$	13	+	-1
17	-	$-2\sqrt{-5}$	19	-	0	23	+	6
29		$-3+2\sqrt{-5}$	31	-	$3\sqrt{-5}$	37	-	0
41	-	$-2\sqrt{-5}$	43	-	$-3\sqrt{-5}$	47	-	$\sqrt{-5}$
53	+	-9	59	+	6	61	-	$6\sqrt{-5}$
67	+	8	71	+	0	73	-	0
79	-	$-3\sqrt{-5}$	83	+	-6	89	-	$-2\sqrt{-5}$
97	-	$6\sqrt{-5}$	101	-	$-8\sqrt{-5}$	103	+	-4
107	+	18	109	+	5	113	-	$4\sqrt{-5}$
127	-	0	131	-	$4\sqrt{-5}$	137	-	$4\sqrt{-5}$
139	+	-10	149	+	15	151	+	-10
157	-	$-6\sqrt{-5}$	163	-	$-9\sqrt{-5}$	167	+	-12
173	+	-6	179	+	0	181	+	5
191	-	$4\sqrt{-5}$	193	-	$-6\sqrt{-5}$	197	+	-18
199	+	14	211	-	$3\sqrt{-5}$	223	+	-16
227	+	12	229	-	$-6\sqrt{-5}$	233	+	-9
239	+	6	241	+	-25	251	-	$7\sqrt{-5}$
257	+	-3	263	-	$-5\sqrt{-5}$	269	-	$-2\sqrt{-5}$
271	-	$-9\sqrt{-5}$	277	+	2	281	+	3
283	+	14	293	-	$4\sqrt{-5}$	307	-	$9\sqrt{-5}$
311	-	$4\sqrt{-5}$	313	+	29	317	-	$10\sqrt{-5}$
331	-	$15\sqrt{-5}$	337	-	$-6\sqrt{-5}$	347	+	-12
349	+	-1	353	+	-6	359	-	$\sqrt{-5}$
367	-	$-12\sqrt{-5}$	373	+	-31	379	-	0
383	+	6	389	-	$-8\sqrt{-5}$	397	+	-7
401	+	15	409	-	$12\sqrt{-5}$	419	+	24
421	-	$6\sqrt{-5}$	431	+	18	433	-	0
439	+	-34	443	-	$-8\sqrt{-5}$	449	-	$16\sqrt{-5}$
457	+	2	461	-	$4\sqrt{-5}$	463	+	26
467	-	$\sqrt{-5}$	479	-	$-5\sqrt{-5}$	487	+	2
491	-	$-11\sqrt{-5}$	499	+	-10	503	-	$7\sqrt{-5}$
509	+	15	521	+	-27	523	+	-4
541	-	0	547	+	38	557	+	18
563	-	$-5\sqrt{-5}$	569	-	$-8\sqrt{-5}$	571	+	32
577	-	$-18\sqrt{-5}$	587	+	-42	593	+	9
599	-	$13\sqrt{-5}$	601	-	$6\sqrt{-5}$	607	-	$3\sqrt{-5}$
613	+	-31	617	-	$-20\sqrt{-5}$	619	-	$15\sqrt{-5}$
631	+	32	641	-	$10\sqrt{-5}$	643	+	26
647	+	-18	653	-	$22\sqrt{-5}$	659	-	$-17\sqrt{-5}$
661	+	-10	673	+	11	677	-	$-8\sqrt{-5}$
683	+	-36	691	+	20	701	+	-45
709	+	35	719	+	36	727	-	$-12\sqrt{-5}$
733	-	$12\sqrt{-5}$	739	-	$-9\sqrt{-5}$	743	-	$4\sqrt{-5}$
751	-	$12\sqrt{-5}$	757	-	$-18\sqrt{-5}$	761	+	-30

$S_2(\Gamma_0(29), (\frac{\ }{29}))$

p	$(\frac{p}{29})$	a_p	p	$(\frac{p}{29})$	a_p	p	$(\frac{p}{29})$	a_p
769	-	$-6\sqrt{-5}$	773	-	$10\sqrt{-5}$	787	+	32
797	-	$-2\sqrt{-5}$	809	-	$-20\sqrt{-5}$	811	+	-22
821	+	-33	823	-	$-24\sqrt{-5}$	827	-	$-17\sqrt{-5}$
829	-	$-18\sqrt{-5}$	839	-	$\sqrt{-5}$	853	-	$-12\sqrt{-5}$
857	+	57	859	-	$21\sqrt{-5}$	863	+	-36
877	+	-13	881	-	$16\sqrt{-5}$	883	+	-34
887	-	$-5\sqrt{-5}$	907	-	$24\sqrt{-5}$	911	-	$-17\sqrt{-5}$
919	+	-4	929	+	30	937	+	-22
941	+	-3	947	-	$\sqrt{-5}$	953	+	-9
967	-	$21\sqrt{-5}$	971	-	$-8\sqrt{-5}$	977	+	33
983	-	$13\sqrt{-5}$	991	+	-40	997	-	$-12\sqrt{-5}$
1009	+	-31	1013	-	$4\sqrt{-5}$	1019	+	-6
1021	+	53	1031	+	60	1033	-	$-12\sqrt{-5}$
1039	+	14	1049	+	-30	1051	+	20
1061	-	$-2\sqrt{-5}$	1063	-	$9\sqrt{-5}$	1069	+	-34
1087	-	$-3\sqrt{-5}$	1091	-	$-17\sqrt{-5}$	1093	+	26
1097	+	-27	1103	+	24	1109	+	-15
1117	-	$18\sqrt{-5}$	1123	-	$24\sqrt{-5}$	1129	-	$-6\sqrt{-5}$
1151	+	18	1153	+	-49	1163	-	$-17\sqrt{-5}$
1171	-	$9\sqrt{-5}$	1181	-	$-8\sqrt{-5}$	1187	-	$16\sqrt{-5}$
1193	+	6	1201	-	$12\sqrt{-5}$	1213	+	-34
1217	+	-33	1223	+	36	1229	-	$-2\sqrt{-5}$
1231	+	2	1237	-	$-6\sqrt{-5}$	1249	-	$6\sqrt{-5}$
1259	-	$16\sqrt{-5}$	1277	+	-27	1279	-	$9\sqrt{-5}$
1283	+	24	1289	+	-15	1291	-	$-15\sqrt{-5}$
1297	-	$-18\sqrt{-5}$	1301	+	42	1303	-	$15\sqrt{-5}$
1307	-	$\sqrt{-5}$	1319	-	$4\sqrt{-5}$	1321	+	-7
1327	+	-28	1361	-	$-8\sqrt{-5}$	1367	+	-72
1373	-	$-32\sqrt{-5}$	1381	-	$-6\sqrt{-5}$	1399	+	-10
1409	-	$4\sqrt{-5}$	1423	-	$9\sqrt{-5}$	1427	+	-12
1429	-	$-12\sqrt{-5}$	1433	-	$4\sqrt{-5}$	1439	-	$28\sqrt{-5}$
1447	-	$-3\sqrt{-5}$	1451	+	30	1453	-	$12\sqrt{-5}$
1459	+	56	1471	-	$12\sqrt{-5}$	1481	-	$-20\sqrt{-5}$
1483	+	56	1487	-	$-8\sqrt{-5}$	1489	-	$30\sqrt{-5}$
1493	-	$-26\sqrt{-5}$	1499	+	-30	1511	-	$-29\sqrt{-5}$
1523	-	$\sqrt{-5}$	1531	+	20	1543	+	44
1549	-	0	1553	+	-66	1559	+	-60
1567	+	2	1571	+	-30	1579	+	-64
1583	-	$-11\sqrt{-5}$	1597	-	$-6\sqrt{-5}$	1601	+	45
1607	-	$-5\sqrt{-5}$	1609	-	$24\sqrt{-5}$	1613	-	$22\sqrt{-5}$
1619	+	0	1621	-	$18\sqrt{-5}$	1627	-	$15\sqrt{-5}$
1637	+	-18	1657	+	23	1663	-	$-12\sqrt{-5}$
1667	-	$\sqrt{-5}$	1669	+	-10	1693	-	$18\sqrt{-5}$
1697	-	$34\sqrt{-5}$	1699	-	$-3\sqrt{-5}$	1709	-	$16\sqrt{-5}$
1721	-	$22\sqrt{-5}$	1723	-	$-24\sqrt{-5}$	1733	+	-39
1741	+	35	1747	+	68	1753	+	-1

$S_2(\Gamma_0(29), (\frac{\ }{29}))$

p	$(\frac{p}{29})$	a_p	p	$(\frac{p}{29})$	a_p	p	$(\frac{p}{29})$	a_p
1759	-	$-24\sqrt{-5}$	1777	-	$12\sqrt{-5}$	1783	-	$27\sqrt{-5}$
1787	-	$16\sqrt{-5}$	1789	+	29	1801	-	0
1811	+	30	1823	+	24	1831	+	-28
1847	+	12	1861	+	38	1867	-	$12\sqrt{-5}$
1871	-	$-20\sqrt{-5}$	1873	-	$18\sqrt{-5}$	1877	-	$22\sqrt{-5}$
1879	+	-70	1889	+	-9	1901	+	-15
1907	+	18	1913	+	-21	1931	-	$-29\sqrt{-5}$
1933	-	$-12\sqrt{-5}$	1949	+	51	1951	-	$-3\sqrt{-5}$
1973	+	39	1979	+	54	1987	-	$24\sqrt{-5}$
1993	-	$-6\sqrt{-5}$	1997	+	-18	1999	-	$-36\sqrt{-5}$
2003	-	$-11\sqrt{-5}$	2011	-	$-24\sqrt{-5}$	2017	+	-7
2027	-	$-17\sqrt{-5}$	2029	+	-49	2039	+	-66
2053	+	-31	2063	+	66	2069	-	$-2\sqrt{-5}$
2081	+	30	2083	+	-46	2087	+	-18
2089	+	59	2099	-	$-32\sqrt{-5}$	2111	+	-12
2113	+	-79	2129	-	$-14\sqrt{-5}$	2131	-	$15\sqrt{-5}$
2137	+	17	2141	+	-18	2143	-	$-9\sqrt{-5}$
2153	+	-69	2161	-	$18\sqrt{-5}$	2179	+	20
2203	+	-64	2207	-	$-35\sqrt{-5}$	2213	+	9
2221	-	$24\sqrt{-5}$	2237	+	-57	2239	+	80
2243	-	$28\sqrt{-5}$	2251	-	$-27\sqrt{-5}$	2267	+	72
2269	+	14	2273	-	$-32\sqrt{-5}$	2281	-	$12\sqrt{-5}$
2287	+	32	2293	-	$-30\sqrt{-5}$	2297	+	-42
2309	-	$-14\sqrt{-5}$	2311	+	-52	2333	+	66
2339	-	$37\sqrt{-5}$	2341	-	$-18\sqrt{-5}$	2347	-	$-12\sqrt{-5}$
2351	-	$37\sqrt{-5}$	2357	-	$16\sqrt{-5}$	2371	+	50
2377	+	-22	2381	-	$16\sqrt{-5}$	2383	+	-46
2389	-	$-6\sqrt{-5}$	2393	-	$10\sqrt{-5}$	2399	-	$31\sqrt{-5}$
2411	+	-18	2417	-	$22\sqrt{-5}$	2423	+	84
2437	+	-7	2441	+	-33	2447	-	$-11\sqrt{-5}$
2459	+	-60	2467	-	$-27\sqrt{-5}$	2473	-	$42\sqrt{-5}$
2477	-	$-8\sqrt{-5}$	2503	+	-4	2521	-	$36\sqrt{-5}$
2531	-	$-5\sqrt{-5}$	2539	+	-40	2543	+	6
2549	-	$28\sqrt{-5}$	2551	+	-10	2557	+	-7
2579	-	$-32\sqrt{-5}$	2591	-	$7\sqrt{-5}$	2593	-	$-18\sqrt{-5}$
2609	+	9	2617	+	53	2621	-	$4\sqrt{-5}$
2633	+	69	2647	-	$9\sqrt{-5}$	2657	-	$10\sqrt{-5}$
2659	+	-94	2663	+	54	2671	-	$-12\sqrt{-5}$
2677	+	-73	2683	-	$-45\sqrt{-5}$	2687	-	$4\sqrt{-5}$
2689	-	$-12\sqrt{-5}$	2693	+	-69	2699	-	$43\sqrt{-5}$
2707	-	$-3\sqrt{-5}$	2711	-	$-17\sqrt{-5}$	2713	+	-19
2719	+	20	2729	-	$4\sqrt{-5}$	2731	+	80
2741	-	$4\sqrt{-5}$	2749	+	50	2753	-	$-8\sqrt{-5}$
2767	-	$12\sqrt{-5}$	2777	+	87	2789	+	-81
2791	+	38	2797	+	-43	2801	-	$10\sqrt{-5}$
2803	-	$21\sqrt{-5}$	2819	+	-60	2833	+	74

$S_2(\Gamma_0(29), (\frac{}{29}))$

p	$(\frac{p}{29})$	a_p	p	$(\frac{p}{29})$	a_p	p	$(\frac{p}{29})$	a_p
2837	+	3	2843	+	-54	2851	+	-10
2857	-	$-6\sqrt{-5}$	2861	-	$-20\sqrt{-5}$	2879	-	$7\sqrt{-5}$
2887	+	-52	2897	-	$-20\sqrt{-5}$	2903	-	$25\sqrt{-5}$
2909	+	30	2917	-	0	2927	-	$-41\sqrt{-5}$
2939	-	$-47\sqrt{-5}$	2953	+	59	2957	+	-3
2963	+	-6	2969	-	$-20\sqrt{-5}$	2971	+	50
2999	-	$31\sqrt{-5}$	3001	-	$-24\sqrt{-5}$	3011	+	-102
3019	-	$21\sqrt{-5}$	3023	+	36	3037	-	$12\sqrt{-5}$
3041	+	27	3049	+	-25	3061	+	-13
3067	+	2	3079	+	-94	3083	+	6
3089	-	$-8\sqrt{-5}$	3109	+	-91	3119	+	24
3121	-	$6\sqrt{-5}$	3137	+	87	3163	-	$3\sqrt{-5}$
3167	+	-18	3169	-	$-36\sqrt{-5}$	3181	+	-85
3187	-	$45\sqrt{-5}$	3191	+	42	3203	+	36
3209	-	$4\sqrt{-5}$	3217	-	$-6\sqrt{-5}$	3221	-	$16\sqrt{-5}$
3229	-	$24\sqrt{-5}$	3251	-	$-8\sqrt{-5}$	3253	+	14
3257	+	27	3259	-	$-9\sqrt{-5}$	3271	+	80
3299	+	-30	3301	+	-73	3307	+	-28
3313	+	-31	3319	+	110	3323	-	$-8\sqrt{-5}$
3329	+	81	3331	+	-70	3343	-	$39\sqrt{-5}$
3347	-	$-8\sqrt{-5}$	3359	+	84	3361	-	$-24\sqrt{-5}$
3371	+	78	3373	+	26	3389	+	-75
3391	-	$-39\sqrt{-5}$	3407	-	$16\sqrt{-5}$	3413	+	21
3433	-	$12\sqrt{-5}$	3449	-	$22\sqrt{-5}$	3457	+	-13
3461	-	$22\sqrt{-5}$	3463	-	$-12\sqrt{-5}$	3467	+	12
3469	-	$12\sqrt{-5}$	3491	-	$-11\sqrt{-5}$	3499	-	$-39\sqrt{-5}$
3511	-	$-45\sqrt{-5}$	3517	-	$-48\sqrt{-5}$	3527	-	$-20\sqrt{-5}$
3529	+	41	3533	+	69	3539	+	30
3541	-	$-42\sqrt{-5}$	3547	+	-22	3557	-	$-32\sqrt{-5}$
3559	-	$-33\sqrt{-5}$	3571	+	20			

$S_2(\Gamma_0(37), (\frac{\ }{37}))$

p	$(\frac{p}{37})$	a_p	p	$(\frac{p}{37})$	a_p	p	$(\frac{p}{37})$	a_p
2	-	2i	3	+	-1	5	-	-2i
7	+	3	11	+	-3	13	-	-6i
17	-	2i	19	-	6i	23	-	4i
29	-	-4i	31	-	0	37		-1+6i
41	+	-3	43	-	-6i	47	+	3
53	+	9	59	-	-4i	61	-	0
67	+	-12	71	+	-3	73	+	9
79	-	6i	83	+	9	89	-	-14i
97	-	12i	101	+	-3	103	-	-6i
107	+	-12	109	-	6i	113	-	4i
127	+	-7	131	-	-10i	137	+	18
139	+	0	149	+	15	151	+	-8
157	+	3	163	-	-6i	167	-	2i
173	+	-21	179	-	16i	181	+	-3
191	-	20i	193	-	-6i	197	+	3
199	-	-24i	211	+	-13	223	+	19
227	-	-8i	229	+	-5	233	+	-6
239	-	16i	241	-	0	251	-	10i
257	-	-8i	263	+	9	269	+	-30
271	+	-3	277	-	12i	281	-	-20i
283	-	24i	293	+	-6	307	+	-7
311	-	10i	313	-	-6i	317	+	18
331	-	0	337	+	13	347	-	32i
349	+	30	353	-	14i	359	+	-15
367	+	8	373	+	-21	379	+	15
383	-	-16i	389	-	16i	397	+	33
401	-	-10i	409	-	-24i	419	+	15
421	-	30i	431	-	10i	433	+	9
439	-	-24i	443	+	-21	449	-	26i
457	-	-18i	461	-	10i	463	-	-36i
467	-	-28i	479	-	-4i	487	-	-18i
491	+	12	499	-	36i	503	-	14i
509	+	15	521	+	-3	523	-	-6i
541	-	0	547	-	12i	557	-	-28i
563	-	-26i	569	-	-44i	571	+	-33
577	-	42i	587	-	22i	593	+	-21
599	+	45	601	+	-18	607	-	-18i
613	+	29	617	+	3	619	+	-35
631	-	-30i	641	+	-33	643	-	24i
647	-	2i	653	-	44i	659	+	-45
661	-	30i	673	+	-21	677	+	3
683	-	-46i	691	+	12	701	-	20i
709	-	6i	719	+	15	727	-	-18i
733	+	-31	739	+	25	743	+	39
751	+	27	757	-	12i	761	+	-33

$S_2(\Gamma_0(37), (\frac{\ }{37}))$

p	$(\frac{p}{37})$	a_p	p	$(\frac{p}{37})$	a_p	p	$(\frac{p}{37})$	a_p
769	-	-24i	773	+	39	787	+	23
797	-	-8i	809	-	-44i	811	+	-33
821	+	-3	823	+	4	827	-	-8i
829	-	-24i	839	+	0	853	-	24i
857	-	-22i	859	-	6i	863	+	24
877	+	18	881	+	-18	883	-	-36i
887	+	-57	907	-	12i	911	-	50i
919	-	6i	929	+	-30	937	+	-47
941	+	-18	947	-	-38i	953	+	39
967	-	-48i	971	+	12	977	-	32i
983	+	39	991	-	30i	997	-	-48i
1009	+	25	1013	-	14i	1019	-	-14i
1021	-	-30i	1031	-	20i	1033	+	19
1039	+	-45	1049	-	-4i	1051	-	-30i
1061	+	-18	1063	+	29	1069	+	-10
1087	-	12i	1091	-	-20i	1093	-	-36i
1097	-	52i	1103	+	24	1109	+	15
1117	+	-47	1123	-	-36i	1129	-	66i
1151	+	-63	1153	-	54i	1163	+	-36
1171	-	-60i	1181	+	57	1187	+	33
1193	+	9	1201	-	-30i	1213	-	54i
1217	+	63	1223	-	4i	1229	-	26i
1231	+	37	1237	+	58	1249	+	-15
1259	+	-60	1277	-	32i	1279	+	60
1283	+	-36	1289	-	26i	1291	+	-33
1297	-	-18i	1301	-	-10i	1303	-	54i
1307	+	48	1319	-	46i	1321	+	-33
1327	-	-18i	1361	-	-50i	1367	-	-68i
1373	+	-6	1381	+	-33	1399	+	5
1409	+	-15	1423	-	-6i	1427	+	3
1429	-	6i	1433	+	-6	1439	+	-45
1447	+	-27	1451	-	-70i	1453	+	-21
1459	+	-65	1471	+	-23	1481	+	-3
1483	+	-1	1487	+	33	1489	+	-50
1493	-	4i	1499	-	-34i	1511	-	70i
1523	-	44i	1531	-	-30i	1543	+	-21
1549	-	6i	1553	+	54	1559	-	56i
1567	-	12i	1571	-	-50i	1579	+	45
1583	-	-16i	1597	-	-18i	1601	+	-18
1607	+	-12	1609	-	6i	1613	-	-26i
1619	+	45	1621	+	27	1627	+	-12
1637	+	-27	1657	-	12i	1663	-	24i
1667	-	62i	1669	+	50	1693	+	34
1697	-	52i	1699	+	45	1709	+	-15
1721	-	-70i	1723	+	9	1733	-	4i
1741	-	30i	1747	-	42i	1753	-	-36i

$S_2(\Gamma_0(37), (\frac{}{37}))$

p	$(\frac{p}{37})$	a_p	p	$(\frac{p}{37})$	a_p	p	$(\frac{p}{37})$	a_p
1759	-	6i	1777	+	-22	1783	+	-16
1787	+	-12	1789	-	6i	1801	+	-43
1811	-	40i	1823	+	39	1831	-	-60i
1847	+	-12	1861	+	-53	1867	-	72i
1871	+	-3	1873	-	24i	1877	+	-42
1879	-	6i	1889	-	-34i	1901	-	-20i
1907	-	22i	1913	+	-51	1931	+	-3
1933	+	9	1949	+	45	1951	+	27
1973	+	-6	1979	-	-64i	1987	+	63
1993	-	-66i	1997	+	63	1999	+	15
2003	-	34i	2011	-	-30i	2017	-	12i
2027	-	2i	2029	-	-54i	2039	+	-75
2053	-	-6i	2063	+	-81	2069	+	-15
2081	+	57	2083	+	69	2087	-	-8i
2089	-	66i	2099	+	-45	2111	-	-40i
2113	+	19	2129	-	-14i	2131	-	-60i
2137	+	-67	2141	-	-40i	2143	+	24
2153	+	9	2161	-	30i	2179	+	-20
2203	-	24i	2207	-	-28i	2213	+	-6
2221	+	-3	2237	-	22i	2239	-	-54i
2243	-	-26i	2251	-	30i	2267	+	-12
2269	+	-15	2273	+	-21	2281	-	30i
2287	+	48	2293	+	-1	2297	+	33
2309	-	-34i	2311	-	-60i	2333	-	14i
2339	-	46i	2341	+	57	2347	+	-27
2351	-	-10i	2357	+	3	2371	+	-68
2377	+	43	2381	-	50i	2383	-	24i
2389	+	-50	2393	+	-66	2399	-	-64i
2411	-	-10i	2417	+	3	2423	-	14i
2437	-	-48i	2441	+	27	2447	-	82i
2459	-	26i	2467	+	-47	2473	-	-36i
2477	-	52i	2503	-	-36i	2521	-	90i
2531	-	70i	2539	-	6i	2543	+	84
2549	+	-30	2551	-	90i	2557	+	3
2579	+	-60	2591	+	87	2593	+	-66
2609	-	-94i	2617	+	-37	2621	-	-40i
2633	-	-16i	2647	-	-78i	2657	+	-42
2659	-	66i	2663	+	-81	2671	+	-53
2677	-	-18i	2683	-	-6i	2687	-	-98i
2689	+	45	2693	-	-76i	2699	-	16i
2707	-	-48i	2711	+	-63	2713	+	-6
2719	-	66i	2729	+	75	2731	+	-23
2741	+	42	2749	+	15	2753	-	-76i
2767	-	42i	2777	-	-28i	2789	-	56i
2791	+	47	2797	-	72i	2801	+	-78
2803	+	84	2819	+	75	2833	+	69

$S_2(\Gamma_0(37), (\frac{}{37}))$

p	$(\frac{p}{37})$	a_p	p	$(\frac{p}{37})$	a_p	p	$(\frac{p}{37})$	a_p
2837	+	93	2843	-	94i	2851	-	-60i
2857	-	-48i	2861	+	-78	2879	+	-60
2887	+	-87	2897	+	-42	2903	-	104i
2909	-	46i	2917	-	12i	2927	+	48
2939	+	45	2953	+	34	2957	+	3
2963	+	84	2969	+	45	2971	+	92
2999	-	46i	3001	+	77	3011	-	20i
3019	-	36i	3023	+	-81	3037	+	-27
3041	+	-63	3049	-	96i	3061	+	-63
3067	+	-27	3079	-	-84i	3083	+	-51
3089	-	-14i	3109	+	85	3119	+	0
3121	-	0	3137	-	-28i	3163	-	24i
3167	-	-58i	3169	-	66i	3181	+	-18
3187	-	-48i	3191	+	57	3203	+	-51
3209	+	-45	3217	-	-108i	3221	-	10i
3229	+	105	3251	-	-80i	3253	+	-31
3257	+	18	3259	+	20	3271	-	60i
3299	-	-44i	3301	-	0	3307	-	12i
3313	-	54i	3319	+	-75	3323	+	-21
3329	+	-45	3331	+	-33	3343	-	-6i
3347	-	-8i	3359	-	-74i	3361	-	90i
3371	+	72	3373	-	-96i	3389	-	16i
3391	-	0	3407	+	-27	3413	+	9
3433	-	-66i	3449	-	-4i	3457	+	-97
3461	-	10i	3463	-	-6i	3467	+	93
3469	+	5	3491	-	100i	3499	+	-55
3511	+	72	3517	-	12i	3527	+	-117
3529	-	6i	3533	-	-56i	3539	-	-34i
3541	+	67	3547	-	-108i	3557	-	2i
3559	+	95	3571	-	-60i			

付　録　C

$\Delta(z)=e^{2\pi iz}\prod_{n=1}^{\infty}(1-e^{2\pi inz})^{24}=\sum_{n=1}^{\infty}a_n e^{2\pi inz}$ の **Fourier** 係数 a_n の表をあげる． 表では番号 n とそれに対応する a_n の値を n, a_n $(1\leqq n\leqq 162)$ の順にならべてある．

1	1	28	24647168	55	2582175960
2	-24	29	128406630	56	-1414533120
3	252	30	-29211840	57	2686677840
4	-1472	31	-52843168	58	-3081759120
5	4830	32	-196706304	59	-5189203740
6	-6048	33	134722224	60	-1791659520
7	-16744	34	165742416	61	6956478662
8	84480	35	-80873520	62	1268236032
9	-113643	36	167282496	63	1902838392
10	-115920	37	-182213314	64	2699296768
11	534612	38	-255874080	65	-2790474540
12	-370944	39	-145589976	66	-3233333376
13	-577738	40	408038400	67	-15481826884
14	401856	41	308120442	68	10165534848
15	1217160	42	101267712	69	4698104544
16	987136	43	-17125708	70	1940964480
17	-6905934	44	-786948864	71	9791485272
18	2727432	45	-548895690	72	-9600560640
19	10661420	46	-447438528	73	1463791322
20	-7109760	47	2687348496	74	4373119536
21	-4219488	48	248758272	75	-6425804700
22	-12830688	49	-1696965207	76	-15693610240
23	18643272	50	611981400	77	-8951543328
24	21288960	51	-1740295368	78	3494159424
25	-25499225	52	850430336	79	38116845680
26	13865712	53	-1596055698	80	4767866880
27	-73279080	54	1758697920	81	1665188361

82	-7394890608	109	73482676310	136	-583413304320
83	-29335099668	110	-61972223040	137	-297198746214
84	6211086336	111	-45917755128	138	-112754509056
85	-33355661220	112	-16528605184	139	596793577940
86	411016992	113	-85146862638	140	119045821440
87	32358470760	114	-64480268160	141	677211820992
88	45164021760	115	90047003760	142	-234995646528
89	-24992917110	116	-189014559360	143	-308865667656
90	13173496560	117	65655879534	144	-112181096448
91	9673645072	118	124540889760	145	620204022900
92	-27442896384	119	115632958896	146	-35130991728
93	-13316478336	120	102825676800	147	-427635232164
94	-64496363904	121	498319933	148	268217998208
95	51494658600	122	-166955487888	149	-1115433620850
96	-49569988608	123	77646351384	150	154219312800
97	75013568546	124	77785143296	151	-824447297848
98	40727164968	125	-359001100500	152	900676761600
99	-60754911516	126	-45668121408	153	784811057562
100	37534859200	127	-262717201024	154	214837039872
101	81742959102	128	338071388160	155	-255232501440
102	41767088832	129	-4315678416	156	214308444672
103	-225755128648	130	66971388960	157	1315116754406
104	-48807306240	131	631528759932	158	-914804296320
105	-20380127040	132	-198311113728	159	-402206035896
106	38305336752	133	-178514816480	160	-950091448320
107	90241258356	134	371563845216	161	-312162946368
108	107866805760	135	-353937956400	162	-39964520664

文献表

以下は本書に引用した文献および本書を執筆するのに参照した文献である．その後の新しい理論については Antwerp での国際シンポジウムの報告集

Modular Functions of One Variable I, II, III, IV, Springer Lecture Notes, 320 (1973), 349 (1973), 350 (1973), 476 (1975)

を参照されたい．また 1976 年の京都における国際シンポジウム (International Symposium on Algebraic Number Theory) の報告集も出版される予定である。

[Artin] Über eine neue Art von L-Reihen. Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg, 3 (1923), pp. 89–108.

[浅井] On the Fourier coefficients of automorphic forms at various cusps and some applications to Rankin's convolution, J. Math. Soc. Japan, 28 (1976), pp. 48–61.

[Atkin–Lehner] Hecke operators on $\Gamma_0(m)$, Math. Ann. 185 (1970), pp. 134–160.

[Borevich–Shafarevich] Number Theory, Academic Press, 1966.

[Coates–Lichtenbaum] On l–adic zeta functions, Ann. Math. 98 (1973), pp. 498–550.

[Deligne] Formes modulaires et représentations l-adiques, Seminaire Bourbaki, 1968/69, n^0 355.

[Deligne 2] La conjecture de Weil. I, Publ. Math. I. H. E. S., 43 (1974), pp. 273–307.

[Deligne–Serre] Formes modulaires de poids 1, Ann. Sc. de l'Éc. Norm. Sup., t. 7 (1974), pp. 507–530.

[土井–長沼] On the functional equation of certain Dirichlet series, Invent. Math., 9 (1969), pp. 1–14.

[Eichler] Allgemeine Kongruenzklasseneinteilungen der Ideale einfacher Algebren über algebraischen Zahlkörper und ihre L-Reihen, J. Reine Angew.

Math., 179 (1938), pp. 227–251.

[Eichler 2] Quaternäre quadratische Formen und die Riemannsche Vermutung für die Kongruenzzetafunktion, Arch. Math., 5 (1954), pp. 355–366.

[Eichler 3] Über die Darstellbarkeit von Modulformen durch Thetareihen, J. Reine Angew. Math., 195 (1956), pp. 159–171.

[Eichler 4] Eine Verallgemeinerung der Abelschen Integrale, Math. Z., 67 (1957), pp. 267–298.

[Fricke–Klein] Vorlesung über die Theorie der automorphen Funktionen I, II, Leipzig, 1897–1912.

[Gel'fand-Graev-Piatetskii-Shapiro] Represetation Theory and Automorphic Functions, Saunders, 1969.

[Godement] Où *l*'on généralise une intégrale étudiée par Siegel at généralisant la fonction Γ, Fonctions holomorphes de carré sommable dans le demi-plan de Siegel, Generalites sur les formes modulaires I, II, Seminaire Henri Cartan 10e anée, 1957-1958.

[Godement 2] Notes on Jacquet-Langlands' theory, Inst. for Advanced Study, 1970.

[Grosswald] Die Werte der Riemannschen Zetafunktion an ungeraden Argumenstellen, Göttingen Nachr., (1970), pp. 9–12.

[Hardy–Wright] An introduction to the Theory of Numbers, Oxford 3rd ed., 1954.

[Hasse] Über die Klassenzahl abelscher Zahlkörper, Akademie-Verlag, 1952.

[Hecke] Math. Werke.

[土方] Explicit formula of the traces of Hecke operators for $\Gamma_0(N)$, J. Math. Soc. Japan, 26 (1974), pp. 56–82.

[土方 2] 代数群の整数論，紀伊國屋数学叢書(予定).

[土方–斎藤] On the representability of modular forms by theta series, Number Theory, Algebraic Geometry and Commutative Algebra, in honor of Y. Akizuki, Kinokuniya, 1973, pp. 13–21.

[Hurwitz] Math. Werke, Band II.

[石川] On the trace formula for Hecke operators, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, 21 (1974), pp. 357–376.

[岩澤] 代数函数論(増補版)，岩波書店.

[岩澤 2] Lectures on *p*-adic *L*-function, Ann. Math. Studies, 74 (1972).

[井草] Kroneckerian model of fields of elliptic modular functions, Amer. J. Math., 81 (1959), pp. 561–577.

[井草 2] Theta Functions, Springer-Verlag, 1972.

[Jacquet-Langlands] Automorphic Forms on $GL(2)$, Springer Lecture Notes, 114 (1970).

[河田] 一変数保型函数の理論, I, II, 東大数学教室セミナリーノート, 1964.

[北岡] Quaternary even positive definite quadratic forms of prime discriminant, Nagoya Math. J., 52 (1973), pp. 147–161.

[Langlands] Problems in the Theory of Automorphic Forms, Lectures in modern analysis and applications, III, Springer Lecture Notes, 170 (1970).

[Langlands 2] Base change for $GL(2)$, Inst. for Advanced Study, 1975.

[三宅] On automorphic forms on GL_2 and Hecke operators, Ann. of Math., 94 (1971), pp. 174–189.

[長沼] On the coincidence of two Dirichlet series associated with cusp forms of Hecke's "Neben"–type and Hilbert modular forms over a real quadratic field, J. Math. Soc. Japan, 25 (1973), pp. 547–555.

[Ogg] Modular Forms and Dirichlet Series, Benjamin, 1969.

[斎藤] Eichler の跡公式について, 数学, 第 24 巻 (1972), pp. 227–231.

[斎藤 2] Automorphic forms and algebraic extensions of number fields, Lectures in Mathematics, Kyoto Univ., 1975.

[Selberg] Harmonic analysis and discontinuous groups in weakly symmetric Riemannian spaces with applications to Dirichlet series, J. Indian Math. Soc., 20 (1956), pp. 47–87.

[Schoenberg] Elliptic Modular functions, Springer, 1974.

[Siegel] Math. Werke, Springer-Verlag.

[Siegel 2] On Advanced Analytic Number Theory, Tata Inst., 1961.

[Siegel 3] Berechnung von Zetafunktionen an Ganzzahligen Stellen, Göttingen Nachr., 10 (1969), pp. 87–102.

[清水] On discontinuous groups operating on the product of the upper half planes, Ann. Math., 77 (1963), pp. 33–71.

[清水 2] On traces of Hecke operators, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, 10 (1963), pp. 1–19.

[清水 3] On Zeta Functions of Quaternion Algebras, Ann. of Math., 81 (1965), pp. 166–193.

[清水 4] 近似定理, ヘッケ環, ゼータ函数, 東大数学教室セミナリーノート, 1968.

[志村] Introduction to the arithmetic theory of automorphic functions, Iwanami Shoten and Princeton Univ. Press, 1971.

[志村 2] Correspondances modulaires et les fonctions ζ de courbes algébriques, J. Math. Soc. Japan, 10 (1958), pp. 1–28.

[志村 3] On the zeta-functions of the algebraic curves uniformized by certain automorphic functions, J. Math. Soc. Japan, 13 (1961), pp. 275–331.

[志村 4] A reciprocity law in non-solvable extensions, J. Reine Angew. Math., 221 (1966), 209–220.

[志村 5] On elliptic curves with complex multiplication as factors of the jabobians of modular function fields, Nagoya Math. J., 43 (1971), pp. 199–208.

[志村 6] Class fields over real quadratic fields and Hecke operators, Ann. Math., 95 (1972), pp. 130–190.

[志村 7] On modular forms of half integral weight, Ann. Math., 97 (1973), pp. 440–481.

[志村 8] On some arithmetic properties of modular forms of one and several variables, Ann. Math., 102 (1975), pp. 491–515.

[新谷] On construction of holomorphic cusp forms of half integral weight, Nagoya math. J., 58 (1975), pp. 83–126.

[末綱] 解析的整数論，岩波書店.

[高木] 代数的整数論，岩波書店.

[Vaserstein] On the group SL_2 over Dedekind rings of arithmetic type, Math. Sbornik, 89 (131) (1972), pp. 313–322, (Math., USSR Sbornik, 18 (1972), pp. 321–332.

[Weil] Basic Number Theory, Springer-Verlag, 1967.

[Weil 2] Dirichlet series and automorphic forms, Springer Lecture Notes, 189 (1971).

[Weil 3] Über die Bestimmung Dirichletschen Reihen durch Funktionalgleichungen, Math. Ann., 168 (1967), pp. 149–156.

[Weil 4] Sur une formule classique, J. Math. Soc. Japan, 20 (1968), pp. 400–402.

索　引

ナ　行

ハ　行

マ　行

ヤ　行

ラ　行

著　者

ど　い　こう　じ
土 井 公 二

1934年神奈川県鎌倉市に生まれる．1956年東京教育大学理学部数学科卒業．1962年東京教育大学理学博士取得．大阪大学理学部助手，同講師，Institute for Advanced Study 研究員，京都大学理学部助教授を経て，現在，北海道大学理学部教授．

み　やけ　とし　つね
三 宅 敏 恒

1944年大阪府堺市に生まれる．1966年大阪大学理学部数学科卒業．1969年Johns Hopkins 大学 Ph. D. 取得．Institute for Advanced Study 研究員，大阪大学理学部助手，京都大学理学部講師，Univ. of Washington 助教授を経て，現在，北海道大学教養部助教授．

保型形式と整数論

定価 5800円

1976年10月30日　第１刷発行
1986年４月30日　第２刷発行

発行所　株式会社 紀伊國屋書店
東京都新宿区新宿３の17の７
電　話　(354)（代表）0131
振替口座　東京 125575

出版部　東京都世田谷区桜丘5—38—1
電　話 (439) 0125（代表）
郵便番号 156

ISBN4-314-00158-5　C3341
Printed iu Japan

印刷　加藤文明社
製本　三　水　舎

紀伊國屋数学叢書について

数学を学ぶにはいろいろの段階があるが，いずれの場合でも書物などによって自学自習することが最も重要であり，単に講義を聞くというような受動的な勉強だけでは，はなはだ不十分である．

みずから学ぶために現在いろいろな数学書が出版されている．しかし，数学の進歩は極めて基礎的な考え方に対してさえ常に影響を与えており，従ってどのような段階の勉強であっても，常に新しい考え方を理解することが必要である．このためには，数学の過去と将来とを結ぶ視点から書かれた書物が数多く出版されることが望ましい．即ち，新しい視点と古典的な視点とを見くらべ，基本的なことをも将来の発展を考慮した視点から説明するという立場で書かれた書物が要望されている．

本叢書はこのような要望に応えて企画されたものであって，各巻が大学理工学系の専門課程の学生または大学院学生がそれぞれの分野での話題，対象について入門の段階からある程度の深さまで勉学するための伴侶となることを目指している．このために我々は各巻の話題の選択について，十分配慮し，現代数学の発展にとって重要であり，また既刊書で必ずしも重点が置かれていないものを選び，各分野の第一線で活躍しておられる数学者に執筆をお願いしている．

学生諸君および数学同好の方々が，この叢書によって数学の種々の分野における基本的な考え方を理解し，また基礎的な知識を会得することを期待するとともに，更に現代数学の最先端へ向かおうとする場合の基礎ともなることを望みたい．